МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 38, № 1 (1985)

ВЗАИМНОЕ ИЗМЕНЕНИЕ НАЧАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

А. Ю. Васильев

Обозначим через S_k^M класс всех голоморфных однолистных в единичном круге $E = \{z: |z| < 1\}$ функций $f(z) = z + a_{k+1}z^{k+1} + a_{2k+1}z^{2k+1} + \ldots$, удовлетворяющих в E условию $|f(z)| < M$, $S_1^M = S^M$, $S_1^\infty = S$.

Вопрос о взаимном изменении начальных коэффициентов в различных классах однолистных функций изучался многими авторами. Так, впервые И. Е. Базилевич [1] изучил взаимное изменение $|a_{k+1}|$, $|a_{2k+1}|$ в классе S_k^∞, а затем в [2] — взаимное изменение $\operatorname{Re} a_{k+1}$, $\operatorname{Re} a_{2k+1}$ в классе S_k^M при дополнительных условиях $\operatorname{Im} a_{k+1} = \operatorname{Im} a_{2k+1} = 0$. Шеффер и Спенсер [3] исследовали взаимное изменение a_2, a_3 в классе S. Хажинский и Яновский [4] нашли область взаимного изменения a_2, a_3 в классе S^M. Многие из этих результатов обобщались в работах Тамми [5, 6].

В настоящей работе методами оптимального управления найдены множества значений систем функционалов $I_1(f) = (\operatorname{Re} a_{k+1}, \operatorname{Im} a_{k+1}, \operatorname{Re} a_{2k+1})$ и $J_2(f) = (\operatorname{Re} a_{k+1}, \operatorname{Re} a_{2k+1})$ в классе S_k^M, а также в более общем классе $S_k^M(\alpha, \gamma)$, введенном ниже, $0 \leqslant \alpha < 1$, $0 \leqslant \gamma \leqslant 1/(1-\alpha)$, $S_k^M(0, 0) = S_k^M$. Классы $S_k^M(\alpha, \gamma)$ при различных значениях параметров совпадают с классами функций, введенных В. Я. Гутлянским [7].

Пусть C — класс всех голоморфных в круге E функций $p(z)$, $p(z) = 1 + p_1z + p_2z^2 + \ldots$, удовлетворяю-

Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической литературы.
«Математические заметки», 1985

щих в E условию $\operatorname{Re} p(z) > 0$. Обозначим через $C(\alpha, \gamma)$, $0 \leqslant \alpha < 1$, $0 \leqslant \gamma \leqslant 1/(1-\alpha)$, класс всех функций $h(z)$, $h(z) = 1 + h_1 z + h_2 z^2 + \ldots$, таких, что

$$h(z) = \frac{1-\gamma}{(1-\alpha)\,p(z) + \alpha} + \gamma, \quad p(z) \in C. \tag{1}$$

Зафиксируем M, $1 < M < \infty$. Пусть $C(\alpha, \gamma, t)$ — класс всех функций $h(z, t)$, определенных на множестве $E \times [0, \ln M]$, удовлетворяющих условию $h(\cdot, t) \in C(\alpha, \gamma)$ для почти всех $t \in [0, \ln M]$; $h(w, \cdot)$ измерима на $[0, \ln M]$, $w \in E$. Обозначим через $S_k^M(\alpha, \gamma)$ класс функций $f \in S_k^M$, которые можно представить в виде $f(z) = M \cdot f(z, \ln M, h)$, $h \in C(\alpha, \gamma, t)$, где $f(z, t, h)$ — решение дифференциального уравнения

$$\frac{dw}{dt} = -w \cdot h(w^k, t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \ln M, \tag{2}$$

с начальным условием $w|_{t=0} = z$, $z \in E$. $S_1^\infty(\alpha, 0) = S_\alpha$, $S_1^\infty(0, \alpha) = S_{(\alpha)}$, $S_1^\infty(Q/(1+Q), Q) = S(Q)$, $Q > 1$, где S_α, $S_{(\alpha)}$, $S(Q)$ — классы функций, введенные В. Я. Гутлянским [7].

Пусть $0 \leqslant \alpha \leqslant 2/3$, $0 \leqslant \gamma \leqslant 1/(1-\alpha)$, $\xi^2 + \eta^2 \leqslant 4(1-\alpha)^2(1-\gamma)^2$, τ_0 — единственный на $[-\pi/2, \pi/2]$ корень уравнения

$$-\frac{\alpha|\xi|}{(1-\alpha)(1-\gamma)}\sin\tau + \frac{\eta}{1-\gamma}|\cos\tau| - 2(1-2\alpha)\,e^{-tk}\sin\tau\cdot|\cos\tau| = 0;$$

$$R(\xi, \eta) = -\int_0^{\ln M} u_{10}(t)\,e^{-tk}\,dt,$$

$$J(\xi, \eta) = -\int_0^{\ln M} u_{20}(t)\,e^{-tk}\,dt;$$

$$\Phi_1(\xi, \eta) = \frac{k+1}{2}[R^2(\xi, \eta) - J^2(\xi, \eta)] - \int_0^{\ln M}\left(2(1-\alpha)(1-\gamma) - \frac{u_{20}^2(t)}{1-\gamma} - \frac{\alpha u_{10}^2(t)}{(1-\alpha)(1-\gamma)}\right)e^{-2tk}\,dt;$$

$$\Phi_2(\xi, \eta) = \frac{k+1}{2}[R^2(\xi, \eta) - J^2(\xi, \eta)] + \int_0^{\ln M}\left(2(1-\alpha)(1-\gamma) - \frac{u_{10}^2(t)}{1-\gamma} - \frac{\alpha u_{20}^2(t)}{(1-\alpha)(1-\gamma)}\right)e^{-2tk}\,dt;$$

$$\Phi_3(\xi, \eta) = \frac{k+1}{2}[\xi^2 - \eta^2]\ln^2 M -$$

$$- \frac{1}{k}\left[(1-\alpha)(1-\gamma)\left(1 - \frac{1}{M^2}\right) + \frac{\xi^2 \ln M}{1-\gamma} + \frac{\alpha\eta^2 \ln M}{(1-\alpha)(1-\gamma)}\right];$$

$$\Phi_4(\xi, \eta) = \frac{k+1}{2}[\xi^2 - \eta^2]\ln^2 M +$$

$$+ \frac{1}{k}\left[(1-\alpha)(1-\gamma)\left(1 - \frac{1}{M^2}\right) - \frac{\alpha\xi^2 \ln M}{(1-\alpha)(1-\gamma)} - \frac{\eta^2 \ln M}{1-\gamma}\right];$$

$$u_{10}(t) = 2(1-\alpha)(1-\gamma)\sin\tau_0,$$

$$u_{20}(t) = 2(1-\alpha)(1-\gamma)\cos\tau_0.$$

ТЕОРЕМА 1. *Множество D_1 значений системы функционалов $I_1(f) = (\operatorname{Re} a_{k+1}, \operatorname{Im} a_{k+1}, \operatorname{Re} a_{2k+1})$ на классе $S_k^M(\alpha, \gamma)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 2/3$, $0 \leqslant \gamma \leqslant 1/(1-\alpha)$, в параметрической форме определяется следующими условиями.*

Пусть $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$. Если $\xi^2 + \eta^2 \leqslant 4(1-\alpha)^2(1-\gamma)^2/M^2$, то

$$\operatorname{Re} a_{k+1} = \xi \ln M, \tag{3}$$

$$\operatorname{Im} a_{k+1} = \eta \ln M, \tag{4}$$

$$\Phi_3(\xi, \eta) \leqslant \operatorname{Re} a_{2k+1} \leqslant \Phi_4(\xi, \eta). \tag{5}$$

Если $4(1-\alpha)^2(1-\gamma)^2/M^2 \leqslant \xi^2 + \eta^2 \leqslant 4(1-\alpha)^2 \cdot (1-\gamma)^2$, то

$$\operatorname{Re} a_{k+1} = R(\xi, \eta), \tag{6}$$

$$\operatorname{Im} a_{k+1} = I(\xi, \eta), \tag{7}$$

$$\Phi_1(\xi, \eta) \leqslant \operatorname{Re} a_{2k+1} \leqslant \Phi_2(\xi, \eta). \tag{8}$$

Пусть $1 \leqslant \gamma \leqslant 1/(1-\alpha)$. Если $\xi^2 + \eta^2 \leqslant 4(1-\alpha)^2 \cdot (1-\gamma)^2/M^2$, то

$$\operatorname{Re} a_{k+1} = \xi \ln M, \tag{9}$$

$$\operatorname{Im} a_{k+1} = \eta \ln M, \tag{10}$$

$$\Phi_4(\xi, \eta) \leqslant \operatorname{Re} a_{2k+1} \leqslant \Phi_3(\xi, \eta). \tag{11}$$

Если $4(1-\alpha)^2(1-\gamma)^2/M^2 \leqslant \xi^2 + \eta^2 \leqslant 4(1-\alpha)^2 \cdot (1-\gamma)^2$, то

$$\operatorname{Re} a_{k+1} = R(\xi, \eta), \tag{12}$$

$$\operatorname{Im} a_{k+1} = I(\xi, \eta), \tag{13}$$

$$\Phi_2(\xi, \eta) \leqslant \operatorname{Re} a_{2k+1} \leqslant \Phi_1(\xi, \eta). \tag{14}$$

Доказательство. Из (2) для $\operatorname{Re} a_{k+1}$, $\operatorname{Im} a_{k+1}$, $\operatorname{Re} a_{2k+1}$ получим уравнения

$$\operatorname{Re} a_{k+1} = -\int_0^{\ln M} e^{-tk} \operatorname{Re} h_1(t)\, dt, \tag{15}$$

$$\operatorname{Im} a_{k+1} = -\int_0^{\ln M} e^{-tk} \operatorname{Im} h_1(t)\, dt, \tag{16}$$

$$\operatorname{Re} a_{2k+1} = -\int_0^{\ln M} \Big[(k+1) e^{-tk} \operatorname{Re} h_1(t) \int_0^t e^{-\theta k} \operatorname{Re} h_1(\theta)\, d\theta -$$

$$- (k+1) e^{-tk} \operatorname{Im} h_1(t) \int_0^t e^{-\theta k} \operatorname{Im} h_1(\theta)\, d\theta + e^{-2tk} \operatorname{Re} h_2(t) \Big] dt =$$

$$= \frac{k+1}{2} (\operatorname{Re} a_{k+1})^2 - \frac{k+1}{2} (\operatorname{Im} a_{k+1})^2 - \int_0^{\ln M} e^{-2tk} \operatorname{Re} h_2(t)\, dt. \tag{17}$$

Из (1) легко получается оценка для h_1:

$$|h_1| \leqslant 2(1-\alpha)\,|1-\gamma|. \tag{18}$$

Пусть $q(z)$ — произвольная функция класса C. С помощью формулы из [8]

$$p(z) = \frac{(2+\bar{p}_1 + z(2+p_1))\, q(z) + 2 - \bar{p}_1 + z(p_1-2)}{(2+\bar{p}_1 - z(2+p_1))\, q(z) + 2 - \bar{p}_1 - z(p_1-2)} \tag{19}$$

устанавливается взаимно однозначное соответствие между классом C и классом C_{p_1} функций $p \in C$ с фиксированным коэффициентом $p_1 = p'(0)$. Пользуясь равенствами (1) и (19), получим

$$\max_{h \in C(\alpha, \gamma)} \operatorname{Re} h_2 =$$

$$= \begin{cases} 2(1-\alpha)(1-\gamma) - \dfrac{(\operatorname{Re} h_1)^2 \cdot \alpha}{(1-\alpha)(1-\gamma)} - \dfrac{(\operatorname{Im} h_1)^2}{1-\gamma}, & 0 \leqslant \gamma \leqslant 1, \\ -2(1-\alpha)(1-\gamma) + \dfrac{(\operatorname{Im} h_1)^2 \cdot \alpha}{(1-\alpha)(1-\gamma)} + \dfrac{(\operatorname{Re} h_1)^2}{1-\gamma}, & \\ & 1 \leqslant \gamma \leqslant 1/(1-\alpha), \end{cases} \tag{20}$$

$$\min_{h \in C(\alpha, \gamma)} \operatorname{Re} h_2 =$$

$$= \begin{cases} -2(1-\alpha)(1-\gamma) + \dfrac{(\operatorname{Im} h_1)^2\, \alpha}{(1-\alpha)(1-\gamma)} + \dfrac{(\operatorname{Re} h_1)^2}{1-\gamma}, & 0 \leqslant \gamma \leqslant 1, \\ 2(1-\alpha)(1-\gamma) - \dfrac{(\operatorname{Re} h_1)^2\, \alpha}{(1-\alpha)(1-\gamma)} - \dfrac{(\operatorname{Im} h_1)^2}{1-\gamma}, & \\ & 1 \leqslant \gamma \leqslant 1/(1-\alpha). \end{cases} \tag{21}$$

Формулы (18), (20), (21) описывают границу области G взаимного изменения $\operatorname{Re} h_1$, $\operatorname{Im} h_1$, $\operatorname{Re} h_2$, где h_1, h_2 — начальные коэффициенты функций $h \in C(\alpha, \gamma)$.

Пусть сначала $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$, $\alpha \neq 0$. Для отыскания множества значений системы функционалов $I_1(f)$ будем решать задачу об экстремуме $\operatorname{Re} a_{2k+1}$ при фиксированном a_{k+1}. Начнем с задачи на $\min \operatorname{Re} a_{2k+1}(a_{k+1})$ по всем $f \in S_k^M(\alpha, \gamma)$. Сформулируем ее как задачу оптимального управления. Пусть $\operatorname{Re} h_1(t) = u_1(t)$, $\operatorname{Im} h_1(t) = u_2(t)$, $\operatorname{Re} h_2(t) = u_3(t)$, $(u_1(t), u_2(t), u_3(t)) \in G$,

$$x_1(t) = -\int_0^t e^{-tk} u_1(t)\,dt,$$

$$x_2(t) = -\int_0^t e^{-tk} u_2(t)\,dt,$$

$$x_3(t) = -\int_0^t [(k+1)u_1(t)x_1(t)e^{-tk} - (k+1)u_2(t)x_2(t)e^{-tk} + u_3(t)e^{-2tk}]\,dt.$$

Два последних равенства можно записать в виде дифференциальных уравнений связи

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -u_1(t)e^{-tk} = f_1, \quad x_1(0) = 0, \tag{22}$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -u_2(t)e^{-tk} = f_2, \quad x_2(0) = 0, \tag{23}$$

$$\frac{dx_3(t)}{dt} = -(k+1)u_1(t)x_1(t)e^{-tk} + (k+1)u_2(t)x_2(t)e^{-tk} + u_3(t)e^{-2tk} = f_3, \quad x_3(0) = 0. \tag{24}$$

Найдем минимум

$$\operatorname{Re} a_{2k+1} = -\int_0^{\ln M} [(k+1)u_1(t)x_1(t)e^{-tk} - (k+1)u_2(t)x_2(t)e^{-tk} + u_3(t)e^{-2tk}]\,dt = \int_0^{\ln M} f_0\,dt \tag{25}$$

при наличии дифференциальных уравнений связи (22), (23), (24) и изопериметрических условий $x_1(\ln M) = \operatorname{Re} a_{k+1}$, $x_2(\ln M) = \operatorname{Im} a_{k+1}$, $|a_{k+1}| \leqslant 2(1-\alpha)\cdot(1-\gamma)(1-1/M)$, где $u = (u_1(t), u_2(t), u_3(t)) \in G$ — измеримое управление.

Компактность класса $S_k^M(\alpha, \gamma)$, на котором рассматривается экстремальная задача, гарантирует существование экстремальной функции f, что, в свою очередь, обеспечивает существование оптимального управления u.

Оптимальное управление u удовлетворяет принципу максимума Л. С. Понтрягина [9], т. е. при почти всех $t \in [0, \ln M]$ доставляет максимум функции

$$H(t, u, \psi_1, \psi_2, \psi_3) = c_0 f_0 + \psi_1 f_1 + \psi_2 f_2 + \psi_3 f_3, \quad c_0 \leqslant 0, \tag{26}$$

где функции ψ_1, ψ_2, ψ_3 являются решением сопряженной гамильтоновой системы. Для них получаем равенства $\psi_1(t) = -c_0(k+1)x_1(t) + s$, $\psi_2(t) = c_0(k+1)x_2(t) + r$, $\psi_3(t) = c$, $c = \text{const}$. Условие трансверсальности на правом конце приводит к равенству $\psi_3(\ln M) = 0$, откуда следует, что $\psi_3(t) \equiv 0$. Подставим ψ_1, ψ_2, ψ_3 в (26). Условие максимальности $H(t, u, \psi_1, \psi_2, \psi_3)$ при $c_0 = 0$ приводит к условию

$$u_1(t) = \frac{2s(1-\alpha)(1-\gamma)}{\sqrt{s^2+r^2}}, \quad u_2(t) = \frac{2r(1-\alpha)(1-\gamma)}{\sqrt{s^2+r^2}}.$$

Если $c_0 < 0$, то можно положить $c_0 = -1$. Тогда формула (26) запишется в следующем виде:

$$H(t, u, \psi_1, \psi_2, \psi_3) = e^{-tk}u_1(t)((k+1)x_1(t) - \psi_1(t)) - e^{-tk}u_2(t)((k+1)x_2(t) + \psi_2(t)) + e^{-2tk}u_3(t).$$

Учитывая знак перед $u_3(t)$, по формуле (20) найдем

$$\max_{u_3 : u \in G} H(t, u, \psi_1, \psi_2, \psi_3) =$$

$$= e^{-tk}u_1(t)((k+1)x_1(t) - \psi_1(t)) - e^{-tk}u_2(t)((k+1)x_2(t) + \psi_2(t)) + 2e^{-2tk}(1-\alpha)(1-\gamma) - e^{-2tk}\frac{u_2^2(t)}{1-\gamma} - e^{-2tk}\frac{\alpha u_1^2(t)}{(1-\alpha)(1-\gamma)} = H_1(t, u, \psi_1, \psi_2, \psi_3).$$

Таким образом, условие максимальности $H_1(t, u, \psi_1, \psi_2, \psi_3)$ приводит к условию

$$u_1(t) = \begin{cases} -\xi e^{tk}, & 0 \leqslant t \leqslant \ln \dfrac{2(1-\alpha)(1-\gamma)}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}, \\ u_{10}(t), & t \geqslant \ln \dfrac{2(1-\alpha)(1-\gamma)}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}, \end{cases} \qquad \xi = \frac{(1-\alpha)(1-\gamma)}{2\alpha}s, \tag{27}$$

$$u_2(t) = \begin{cases} -\eta e^{tk}, & 0 \leqslant t \leqslant \ln \dfrac{2(1-\alpha)(1-\gamma)}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}, \\ u_{20}(t), & t \geqslant \ln \dfrac{2(1-\alpha)(1-\gamma)}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}, \end{cases} \qquad \eta = \frac{1-\gamma}{2} r,$$

$$\xi^2 + \eta^2 \leqslant 4(1-\alpha)^2(1-\gamma)^2,$$

с переключателем $t = \ln \dfrac{2(1-\alpha)(1-\gamma)}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}$. Функции $u_{10}(t)$, $u_{20}(t)$, $u_{10}^2(t) + u_{20}^2(t) = 4(1-\alpha)^2(1-\gamma)^2$, доставляют абсолютный максимум функции $H_1(t, u, \psi_1, \psi_2, \psi_3)$.

Учитывая, что $t \leqslant \ln M$, окончательно получаем, что каждому выбору параметров ξ, η соответствует единственное управление $u = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$, которое удовлетворяет принципу максимума Л. С. Понтрягина. Подставляя (27) в (15) и (16), получаем выражения (3), (4), (6), (7), а подставляя (27) в (17), получаем левые неравенства в (5) и (8). Убеждаясь, что каждой точке a_{k+1} соответствует единственная точка (ξ, η), $\xi^2 + \eta^2 \leqslant 4(1-\alpha)^2(1-\gamma)^2$, получаем, что найденное управление оптимальное.

Перейдем к задаче на $\min \operatorname{Re} a_{2k+1}$ (a_{k+1}) по всем $f \in S_k^M(\alpha, \gamma)$. Сформулируем ее как задачу оптимального управления. Найти максимум (25) при наличии дифференциальных уравнений связи (22), (23), (24) и изопериметрических условий $x_1(\ln M) = \operatorname{Re} a_{k+1}$, $x_2(\ln M) = \operatorname{Im} a_{k+1}$, $|a_{k+1}| \leqslant 2(1-\alpha)(1-\gamma)(1-1/M)$, где $u = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$ — измеримое управление. Существование оптимального управления, как и прежде, гарантируется компактностью класса $S_k^M(\alpha, \gamma)$. Оптимальное управление u доставляет максимум функции

$$F(t, u, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = -c_0 f_0 + \varphi_1 f_1 + \varphi_2 f_2 + \varphi_3 f_3, \; c_0 \leqslant 0, \tag{28}$$

где функции φ_1, φ_2, φ_3 являются решением сопряженной гамильтоновой системы. Для них получаются равенства $\varphi_1(t) = c_0(k+1)x_1(t) + m$, $\varphi_2(t) = -c_0(k+1)x_2(t) + n$, $\varphi_3(t) = C$, $C = \text{const}$. Из условия трансверсальности на правом конце имеем $\varphi_3(\ln M) = 0$, откуда следует, что $\varphi_3(t) \equiv 0$. Подставим φ_1, φ_2, φ_3 в (28). Условие максимальности $F(t, u, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ при $c_0 = 0$ приводит

к условию

$$u_1(t) = \frac{2m(1-\alpha)(1-\gamma)}{\sqrt{m^2+n^2}}, \quad u_2(t) = \frac{2n(1-\alpha)(u-\gamma)}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

Если $c_0 < 0$, то можно положить $c_0 = -1$. Тогда формула (28) запишется в следующем виде:

$$F(t, u, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = e^{-tk}u_1(t)((k+1)x_1(t) - \varphi_1(t)) - e^{-tk}u_2(t)((k+1)x_2(t) + \varphi_2(t)) - u_3(t)e^{-2tk}.$$

Учитывая знак перед $u_3(t)$, по формуле (21) запишем

$$\max_{u_3 : u \in G} F(t, u, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = e^{-tk}u_1(t)((k+1)x_1(t) - \varphi_1(t)) - e^{-tk}u_2(t)((k+1)x_2(t) + \varphi_2(t)) + 2e^{-2tk}(1-\alpha)(1-\gamma) - e^{-2tk}\frac{\alpha u_2^2(t)}{(1-\alpha)(1-\gamma)} - e^{-2tk}\frac{u_1^2(t)}{1-\gamma} = F_1(t, u, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3).$$

Таким образом, условие максимальности $F_1(t, u, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ приводит к условию

$$u_1(t) = \begin{cases} -\xi e^{tk}, & 0 \leqslant t \leqslant \ln\dfrac{2(1-\alpha)(1-\gamma)}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}, \\ u_{10}(t), & t \geqslant \ln\dfrac{2(1-\alpha)(1-\gamma)}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}, \end{cases} \quad \xi = \frac{1-\gamma}{2}m, \tag{29}$$

$$u_2(t) = \begin{cases} -\eta e^{tk}, & 0 \leqslant t \leqslant \ln\dfrac{2(1-\alpha)(1-\gamma)}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}, \\ u_{20}(t), & t \geqslant \ln\dfrac{2(1-\alpha)(1-\gamma)}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}, \end{cases} \quad \eta = \frac{(1-\alpha)(1-\gamma)}{2\alpha}n,$$

$$\xi^2 + \eta^2 \leqslant 4(1-\alpha)^2(1-\gamma)^2,$$

с переключателем $t = \ln\dfrac{2(1-\alpha)(1-\gamma)}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}$. Функции $u_{10}(t)$, $u_{20}(t)$, $u_{10}^2(t) + u_{20}^2(t) = 4(1-\alpha)^2(1-\gamma)^2$, доставляют абсолютный максимум функции $F_1(t, u, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$.

Учитывая, что $t \leqslant \ln M$, окончательно убеждаемся, что каждому выбору параметров ξ, η соответствует единственное управление u, которое удовлетворяет принципу максимума Л. С. Понтрягина. Подставляя (29) в (15), (16), получаем выражения (3), (4), (6), (7), а подставляя (29) в (17), получаем правые неравенства в (5) и (8).

Убеждаясь, что каждой точке α_{k+1} соответствует единственная точка (ξ, η), $\xi^2 + \eta^2 \leqslant 4(1-\alpha)^2(1-\gamma^2)$, получаем, что найденное управление оптимальное.

Справедливость теоремы при $\alpha = 0$ следует из возможности перехода к пределу при $\alpha \to 0$, обоснованной в [10]. Проводя аналогичные рассуждения с формулами (20), (21) при $1 \leqslant \gamma \leqslant 1/(1-\alpha)$, получаем формулы (9) — (14). Этим завершается доказательство теоремы.

Ограничение $\alpha \leqslant 2/3$ возникает из-за неединственности при $\alpha \in (2/3, 1)$ представления u_{10}, u_{20} по формулам (27), (29).

Заменяя в доказательстве теоремы 1 граничное условие $x_2(\ln M) = \operatorname{Im} a_{k+1}$ условием трансверсальности на правом конце $\psi_2(\ln M) = 0$, получаем уравнение

$$\eta = -(k+1)\int_0^{\ln M} e^{-tk} u_2(t)\, dt, \tag{30}$$

где $u_2(t)$ задается по формуле (27). Пусть η_0 — единственный на

$$[-\sqrt{4(1-\alpha^2)(1-\gamma)^2 - \xi^2};\ \sqrt{4(1-\alpha)^2(1-\gamma)^2 - \xi^2}]$$

корень уравнения (30). Тогда справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. *Множество D_2 значений системы функционалов $I_2(f) = (\operatorname{Re} a_{k+1}, \operatorname{Re} a_2\xi_{2k+1})$ на классе $S_k^M(\alpha, \gamma)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 2/3$, $0 \leqslant \gamma \leqslant 1/(1-\alpha)$ в параметрической форме определяется следующими условиями.*

Пусть $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$. *Если* $\xi^2 + \eta_0^2 \leqslant 4(1-\alpha)^2(1-\gamma)^2/M^2$, *то*

$$\operatorname{Re} a_{k+1} = \xi \ln M,$$

$$\Phi_3(\xi, \eta_0) \leqslant \operatorname{Re} a_{2k+1} \leqslant \Phi_4(\xi, \eta_0).$$

Если $4(1-\alpha)^2(1-\gamma)^2/M^2 \leqslant \xi^2 + \eta_0^2 \leqslant 4(1-\alpha)^2(1-\gamma)^2$, *то*

$$\operatorname{Re} a_{k+1} = R(\xi, \eta_0),$$

$$\Phi_1(\xi, \eta_0) \leqslant \operatorname{Re} a_{2k+1} \leqslant \Phi_2(\xi, \eta_0).$$

Пусть $1 \leqslant \gamma \leqslant 1/(1-\beta)$. *Если* $\xi^2 + \eta_0^2 \leqslant 4(1-\alpha)^2(1-\gamma)^2/M$, *то*

$$\operatorname{Re} a_{k+1} = \xi \ln M, \qquad \Phi_4(\xi, \eta_0) \leqslant \operatorname{Re} a_{2k+1} \leqslant \Phi_3(\xi, \eta_0).$$

Если $4(1-\alpha)^2(1-\gamma)^2/M^2 \leqslant \xi^2+\eta_0^2 \leqslant 4(1-\alpha)^2(1-\gamma)^2$, *то*

$$\operatorname{Re} a_{k+1} = R(\xi, \eta_0),$$

$$\Phi_2(\xi, \eta_0) \leqslant \operatorname{Re} a_{2k+1} \leqslant \Phi_1(\xi, \eta_0).$$

Автор благодарит Д. В. Прохорова за постановку задачи и внимание к работе.

Саратовский государственный
университет им. Н. Г. Чернышевского

Поступило
05.03.84

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Базилевич И. Е. Zum Koeffizienten problem der schlichten Funktionen.— Мат. сб., 43, № 1, вып. 2 (1936), 221—228.
[2] Базилевич И. Е. Области начальных коэффициентов ограниченных однолистных функций с p-кратной симметрией.— Мат. сб., 1957, т. 43, с. 409—428.
[3] Schaeffer A. S., Spencer D. S. Coefficient regions of schlicht functions.— Amer. Math. Soc. Coll. Publ., 1950, v. 35, p. 1—311.
[4] Charzynski Z., Janowski W. Domain de variation des coefficients A_2 et A_3 des fonctions univalentes et bornées.— Bull. Soc. Sci. Lettres Lódź., Cl. 3, 1959, v. 10, № 4, p. 1—29.
[5] Tammi O. Extremum problems for bounded univalent functions.— Lecture Notes Math., 646.— Berlin: Springer-Verlag, 1978, S. 1—369.
[6] Tammi O. Extremum problems for bounded univalent functions, II.— Lecture Notes Math., 913.— Berlin: Springer-Verlag, 1982, S. 1—168.
[7] Гутлянский В. Я. Параметрические представления однолистных функций.— Докл. АН СССР, 1970, т. 194, № 4, с. 750—753.
[8] Pfaltzgraff J. A., Pinchuk B. A variation method for classes of meromorphic functions.— J. Analyse Math., 1971, v. 171, № 24, p. 101—150.
[9] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов.— М.: Наука, 1976.
[10] Горяйнов В. В. О некоторых свойствах решений уравнения Левнера — Куфарева.— Докл. АН УССР, Сер. А, 1978, № 3, с. 207—209.