Yu. G. Nikonorov, On a class of homogeneous compact Einstein manifolds, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2000, Volume 41, Number 1, 200–205

https://www.mathnet.ru/eng/smj1510

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2000. Том 41, № 1

УДК 514

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОДНОРОДНЫХ КОМПАКТНЫХ МНОГООБРАЗИЙ ЭЙНШТЕЙНА

Ю. Г. Никоноров

Аннотация: Доказано существование однородных метрик Эйнштейна на некоторых компактных однородных пространствах. Библиогр. 1.

Рассмотрим однородное компактное пространство G/H с полупростой группой движений G. Пусть $[\cdot,\cdot]$ — скобка Ли, а $B(\cdot,\cdot)$ — форма Киллинга алгебры Ли g, и пусть $\langle\cdot,\cdot\rangle = -B(\cdot,\cdot)$ — биинвариантная метрика.

Рассмотрим p — ортогональное дополнение к h в g относительно $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Известно, что любая G-однородная метрика на G/H порождает некоторое ad_h-инвариантное скалярное произведение на p и наоборот [1, формула 7.24]. В силу этого замечания мы будем отождествлять однородные метрики на G/H с ad_h-инвариантными скалярными произведениями на p. Метрика $\langle\cdot,\cdot\rangle$, ограниченная на p, называется *стандартной*.

Допустим, что пространство G/H таково, что модуль p представим в виде прямой суммы трех попарно ортогональных относительно $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ad_h-инвариантных и неприводимых модулей, т. е.

$$p = p_1 \oplus p_2 \oplus p_3,$$

удовлетворяющих соотношениям $[p_i, p_i] \subset h$ для $i \in \{1,2,3\}$. Сформулируем основной результат.

Теорема. *Все пространства G/H, удовлетворяющие вышеприведенному условию, допускают однородную метрику Эйнштейна.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобится ряд вспомогательных утверждений и конструкций.

Пусть $\{e_i^j\}$ — ортонормированный базис в p_i относительно $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $i \in \{1,2,3\}$, $1 \le j \le d_i = \dim p_i$. Определим выражения $\begin{bmatrix} k \\ ij \end{bmatrix}$ для $i,j,k \in \{1,2,3\}$ следующим образом:

$$\begin{bmatrix} k \\ ij \end{bmatrix} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \left(\left\langle [e_i^\alpha, e_j^\beta], e_k^\gamma \right\rangle\right)^2,$$

где α, β, γ изменяются в пределах от 1 до d_i, d_j, d_k соответственно. Отметим, что символы $\begin{bmatrix} k \\ ij \end{bmatrix}$ симметричны по всем трем индексам в силу биинвариантности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96–01–00436) и гранта С.-Петербургского ун-та.

метрики $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Очевидно, что для пространств рассматриваемого нами типа $\begin{bmatrix} k \\ ij \end{bmatrix} = 0$ при двух совпадающих индексах. Важную роль в наших дальнейших рассуждениях играет величина $\begin{bmatrix} 3 \\ 12 \end{bmatrix}$, для нее мы используем обозначение A. Очевидно,

$$A = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 32 \end{bmatrix} \geq 0.$$

Лемма 1. *Для всех $i \in \{1,2,3\}$ выполняется неравенство*

$$d_i \geq 2A,$$

причем равенство равносильно выполнению соотношения $[h, p_i] = 0$.

Доказательство. Пусть $\{e_0^j\}$ — ортонормированный относительно $\langle\cdot,\cdot\rangle$ базис в h, $1 \leq j \leq \dim h$. Тогда

$$\sum_{j,k} \begin{bmatrix} k \\ ij \end{bmatrix} = \sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma \\ 1\leq j,k\leq 3}} \left(\left\langle [e_i^\alpha, e_j^\beta], e_k^\gamma \right\rangle\right)^2 \leq \sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma \\ 0\leq j,k\leq 3}} \left(\left\langle [e_i^\alpha, e_j^\beta], e_k^\gamma \right\rangle\right)^2$$
$$= \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ 0\leq j\leq 3}} \left\langle [e_i^\alpha, e_j^\beta], [e_i^\alpha, e_j^\beta] \right\rangle = -\sum_{\substack{\alpha,\beta \\ 0\leq j\leq 3}} \left\langle e_j^\beta, [e_i^\alpha, [e_i^\alpha, e_j^\beta]] \right\rangle = -\sum_\alpha B(e_i^\alpha, e_i^\alpha) = d_i.$$

Здесь мы воспользовались биинвариантностью метрики $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и определением формы Киллинга. Отметим, что неравенство в вышеприведенной цепочке обращается в равенство тогда и только тогда, когда $[h, p_i] = 0$.

Подсчитаем теперь $\sum_{j,k} \begin{bmatrix} k \\ ij \end{bmatrix}$ другим способом. Легко понять, что $\begin{bmatrix} k \\ ij \end{bmatrix} \neq 0$ только в том случае, когда все i, j, k различны, в этом случае $\begin{bmatrix} k \\ ij \end{bmatrix} = A$, но таких вариантов всего два. Поэтому

$$\sum_{j,k} \begin{bmatrix} k \\ ij \end{bmatrix} = 2A \leq d_i$$

и выполнение равенства равносильно тому, что $[h, p_i] = 0$.

Рассмотрим семейство ad_h-инвариантных метрик на p вида

$$(\cdot,\cdot) = x_1 \cdot \langle\cdot,\cdot\rangle|_{p_1} + x_2 \cdot \langle\cdot,\cdot\rangle|_{p_2} + x_3 \cdot \langle\cdot,\cdot\rangle|_{p_3}$$

при положительных x_i. Отметим, что векторы $\frac{1}{\sqrt{x_i}} e_i^j$ образуют ортобазис в p относительно такой метрики. Пусть $\mathrm{Ric}(\cdot,\cdot)$ — форма кривизны Риччи метрики $(\cdot,\cdot)$, которая также ad_h-инвариантна, поэтому

$$\mathrm{Ric}(\cdot,\cdot)|_{p_i} = r_i \cdot (\cdot,\cdot)|_{p_i}$$

для некоторых вещественных r_i. Покажем, что для метрики $(\cdot,\cdot)$ модули p_i попарно ортогональны относительно $\mathrm{Ric}(\cdot,\cdot)$, и выведем формулу для вычисления величин r_i.

Лемма 2. *Модули p_i попарно ортогональны относительно формы кривизны Риччи* $\mathrm{Ric}(\cdot,\cdot)$ *метрики* $(\cdot,\cdot)$. *Для вычисления чисел r_i справедлива формула*

$$r_i = \frac{1}{2x_i} + \frac{A}{2d_i}\left(\frac{x_i}{x_jx_k} - \frac{x_k}{x_ix_j} - \frac{x_j}{x_ix_k}\right),$$

где $i,j,k \in \{1,2,3\}$, $i \neq j \neq k \neq i$.

Доказательство. Воспользуемся формулой 7.38 из [1], из которой для компактного пространства G/H легко выводится равенство

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = -\frac{1}{2}\sum_i([X,X_i]_p,[Y,X_i]_p) - \frac{1}{2}B(X,Y) + \frac{1}{4}\sum_{i,j}([X_i,X_j]_p,X)([X_i,X_j]_p,Y),$$

где $\{X_i\}$ — ортонормированный относительно $(\cdot,\cdot)$ базис в p. Поскольку в нашем случае

$$[p_1,p_2]\subset p_3, \quad [p_1,p_3]\subset p_2, \quad [p_2,p_3]\subset p_1,$$

то $\mathrm{Ric}(p_i,p_j)=0$, т. е. модули p_1, p_2 и p_3 попарно ортогональны относительно формы Риччи метрики $(\cdot,\cdot)$.

Далее, для выбранного нами базиса получаем

$$\begin{aligned} d_ir_i = -\frac{1}{2x_i}\sum_\alpha B(e_i^\alpha,e_i^\alpha) &- \frac{1}{2}\sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma\\ 1\leq j,k\leq 3}}\big(\big\langle[e_i^\alpha,e_j^\beta],e_k^\gamma\big\rangle\big)^2\frac{x_k}{x_ix_j} \\ &+ \frac{1}{4}\sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma\\ 1\leq j,k\leq 3}}\big(\big\langle[e_j^\beta,e_k^\gamma],e_i^\alpha\big\rangle\big)^2\frac{x_i}{x_jx_k} \\ &= \frac{d_i}{2x_i} - \frac{1}{2}\sum_{1\leq j,k\leq 3}\begin{bmatrix}k\\ ij\end{bmatrix}\frac{x_k}{x_ix_j} + \frac{1}{4}\sum_{1\leq j,k\leq 3}\begin{bmatrix}i\\ jk\end{bmatrix}\frac{x_i}{x_jx_k}. \end{aligned}$$

Учитывая симметричность символов $\begin{bmatrix}k\\ ij\end{bmatrix}$ и то, что среди $\begin{bmatrix}k\\ ij\end{bmatrix}$ лишь два символа отличны от 0 (равны A), получаем второе утверждение леммы.

Лемма 3. *Пусть $A=0$ и λ_i — произвольные положительные числа,* $i \in \{1,2,3\}$. *Тогда существует метрика* $(\cdot,\cdot)$, *для которой* $(r_1,r_2,r_3)=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$.

Доказательство. В условиях леммы $r_i = \frac{1}{2x_i}$, и достаточно положить $x_i = \frac{1}{2\lambda_i}$. В частности, стандартная метрика будет эйнштейновой.

Далее, будем считать, что $A>0$. Без ограничения общности можно считать также, что $d_1 \leq d_2 \leq d_3$. Пусть $\alpha_i = d_i/A$. Тогда $2 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3$ согласно лемме 1.

Лемма 4. *Пусть $\alpha_1 = 2$. Тогда необходимо $\alpha_2=\alpha_3$, и G/H допускает однородную метрику Эйнштейна.*

Доказательство. Поскольку $\alpha_1=2$, по лемме 1 $[h,p_1]=0$ и $d_1=\dim p_1 = 1$ в силу неприводимости модуля p_1. Допустим, что $\alpha_2<\alpha_3$, т. е. $d_2<d_3$. Пусть $q=e_1^1$. Образ оператора $\mathrm{ad}_q : p_2 \mapsto p_3$ не покрывает всего p_3. Пусть s — ортонормированное дополнение в p_3 к $\mathrm{Im}(\mathrm{ad}_q)$ относительно $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Ввиду биинвариантности $\langle\cdot,\cdot\rangle$ имеем $[s,p_2]=0$. Пусть теперь модуль $\tilde{p}\subset p_3$ таков, что

для каждого $x \in \tilde{p}$ выполняется равенство $[x, p_2] = 0$. Так как $s \subset \tilde{p}$, то $\tilde{p} \neq 0$. Покажем, что модуль $\tilde{p}$ ad_h-инвариантен. Пусть $t \in h$, $x \in \tilde{p}$, $y \in p_2$. Согласно тождеству Якоби

$$[t, [y, x]] + [y, [x, t]] + [x, [t, y]] = 0.$$

Поскольку $[y, x] \in p_1$, а $[t, y] \in p_2$, то $[y, [x, t]] = 0$ для любых t, x, y. Значит, $[p_2, [h, \tilde{p}]] = 0$, т. е. $[h, \tilde{p}] \subset \tilde{p}$. Так как p_3 — неприводимый модуль, а $\tilde{p} \neq 0$, то $\tilde{p} = p_3$ и $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \end{bmatrix} = 0$, что мы исключили. Таким образом, $\alpha_2 = \alpha_3$. Пусть $\alpha = \alpha_2 = \alpha_3$. В силу леммы 2

$$r_1 = \frac{1}{2x_1} + \frac{1}{4}\left(\frac{x_1}{x_2x_3} - \frac{x_3}{x_1x_2} - \frac{x_2}{x_1x_3}\right),$$

$$r_2 = \frac{1}{2x_2} + \frac{1}{2\alpha}\left(\frac{x_2}{x_1x_3} - \frac{x_1}{x_2x_3} - \frac{x_3}{x_2x_1}\right),$$

$$r_3 = \frac{1}{2x_3} + \frac{1}{2\alpha}\left(\frac{x_3}{x_1x_2} - \frac{x_1}{x_2x_3} - \frac{x_2}{x_3x_1}\right).$$

Найдем решение вышеприведенной системы уравнений при $(r_1, r_2, r_3) = (1, 1, 1)$. Пусть $x_1 = v$, $x_2 = x_3 = w$. Тогда

$$\frac{1}{2v} + \frac{1}{4}\left(\frac{v}{w^2} - \frac{2}{v}\right) = 1, \quad \frac{1}{2w} + \frac{1}{2\alpha}\left(-\frac{v}{w^2}\right) = 1.$$

Значит, достаточно положить $v = 4w^2$ и $\frac{1}{2w} = 1 + \frac{2}{\alpha}$, т. е.

$$w = \frac{\alpha}{2(\alpha + 2)}, \quad v = \frac{\alpha^2}{(\alpha + 2)^2}.$$

Таким образом, при

$$x_1 = \frac{\alpha^2}{(\alpha + 2)^2}, \quad x_2 = x_3 = \frac{\alpha}{2(\alpha + 2)}$$

мы получили $r_1 = r_2 = r_3 = 1$, что и требовалось.

Лемма 5. *Пусть $\alpha_i > 2$ для $i \in \{1, 2, 3\}$, тогда система уравнений*

$$y_1(\alpha_2y_3 + \alpha_3y_2 - 2y_1) = \lambda_1,$$
$$y_2(\alpha_3y_1 + \alpha_1y_3 - 2y_2) = \lambda_2,$$
$$y_3(\alpha_1y_2 + \alpha_2y_1 - 2y_3) = \lambda_3$$

имеет положительное решение y_i при любых $\lambda_i > 0$.

Доказательство. Левые части уравнений системы представляют собой однородные многочлены степени 2 относительно y_i. Поэтому достаточно показать разрешимость системы с правой частью $(t\lambda_1, t\lambda_2, t\lambda_3)$ для некоторого t. Можно заведомо быть уверенным в том, что $t > 0$, поскольку

$$t\left(\frac{\lambda_1}{y_1} + \frac{\lambda_2}{y_2} + \frac{\lambda_3}{y_3}\right) = (\alpha_2y_3 + \alpha_3y_2 - 2y_1) + (\alpha_3y_1 + \alpha_1y_3 - 2y_2) + (\alpha_1y_2 + \alpha_2y_1 - 2y_3)$$
$$= (\alpha_3 + \alpha_2 - 2)y_1 + (\alpha_1 + \alpha_3 - 2)y_2 + (\alpha_1 + \alpha_2 - 2)y_3 > 0.$$

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^3$ с естественной ориентацией точки $A_1 = (1,0,0)$, $A_2 = (0,1,0)$, $A_3 = (0,0,1)$ и треугольник Δ с вершинами в этих точках. Пусть $F : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ определена следующим образом:

$$F(y_1,y_2,y_3) = (y_1(\alpha_2 y_3+\alpha_3 y_2-2y_1), y_2(\alpha_3 y_1+\alpha_1 y_3-2y_2), y_3(\alpha_1 y_2+\alpha_2 y_1-2y_3)).$$

Рассмотрим ориентированную прямую $L = \{(t\lambda_1, t\lambda_2, t\lambda_3) | t \in \mathbb{R}\}$. Покажем, что $F(\operatorname{int}\Delta) \cap L \neq \varnothing$, откуда будет следовать утверждение леммы. Рассмотрим ориентированные кривые $\gamma_1 = \{(1-t,t,0)\}$, $\gamma_2 = \{(0,1-t,t)\}$, $\gamma_3 = \{(t,0,1-t)\}$, где $0 \le t \le 1$. Тогда кривая $\gamma = \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3$ является ориентированной границей треугольника Δ. Покажем, что коэффициент зацепления K кривых $F(\gamma)$ и L отличен от 0, $K(F(\gamma),L) \neq 0$. Отсюда в силу односвязности Δ получим, что $F(\operatorname{int}\Delta) \cap L \neq \varnothing$.

Определим точки B_i следующим образом: $B_1 = F(A_1) = (-2,0,0)$, $B_2 = F(A_2) = (0,-2,0)$, $B_3 = F(A_3) = (0,0,-2)$. Пусть T — треугольник $B_1B_2B_3$. Положим $\phi_1 = \{-2(1-t,t,0)\}$, $\phi_2 = \{-2(0,1-t,t)\}$, $\phi_3 = \{(-2t,0,1-t)\}$, где $0 \le t \le 1$, $\phi = \phi_1+\phi_2+\phi_3$ — ориентированная граница треугольника T. Очевидно, что $K(\phi, L) = 1$. Подсчитаем коэффициенты зацепления кривых $F(\gamma_i) - \phi_i$ и L:

$$F(\gamma_1) = \{((1-t)(\alpha_3 t - 2(1-t)), t(\alpha_3(1-t)-2t), 0)\},$$
$$F(\gamma_2) = \{(0,(1-t)(\alpha_1 t - 2(1-t)), t(\alpha_1(1-t)-2t))\},$$
$$F(\gamma_3) = \{(t(\alpha_2(1-t)-2t), 0, (1-t)(\alpha_2 t - 2(1-t))\}.$$

Поскольку кривая $F(\gamma_i) - \phi_i$ лежит в плоскости $x_j = 0$, где $i+2 \equiv j (\operatorname{mod} 3)$, то $K(F(\gamma_i)-\phi_i, L)$ — коэффициент зацепления кривой $F(\gamma_i)-\phi_i$ относительно начала координат в плоскости $x_j = 0$. Кривая $F(\gamma_i)$ пересекает ось x_i в точке C_i при значении параметра $t = \frac{2}{2+\alpha_j}$. Легко убедиться в том, что ненулевая координата точки C_i равна

$$\frac{2}{2+\alpha_j}\left(\frac{\alpha_j^2-4}{2+\alpha_j}\right),$$

причем $\alpha_j^2 - 4 > 0$ в силу условия леммы. Поэтому $K(F(\gamma_i)-\phi_i, L) = -1$ для всех i. Таким образом,

$$K(F(\gamma),L) = K(F(\gamma)-\phi, L) + K(\phi, L) = -3+1 = -2 \neq 0,$$

что и доказывает лемму.

Доказательство теоремы. Согласно леммам 3, 4 теорема верна при $A = 0$ и при $\alpha_1 = 2$. Пусть $\alpha_i > 2$ при всех i. По лемме 2

$$2\alpha_i r_i = \frac{\alpha_i}{x_i} + \left(\frac{x_i}{x_j x_k} - \frac{x_k}{x_i x_j} - \frac{x_j}{x_i x_k}\right)$$

для $i \neq j \neq k \neq i$. Сделаем замену переменных $\sqrt{x_i x_j^{-1} x_k^{-1}} = y_i$. Тогда вышеприведенные уравнения перепишутся в виде

$$2\alpha_i r_i = \alpha_i y_j y_k + y_i^2 - y_j^2 - y_k^2,$$

$i \neq j \neq k \neq i$. Найдем решение системы этих уравнений в положительных числах y_i для $r_1 = r_2 = r_3 = 1$. Складывая попарно уравнения при различных i, получаем эквивалентную систему

$$y_1(\alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_2 - 2y_1) = 2(\alpha_2+\alpha_3),$$
$$y_2(\alpha_3 y_1 + \alpha_1 y_3 - 2y_2) = 2(\alpha_1+\alpha_3),$$
$$y_3(\alpha_1 y_2 + \alpha_2 y_1 - 2y_3) = 2(\alpha_1+\alpha_2),$$

которая имеет нужное нам решение с учетом леммы 5. Таким образом, найдется метрика $(\cdot,\cdot)$, для которой $r_1 = r_2 = r_3 = 1$. Теорема доказана.

В качестве примеров однородных пространств, которые согласно доказанной теореме допускают однородную метрику Эйнштейна, можно рассмотреть прямое произведение трех изотропно неприводимых пространств (лемма 3) или группу $SU(2)$ (лемма 4). Более интересными примерами являются пространства, сконструированные с помощью ортогональных и симплектических групп.

Пример 1. Пусть $H = SO(a) \times SO(b) \times SO(c)$ с естественным вложением в $G = SO(a+b+c)$. Пространство G/H удовлетворяет условиям теоремы, следовательно, допускает однородную эйнштейнову метрику.

Пример 2. Аналогично предыдущему можно рассмотреть $H = Sp(a) \times Sp(b) \times Sp(c)$ с естественным вложением в $G = Sp(a+b+c)$. Пространство G/H допускает однородную метрику Эйнштейна по доказанной теореме.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бессе А. Л.* Многообразия Эйнштейна. М.: Мир, 1990.

Статья поступила 6 июня 1998 г.

г. Рубцовск Алтайского края