А. Л. Ронкин, О квазиполиномах, *Функц. анализ и его прил.*, 1978, том 12, выпуск 4, 93–94

Функциональный анализ и его приложения,
т. 12, вып. 4, 1978, 93—94

УДК 517.51

О КВАЗИПОЛИНОМАХ

А. Л. Ронкин

1. Если функция двух действительных переменных при каждом фиксированном значении любой из переменных является полиномом по другой, то, как известно, эта функция есть полином от двух переменных. В настоящей работе мы исследуем функции нескольких переменных такие, что при фиксированных значениях некоторого набора переменных эти функции как функции остальных переменных являются квазиполиномами. Нами рассматривается также некоторый более общий класс функций.

Квазиполиномом от n переменных называется конечная сумма вида

$$\sum_k P_k(y_1, y_2, \ldots, y_n) \exp(\lambda_k^1 y_1 + \lambda_k^2 y_2 + \cdots + \lambda_k^n y_n),$$

где $P_k(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — полиномы, $\lambda_k^i \in \mathbf{C}$. В зависимости от того, комплексны или вещественны y_i, говорят о квазиполиномах в $\mathbf{C}^n$ или в $\mathbf{R}^n$.

Пример функции $\exp(x_1 x_2)$ показывает, что функция, являющаяся квазиполиномом от каждой переменной при фиксированных остальных, не обязана быть квазиполиномом по совокупности переменных.

Основным результатом является теорема 1.

Теорема 1. *Пусть функция f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ является квазиполиномом от каждой переменной при фиксированных остальных. Тогда функция f имеет вид*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum P_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \exp \lambda_k(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где $P_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — полиномы, $\lambda_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — полиномы, линейные по каждой переменной.

Следствие 1. *Пусть $f(x_1, x_2)$ при любом фиксированном x_i есть квазиполином от x_j, $i \neq j$, и пусть $f(x_1, x_1 + h)$ — квазиполином от x_1 при h из некоторого множества мощности континуума. Тогда $f(x_1, x_2)$ — квазиполином от x_1, x_2.*

Аналоги этого следствия легко получить для случая произвольного числа переменных.

Заметим, что при выполнении условий теоремы 1 функция $f(x)$ является, в силу этой теоремы, сужением на $\mathbf{R}^n$ некоторой целой функции $f(z)$ конечного порядка.

Следствие 2. *Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и ее продолжение $f(z)$ имеет не более чем минимальный тип при порядке 2. Тогда $f(x)$ — квазиполином от переменных $x_1, \ldots, x_n$.*

2. Теорема 1 позволяет некоторые задачи для квазиполиномов от нескольких переменных сводить к соответствующим задачам для случая одной переменной. Примером этого может служить задача о делении квазиполиномов. В 1929 г. Ритт [1] доказал, что если частное двух квазиполиномов с постоянными коэффициентами есть целая функция, то оно само (частное) есть квазиполином. В 1963 г. Шилдс [2] ослабил предположения теоремы, потребовав лишь, чтобы число полюсов частного в круге $|z| < t$ было $o(t)$. В 1971 г. А. Я. Гордон и Б. Я. Левин [3] существенно обобщили и усилили теорему Шилдса. Теорема Ритта была перенесена на случай многих переменных Аванесяном и Гию [4]. Позднее Беренштейн и Достал [5] доказали, что если отношение двух квазиполиномов с полиномиальными коэффициентами от нескольких переменных есть целая функция, то оно представимо в виде отношения квазиполинома к полиному.

Нами же с помощью теоремы 1 получена теорема, содержащая, в частности, многомерный аналог теоремы Шилдса.

Теорема 2. *Пусть $f(z)$, $g(z)$ — квазиполиномы от r переменных и $n(t)$ есть $(2r-2)$-мерный объем множества полюсов функции $F(z) = f(z)/g(z)$ в шаре $|z| < t$, вычисленный с учетом кратности. Тогда, если $n(t) = o(t^{2r-1})$, то функция $F(z)$ представима в виде $H(z)/P(z)$, где $H(z)$ — квазиполином, а $P(z)$ — полином.*

Следствие 2 теоремы 1 дает возможность доказать такую теорему.

Теорема 3. *Пусть $\varphi(z_1, \ldots, z_n)$ — квазиполином и функция $F(z_1, \ldots, z_n) = \sqrt[k]{\varphi(z_1, \ldots, z_n)}$ целая. Тогда $F(z_1, \ldots, z_n)$ — также квазиполином.*

Эта теорема является обобщением соответствующей теоремы Сельберга [6] для квазиполиномов от одной переменной.

3. Теорема 1 показывает, что наряду с квазиполиномами разумно рассматривать более широкие классы функций. Обозначим через S_m^n класс функций $f\colon \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$ вида

$$\sum P_k(z_1, \ldots, z_n) \exp \lambda_k(z_1, \ldots, z_n),$$

где $P_k(z_1, \ldots, z_n)$ — полиномы, $\lambda_k(z_1, \ldots, z_n)$ — полиномы, линейные по каждой переменной, степени которых не превосходят натурального числа m. То же самое обозначение мы сохраним для класса функций $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$, получаемых сужением на $\mathbf{R}^n$ функций класса S_m^n. Заметим, что $S_m^n \subset S_{m+1}^n$, а S_1^n — класс квазиполиномов от n переменных. В терминах этих классов сформулируем следующее формальное обобщение теоремы 1.

Теорема 1*. *Пусть функция $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$, p — некоторое фиксированное натуральное число. Тогда, если при фиксированных значениях любого набора p переменных функция f как функция остальных $n - p$ переменных принадлежит классу S_m^{n-p}, то сама функция принадлежит классу S_n^n. Если при этом $m + p < n$, то f принадлежит также классу S_m^n.*

Теоремы 2 и 3 также допускают формальное обобщение, получаемое путем замены в формулировках этих теорем квазиполиномов классами S_m^n.

4. При априорном предположении, что функция, фигурирующая в теореме 1*, является сужением на $\mathbf{R}^n$ некоторой целой функции, утверждение теоремы останется в силе, если ослабить требования на функцию $f(x)$. А именно, достаточно требовать принадлежность f классу S_m^{n-p} не при всех фиксированных наборах переменных, а лишь принадлежащих некоторым множествам. Точнее, имеет место

Теорема 4. *Пусть функция $f\colon \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$ целая. Пусть, далее, p — некоторое фиксированное натуральное число, и пусть каждой выборке p индексов $i_1, i_2, \ldots, i_p$ отвечает множество $E(i_1, i_2, \ldots, i_p)$, принадлежащее $\mathbf{C}^p$ и не являющееся подмножеством никакой счетной суммы аналитических множеств. Тогда, если при любых фиксированных $z_{i_1}, z_{i_2}, \ldots, z_{i_p}$ таких, что $(z_{i_1}, z_{i_2}, \ldots, z_{i_p}) \in E(i_1, i_2, \ldots, i_p)$, функция f как функция остальных $n - p$ переменных принадлежит S_m^{n-p}, то $f \in S_n^n$. При этом, если $m + p < n$, то $f \in S_m^n$.*

В заключение приношу глубокую благодарность Б. Я. Левину за постановку задачи и ценные советы.

Харьковский государственный университет

Поступило в редакцию 4 января 1977 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ritt G. F., Trans. Amer. Math. Soc. 31 (1929), 680—686. 2. Shields A., Comm. Pure Appl. Math. XVI (1963), 27—31. 3. Гордон А. Я., Левин Б. Я., Функц. анализ 9, вып. 1 (1971), 22—29. 4. Avanissian V., Gay R., Bull. Soc. math. France 103 (1975), 341—384. 5. Berenstein C. A., Dostal M. A., Ark. för mat. 12, № 2 (1974), 267—280. 6. Selberg H., Avh. Noske Vid. Akad. Oslo 1/10 (1931), 1—8.