А. А. Яковлева, Представление одного колчана с соотношениями, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 1995, том 227, 140–151

А. А. Яковлева

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОДНОГО КОЛЧАНА С СООТНОШЕНИЯМИ

Пусть Q_n – ориентированный граф (колчан) вида

$$
\begin{tikzcd}
\circ \arrow[r] \arrow[d] & \circ \arrow[d] & & & \\
\circ \arrow[r] & \circ \arrow[r] \arrow[d] & \circ \arrow[d] & & \\
& \circ \arrow[r] & \circ \arrow[r] \arrow[d] & {} & \\
& & {} & & \\
& & & \cdots\cdots & \\
& & & \circ \arrow[r] \arrow[d] & \circ \arrow[d] \\
& & & \circ \arrow[r] & \circ
\end{tikzcd},
$$

состоящий из n ромбов. Каждую вершину графа заменим векторным пространством над некоторым полем k, а каждую стрелку – линейным отображением соответствующих пространств. Набор пространств и линейных отображений называется представлением колчана Q_n, если получившаяся диаграмма коммутативна. Естественным образом определяются изоморфизм представлений, прямая сумма представления, неразложимые представления. Наша цель – описать с точностью до изоморфизма все неразложимые представления Q_n.

Как обычно, прямую сумму пространств мы обозначаем знаком $\oplus$ (например, $B \oplus C$). Градуировкой пространства A мы называем его представление в виде прямой суммы подпространств $A(0)$, $A(1), \ldots A(m)$. Пусть

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\
C \arrow[r] & D
\end{tikzcd}
$$

– представление одного ромба; мы говорим, что градуировки $A = A(0) \oplus A(1), \oplus \ldots \oplus A(m)$, $B = B(0) \oplus B(1), \oplus \ldots \oplus B(m)$, $C =$

$C(0) \oplus C(1), \oplus \ldots \oplus C(m)$, $D = D(0) \oplus D(1), \oplus \ldots \oplus D(m)$, согласованы с представлением, если оно раскладывается в прямую сумму представлений

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varepsilon} & Y \\ {\scriptstyle\nu}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\lambda} \\ Z & \xrightarrow[\mu]{} & U \end{array}$$

каждое из которых имеет один из пяти видов:

1) $X = A(s)$, $Y = B(s)$, $Z = C(s)$, $U = D(s)$, для некоторого s, $0 \leqslant s \leqslant m$, и каждое из отображений ε, λ, ν, μ, $\lambda\varepsilon = \mu\nu$ – либо изоморфизм, либо его начало или конец – нулевое пространство;

2) $X = A(s) \oplus A(t)$, $Y = B(s)$, $Z = C(s)$, $U = D(s) = 0$ $(0 \leqslant s < t \leqslant m)$, ограничение ε и ν на $A(s)$ и ограничение ε на $A(t)$ – изоморфизмы, $\nu(A(t)) = 0$;

3) $X = A(s) = 0$, $Y = B(s)$, $Z = C(s)$, $U = D(s) \oplus D(t)$ $(0 \leqslant s < t \leqslant m)$, λ – изоморфизм на $D(s)$, композиции μ и проекций на $D(s)$, $D(t)$ – изоморфизмы;

4) $X = A(s)$, $Y = B(s)$, $Z = C(s)$, $U = 0$, ε и ν – эпиморфизмы и X – прямая сумма $\ker \varepsilon$ и $\ker \nu$

5) $X = 0$, $Y = B(s)$, $Z = C(s)$, $U = D(s)$, λ и μ – мономорфизмы и U – прямая сумма $\operatorname{im} \lambda$ и $\operatorname{im} \mu$.

Ключом к классификации представлений колчана Q'_n служит следующая теорема.

Теорема 1. *Для любого представления колчана Q_n существуют градуировки всех составляющих представление пространств, которые одновременно согласованы с ограничениями представления на любой из n ромбов.*

Эта теорема в более общем виде была сформулирована в [1] (без доказательства); правда, там вместо пяти вариантов представлений одного ромба были лишь первые три, но это несущественно, так как хорошо известно, что при помощи результата из [2] (см. также [3]) последние два варианта могут быть сведены к трем другим.

С тех пор, несмотря на усилия нескольких математиков, ее доказательство опубликовано не было. В настоящей работе доказывается результат, непосредственно следующий из этой теоремы – теорема 4. Можно показать, хотя в данной работе это не сделано, что из теоремы 4, наоборот, следует теорема 1.

§ 1. Фильтрованные пространства

Пространство A вместе с выделенной в нем цепочкой подпространств $A = A^0 \supseteq A^1 \supseteq \ldots \supseteq A^m = 0$ называется фильтрованным пространством. Фильтрацию будем всегда считать бесконечной, полагая $A^s = 0$ при $s > m$. Фактопространства фильтрации A^i/A^{i+1} будем обозначать через ${}^iA$. Если $B = B^0 \supseteq B^1 \supseteq \ldots$ – еще одно фильтрованное пространство, то линейное отображение $\alpha : A \to B$ называется гомоморфизмом фильтрованных пространств, если $\alpha(A^i) \subseteq B^i$ для всех i, $1 \leqslant i < \infty$. Оно индуцирует для каждого i линейное отображение $\alpha^i : {}^iA \to {}^iB$.

Пусть $A = A^0 \supseteq A^1 \supseteq \ldots$ – фильтрованное пространство. Для каждого $s \geqslant 0$ существует (но, конечно, не единственное) подпространство $A(s)$ пространство A, такое что $A^s = A(s) \pm A^{s+1}$; ясно, что пространства ${}^sA$ и $A(s)$ всегда изоморфны. Пространство A раскладывается в прямую сумму $A(0) \oplus A(1) \oplus \ldots$; это разложение называется градуировкой фильтрованного пространства A. Гомоморфизм фильтрованных пространств $\alpha : A \to B$ называется допустимым, если градуировки $A(0) \oplus A(1) \oplus \ldots$, $B(0) \oplus B(1) \oplus \ldots$ фильтрованных пространств A, B можно выбрать так, что $\alpha(A(s)) \subseteq B(s)$ для всех s.

Если A – произвольное векторное пространство, то его можно превратить в фильтрованное пространство, положив $A^i = 0$ при $i \geqslant 1$, $A^0 = A$. Такая фильтрация называется тривиальной. Любое линейное отображение векторных пространств с тривиальной фильтрацией является гомоморфизмом (и даже допустимым) фильтрованных пространств.

Пусть A – фильтрованное пространство и пусть C' – подпространство пространства ${}^iA = A^i/A^{i+1}$; обозначим через C полный прообраз C' при естественном эпиморфизме $A \to A/A^{i+1}$, так что $A^i \supseteq C \supseteq A^{i+1}$. Введем на A новую фильтрацию, положив $A'^s = A^s$ при $s \leqslant i$, $A'^{i+1} = C$, $A'^s = A^{s-1}$ при $s \geqslant i+2$. Новую фильтрацию будем называть элементарным измельчением старой, отвеачающим подпространству $C' \overset{i}{\subseteq} A$.

Пусть $A \supseteq B \supseteq 0$, $C \supseteq D \supseteq 0$ – фильтрованные пространства, $\alpha : A \to C$ – их гомоморфизм, причем $\ker\alpha + B = \alpha^{-1}(D)$. Тогда существуют пространства A', $A'' \subseteq A$, такие что $A' \subseteq \ker\alpha$, $A = A'' \oplus \alpha^{-1}(D)$, $A' \oplus B = \ker\alpha + B = \alpha^{-1}(D)$. Положим $A_1 = A' \oplus A''$; тогда $\alpha(A_1) = \alpha(A'')$ пересекается с D лишь по нулевому элементу, ибо $\alpha^{-1}(D) \cap A'' = 0$ (их сумма прямая). Поэтому существует подпространство $C_1 \supseteq \alpha(A_1)$ пространства C, такое что $C = C_1 \oplus D$. Итак, $A = A_1 \oplus B$, $C = C_1 \oplus D$, $\alpha(A_1) \subseteq C_1$, $\alpha(B) \subseteq D$, а это значим, что α –допустимый гомоморфизм фильтрованных пространств.

Лемма 1. *Пусть $\alpha : A \to B$ – допустимый гомоморфизм фильтрованных пространств. Для того чтобы α оставался допустимым гомоморфизмом и для элементарных измельчений фильтраций пространств A, B, отвечающих подпространствам $A' \subseteq^s A$, $B' \subseteq^s B$, достаточно, чтобы выполнялось соотношение $\ker \alpha^s + A' = (\alpha^s)^{-1}(B')$. В частности, если $\alpha^s(A') \subseteq B'$, то для допустимости α достаточно, чтобы выполнялось любое из условий: 1. $A' = {}^sA$; 2. $A' = (\alpha^s)^{-1}(B')$; 3. $B' = 0$; 4. $B' = \alpha^s(A')$; 5. $\operatorname{im} \alpha^s \cap B' = 0$, $\alpha^s(A') = 0$; 6. $\ker \alpha^s + A' = {}^sA$, $\operatorname{im} \alpha^s \subseteq B'$.*

Доказательство. Пусть $\ker \alpha^s + A' = (\alpha^s)^{-1}(B')$ (что, в частности, выполнено в любом из случаев 1–6). Очевидно, достаточно доказать, что допустим гомоморфизм фильтрованных пространств $\alpha^s : {}^sA \to {}^sB$ с короткими фильтрациями ${}^sA \supseteq A' \supseteq 0$, ${}^sB \supseteq B' \supseteq 0$; но это сделано перед формулировкой леммы.

Замечание. Легко видеть, что это же условие и необходимо, но нам это не понадобится.

§ 2. Фильтрации представления колчана $\mathcal{Q}_n$

Всюду в дальнейшем мы фиксируем представление П

$$
\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r] \arrow[d] & B_1 \arrow[d] & & & \\
C_1 \arrow[r] & A_2 \arrow[r] \arrow[d] & B_2 \arrow[d] & & \\
& C_2 \arrow[r] & A_3 \arrow[r] \arrow[d] & {} & \\
& & {} & \cdots\cdots & \\
& & & A_n \arrow[r] \arrow[d] & B_n \arrow[d] \\
& & & C_n \arrow[r] & A_{n+1}
\end{tikzcd}
$$

колчана $\mathcal{Q}_n$. Через Σ_0 обозначим множество пространств A_i $(1 \leqslant i \leqslant n+1)$, через Σ_1 – множество пар (B_i, C_i) $1 \leqslant i \leqslant n)$, а через Σ – множество всех составляющих представление пространств. Если $E, F \in \Sigma$ и существует композиция нескольких (быть может, пустого множества) отображений диаграммы $\varepsilon : E \to F$, то в силу коммутативности она не зависит от пути из E в F; будем обозначать ее $\varepsilon(E,F)$, а множество всех отображений вида $\varepsilon(E,F)$ обознчим Δ. Будем говорить, что E лежит левее F, а F лежит правее E, если отображение $\varepsilon(E,F)$ входит в Δ (E лежит и левее, и правее самого себя для любого $E \in \Sigma$).

Фильтрацией Φ представления колчана Q_n будем называть набор фильтраций всех пространств $E \in \Sigma$, такой что все линейные отображения $\varepsilon \in \Delta$ – гомоморфизмы фильтрованных пространств. Это значит, что $\varepsilon(E^s) \subseteq F^s$ для любого $s \geqslant 0$ и любого $\varepsilon = \varepsilon(E,F) \in \Delta$. Если фильтрации всех пространств $E \in \Sigma$ тривиальны, то Φ называем тривиальной фильтрацией представления Φ.

Пусть Φ – фильтрация представления Π; предположим, что $s \geqslant 0$ и для всех пространств $E \in \Sigma$ выбраны подпространства $E' \subseteq^s E$, причем $\varepsilon^s(E') \subseteq F'$ для любого $\varepsilon = \varepsilon(E,F) \in \Delta$. Тогда соответствующие элементарные измельчения фильтраций пространств $E \in \Sigma$ составляют новую фильтрацию представления Π, которую мы будем называть элементарным измельчением фильтрации Φ; если при этом $E' \neq^s E$ хотя бы для одного $E \in \Sigma$ и $E' \neq 0$ хотя бы для одного $E \in \Sigma$, то это элементарное измельчение называем строгим. Измельчением фильтрации Φ называется любая фильтрация, полученная из Φ последовательным применением нескольких элементарных измельчений.

Пусть $A \in \Sigma_0$ и A' – подпространство ${}^sA$. Для каждого $E \in \Sigma$ следующим образом выберем подпространство $E' \subseteq {}^sE$: если E лежит левее A, то $E' = (\varepsilon^s(E,A))^{-1}(A')$; если E лежит правее A, то $E' = \varepsilon^s(A,E)(A')$. Подпространствам E' отвечает элементарное измельчение фильтрации представления; будем обозначать его $\Phi(s;A,A')$.

Аналогичное определение дадим для пары пространств $(B,C) \in \Sigma_1$. Пусть $B' \subseteq {}^sB$, $C' \subseteq {}^sC$ – такие подпространства, что если E лежит левее B и C, то $(\varepsilon^s(E,B))^{-1}(B') = (\varepsilon^s(E,C))^{-1}(C')$, а если E лежит правее B и C, то $\varepsilon^s(B,E)(B') = \varepsilon^s(C,E)(C')$; в первом случае мы положим $E' = (\varepsilon^s(E,B))^{-1}(B') = (\varepsilon^s(E,C))^{-1}(C')$, а во втором – $E' = \varepsilon^s(B,E)(B') = \varepsilon^s(C,E)(C')$. Подпространствам E', B', C' отвечает элементарное измельчение фильтрации представления, которое мы будем обозначать $\Phi(s;B,B',C,C')$.

Фильтрацию представления Π будем называть допустимой, если все $\varepsilon \in \Delta$ – допустимые гомоморфизмы фильтрованных пространств.

Лемма 2. *Пусть Φ – допустимая фильтрация представления Π. Тогда фильтрация $\Phi(s;A,A')$ допустима в каждом из следующих случа-*

ев: a) *для любого* $E \in \Sigma$, $E \neq A$, *лежащего левее* A, $\varepsilon^s(E, A)({}^sE) \subseteq A'$; b) *для любого* $E \in \Sigma$, $E \neq A$, *лежащего правее* A, $\varepsilon^s(A, E)(A') = 0$;

Лемма 3. *Пусть* Φ – *допустимая фильтрация представления* Π. *Тогда фильтрация* $\Phi(s; B, B', C, C')$ *допустима в каждом из следующих случаев:* a) *для любого* $E \in \Sigma$, *лежащего левее пары* (B, C), $\varepsilon^s(E, B)({}^sE) \subseteq B'$ *и* $\varepsilon^s(E, C)({}^sE) \subseteq C'$; b) *для любого* $E \in \Sigma$, *лежащего правее пары* (B, C), $\varepsilon^s(B, E)(B') = \varepsilon^s(C, E)(C') = 0$;

Доказательство. Надо доказать, что в обоих случаях a), b) все гомоморфизмы $\varepsilon(E, F) \in \Delta$ допустимы для новых фильтраций. Ниже G обозначает пространство A для леммы 2 и любое из пространств B, C для леммы 3. В случае a), если пространство $E \neq G$ лежит левее G, то $E' = (\varepsilon^s(E, G))^{-1}(G') = {}^sE$, а если E лежит правее G, то $F' = \varepsilon^s(G, F)(G') = \varepsilon^s(E, F)\varepsilon^s(G, E)(G') = \varepsilon^s(E, F)(E')$. В случае b), если $F \neq G$ лежит правее G, то $F' = 0$, а если F лежит левее G, то $E' = (\varepsilon^s(E, G))^{-1}(G') = (\varepsilon^s(E, F)^{-1}\varepsilon^s(F, G))^{-1}(G') = (\varepsilon^s(E, F))^{-1}(F')$. Во всех вариантах гомоморфизм $\varepsilon(E, F)$ допустим по лемме 1.

§ 3. Полунормальные фильтрации

Фильтрацию представления назовем полунормальной, если для всякого $s \geqslant 0$ и всякого $A \in \Sigma_0$, такого что ${}^sA \neq 0$, выполнены следующие условия:

a) если $F \in \Sigma$ лежит правее A, то $\varepsilon^s(A, F)$ – эпиморфизм;

b) если $E \in \Sigma$ лежит левее A, то $\varepsilon^s(E, A)$ – мономорфизм;

c) если пара $(B, C) \in \Sigma_1$ лежит левее A, то каждое из пространств $\operatorname{im}\varepsilon^s(B, A) \cap \operatorname{im}\varepsilon^s(C, A)$, $\operatorname{im}\varepsilon^s(B, A) + \operatorname{im}\varepsilon^s(C, A)$ либо нулевое, либо совпадает со всем ${}^sA$;

d) если пара $(B, C) \in \Sigma_1$ лежит правее A, то каждое из пространств $\ker\varepsilon^s(A, B) \cap \ker\varepsilon^s(A, C)$, $\ker\varepsilon^s(A, B) + \ker\varepsilon^s(A, C)$ либо нулевое, либо совпадает со всем ${}^sA$;

Теорема 2. *Для любой допустимой фильтрации представления существует ее допустимое полунормальное измельчение.*

Доказательство. Пусть фильтрация Φ не является полунормальной. Если для некоторых $s \geqslant 0$ и $A \in \Sigma_0$, таких что ${}^sA \neq 0$, не выполнено условие a) или b), положим соответственно $A' = {}^sA$ или $A' = 0$; в обоих случаях фильтрация $\Phi_1 = \Phi(s; A, A')$ – строгое и по лемме 2 допустимое измельчение фильтрации Φ представления Π.

Пусть условия a), b) при данном s выполнены для всех $A \in \Sigma_0$, но для пары $(B, C) \in \Sigma_1$ и $A \in \Sigma_0$, лежащего правее B и C, не выполнено условие c). Обозначим через E и F ближайшие слева и справа к паре (B,C) пространства из Σ_0. Покажем сначала, что ${}^sF=0$, а $\varepsilon^s(F,A)$ – изоморфизм ${}^sF$ на ${}^sA$. Если ${}^sE\neq 0$, то по условию a) ${}^sA=\operatorname{im}\varepsilon^s(E,A)\subseteq\operatorname{im}\varepsilon^s(B,A)$, откуда $\operatorname{im}\varepsilon^s(B,A)={}^sA$ и точно так же $\operatorname{im}\varepsilon^s(C,A)={}^sA$; отсюда в противоречие с предположением имеем: ${}^sA\subseteq\operatorname{im}\varepsilon^s(B,A)\cap\operatorname{im}\varepsilon^s(C,A)=\operatorname{im}\varepsilon^s(B,A)+\operatorname{im}\varepsilon^s(C,A)$. Далее, если $\varepsilon^s(F,A)$ – не изоморфизм ${}^sF$ на ${}^sA$, то ${}^sF=0$, так как выполнены условия a), b) и ${}^sA\neq 0$. Но тогда $\operatorname{im}\varepsilon^s(B,A)\subseteq\operatorname{im}\varepsilon^s(F,A)=\varepsilon^s(F,A)({}^sF)=0$ и точно так же $\operatorname{im}\varepsilon^s(C,A)=0$, откуда $\operatorname{im}\varepsilon^s(B,A)\cap\operatorname{im}\varepsilon^s(C,A)=\operatorname{im}\varepsilon^s(B,A)+\operatorname{im}\varepsilon^s(C,A)$ вопреки предположению.

Если теперь $\operatorname{im}\varepsilon^s(B,A)\cap\operatorname{im}\varepsilon^s(C,A)$ отлично от 0 и ${}^sA$, то положим $F'=\operatorname{im}\varepsilon^s(B,F)\cap\operatorname{im}\varepsilon^s(C,F)$, $B'=(\varepsilon^s(B,F))^{-1}(F')$, $C'=(\varepsilon^s(C,F))^{-1}(F')$, и в качестве Φ_1 возьмем фильтрацию $\Phi(s;B,B',C,C')$. Если пространство $\operatorname{im}\varepsilon^s(B,A)\cap\operatorname{im}\varepsilon^s(C,A)$ отлично от 0 и ${}^sA$, то положим $F'=\operatorname{im}\varepsilon^s(B,F)+\operatorname{im}\varepsilon^s(C,F)$, $\Phi_1=\Phi(s;F.F')$. И в том, и в другом случае Φ_1 – строгое и по леммам 2 и 3 допустимое измельчение фильтрации Φ представления Π.

Дуальным образом строится строгое допустимое измельчение Φ_1 фильтрации Φ в случае невыполнения условия d).

Если фильтрация Φ_1 не полунормальная, то таким же образом построим ее строгое допустимое измельчение Φ_2. Если и Φ_2 все еще не полунормальная фильтрация, то вновь тем же способом строим ее строгое допустимое измельчение и т.д. Поскольку последовательность строгих измельчений фильтрации конечномерного представления не может быть бесконечной, на каком-то шаге мы получим допустимую полунормальную фильтрацию. Теорема доказана.

§ 4. Нормальные слева фильтрации

Пусть Φ – полунормальная фильтрация представлоения Π. На пространствах $A\in\Sigma_0$, $A\neq A_1$, введем новые фильтрации. Пусть (B,C) – ближайшая к A слева пара пространств из Σ_1 и $X=B\oplus C$; через $\pi_1:X\to B$, $\pi_2:X\to C$ обозначим проекции на первое и второе слагаемые, а через $\sigma:X\to A$ – отображение, сопоставляющее элементу $b\oplus c\in X$ $(b\in B, c\in C)$ элемент $\sigma(b\oplus c)=\varepsilon(B,A)(b)+\varepsilon(C,A)(c)$. Для любых чисел $0\leqslant t<s$ через $X^{t,s}$ обозначим множество элементов $x\in X$, таких что $\pi_1(x)\in B^t$, $\pi_2(x)\in C^t$, $\sigma(x)\in A^s$. Далее, положим $B^{t,s}=\pi_1(X^{t,s})+B^{t+1}$, $C^{t,s}=\pi_2(X^{t,s})+C^{t+1}$, $A^{s,t}=\sigma(X^{t,s})+A^{s+1}$, $A^{t,s}=\sigma(B,A)+(B^{t,s})+A^{t+1}$. Ясно, что $B^{t+1}\subseteq B^{t,s}\subseteq B^t$, $C^{t+1}\subseteq C^{t,s}\subseteq C^t$, $A^{s+1}\subseteq A^{s,t}\subseteq$

A^s, $A^{t+1} \subseteq A^{t,s} \subseteq A^t$. Факторпространства $A^{t,s}/A^{t+1}$, $B^{t,s}/B^{t+1}$, $C^{t,s}/C^{t+1}$, $A^{s,t}/A^{s+1}$, обозначим через ${}^tA^s$, ${}^tB^s$, ${}^tC^s$, ${}^sA^t$.

Лемма 4. $\varepsilon^t(C,A)({}^tC^s) = \varepsilon^t(B,A)({}^tB^s) = {}^tA^s$

Доказательство. Утверждение равносильно соотношению $A^{t+1} + \varepsilon(C,A)(C^{t,s}) = A^{t+1} + \varepsilon(B,A)(B^{t,s}) = A^{t,s}$. Если $b \in B^{t,s}$, то существуют $b_1 \in B^{t+1}$, $c \in C^t$, такие что $\varepsilon(B,A)(b+b_1) + \varepsilon(C,A)(c) \in A^s$; тогда $c \in C^{t,s}$ и $\varepsilon(B,A)(b) \in A^s - \varepsilon(B,A)(b_1) - \varepsilon(C,A)(c) \subseteq A^s + A^{t+1} + \varepsilon(C,A)(C^{t,s}) = \varepsilon(C,A)(C^{t,s}) + A^{t,s}$. Таким образом, $\varepsilon(B,A)(B^{t,s}) + A^{t+1} \subseteq \varepsilon(C,A)(C^{t,s}) + A^{t+1}$; обратное включение доказывается так же.

Лемма 5. *Если* ${}^tA = 0$, *то* $A^{s,t} = A^{s,t+1}$, *а значит,* ${}^sA^t = {}^sA^{t+1}$.

Доказательство. Поскольку гомоморфизмы $\varepsilon(B,A)$, $\varepsilon(C,A)$ допустимы, существуют подпространства $B(t) \subseteq B^t$, $C(t) \subseteq C^t$, такие что $B^t = B(t) \oplus B^{t+1}$, $C^t = C(t) \oplus C^{t+1}$, $\varepsilon(B,A)(B(t)) = 0$, $\varepsilon(C,A)(C(t)) = 0$. Ясно, что $X^{t,s} = B(t) \oplus C(t) \oplus X^{t+1,s}$, и потому $\sigma(X^{t,s}) = \sigma(X^{t+1,s}) + \varepsilon(B,A)(B(t)) + \varepsilon(C,A)(C(t)) = \sigma(X^{t+1,s})$. Прибавляя к обеим частям этого равенства A^{s+1}, получаем утверждение леммы.

Лемма 6. *Для любых* $0 \leqslant t < s$ *пространства* ${}^sA^t/{}^sA^{t+1}$, ${}^tA^s/{}^tA^{s+1}$ *изоморфны. Если они отличны от* 0, *то* ${}^sB = 0$, ${}^sC = 0$, $\varepsilon^t(B,A)$ *и* $\varepsilon^t(C,A)$ *– изоморфизмы, а* ${}^tE = 0$ *для любого* $E \in \Sigma$, *лежащего левее* B *и* C.

Доказательство. Благодаря лемме 5, все тривиально для ${}^tA = 0$. Пусть теперь ${}^tA \neq 0$. Проекция π_1 индуцирует эпиморфизм $\tau : X^{t,s} \to {}^tB^s$. Его ядро состоит из элементов $b \oplus c \in X^{t,s}$, таких что $b \in B^{t+1}$, $c \in C^t$. Поскольку $\varepsilon(B,A)(b) + \varepsilon(C,A)(c) \in A^s \subseteq A^{t+1}$ и $\varepsilon(B,A)(b) \in A^{t+1}$, элемент $\varepsilon(C,A)(c)$ тоже принадлежит A^{t+1}; но из полунормальности фильтрации Φ следует, что $\varepsilon^t(B,A)$-мономорфизм, и, значит, $c \in C^{t+1}$, $b \oplus c \in X^{t+1,s}$. Таким оброазом, $\ker \tau = X^{t+1,s}$. Далее, пространство $Y^{t,s} = X^{t+1,s} + X^{t,s+1}$ содержит $\ker \tau$ и гомоморфизмом τ отображается на ${}^tB^{s+1}$; поэтому по теореме о гомоморфизмах пространство ${}^tB^s/{}^tB^{s+1}$ изоморфно $X^{t,s}/Y^{t,s}$. Опять воспользовавшись тем, что $\varepsilon^t(B,A)$ – мономорфизм, найдем, что факторпространство $X^{t,s}/Y^{t,s}$ изоморфно факторпространству $(\varepsilon^t(B,A))({}^tB^s)/(\varepsilon^t(B,A))({}^tB^{s+1}) = {}^tA^s/{}^tA^{s+1}$.

Точно так же (и даже проще) показывается, что ${}^sA^t/{}^sA^{t+1}$ тоже изоморфно $X^{t,s}/Y^{t,s}$, откуда следует первое утверждение леммы.

Пусть хотя бы одно из пространств ${}^sB$, ${}^sC$ отлично от 0; тогда из полунормальности Φ следует, что $\varepsilon^s(B,A)({}^sB) + \varepsilon^s(C,A)({}^sC) = {}^sA$, т.е. $\varepsilon(B,A))(B^s)+\varepsilon(C,A)(C^s)+A^{s+1}=A^s$. Но $X^{t+1,s}\supseteq B^s\oplus C^s$, и потому $A^{s,t+1}=\sigma(X^{t,s})+A^{s+t}\supseteq\varepsilon(B,A)(B^s)+\varepsilon(C,A)(C^s)+A^{s+1}=A^s$, и, поскольку $A^s\supseteq A^{s,t}\supseteq A^{s,t+1}=A^s$, пространства $A^{s,t}$ и $A^{s,t+1}$ совпадают.

По определению и лемме 4 ${}^t\!A^s=\varepsilon^t(B,A)({}^tB^s)=\varepsilon^t(C,A)({}^tC^s)$. Поэтому ${}^t\!A^s$ содержится в пересечении $\operatorname{im}\varepsilon^t(B,A)\cap\operatorname{im}\varepsilon^t(C,A)$. Если хотя бы один из гомоморфизмов $\varepsilon^t(B,A)$ или $\varepsilon^t(C,A)$ – не изоморфизм, то из полунормальности Φ следует, что это пересечение равно 0. Следовательно, тогда ${}^t\!A^s=0$ и ${}^t\!A^{s+1}\subseteq{}^t\!A^s=0$, и $A^{t,s}=A^{t,s+1}=A^{t+1}$.

Если для некоторого $E\in\Sigma$, лежащего левее B и C, ${}^tE\neq 0$, то для $e\in E^t$ элемент $x'=\varepsilon(E,B)(e)\oplus\varepsilon(E,C)(-e)$ принадлежит $X^{t,s+1}$, так как $\sigma(x)=\varepsilon(B,A)\varepsilon(E,B)(e)+\varepsilon(C,A)\varepsilon(E,C)(-e)=\varepsilon(E,A)(e)-\varepsilon(E,A)(e)=0$; потому $A^{t,s+1}=\varepsilon(B,A)\pi_1(X^{t,s+1})+A^{t+1}\supseteq\varepsilon(B,A)\varepsilon(E,B)(E^t)+A^{t+1}=\varepsilon(E,A)(E^t)+A^{t+1}=A^t$, так как благодаря полунормальности фильтрации $\varepsilon^t(E,A)$ – изоморфизм E^t на A^t. Поскольку $A^t\supseteq A^{t,s}\supseteq A^{t,s+1}=A^t$, пространства $A^{t,s}$ и $A^{t,s+1}$ совпадают.

Лемма полностью доказана.

Полунормальную фильтрацию Φ называем нормальной слева, если для всех пространств $A\in\Sigma_0$, $A\neq A_1$, и всех $0\leqslant t<s$ пространство ${}^t\!A^s$ совпадает либо с ${}^t\!A$, либо с 0, а пространство ${}^s\!A^t$ – либо с ${}^s\!A$, либо с 0. Если фильтрация нормальна слева и ${}^s\!A\neq 0$, то существует не более одного $t>s$, такого что ${}^s\!A^{t+1}$, ${}^s\!A^t={}^s\!A$; в этом случае по лемме 6 пространство ${}^t\!A^s/{}^t\!A^{s+1}$ изоморфно ${}^s\!A^t/{}^s\!A^{t+1}\neq 0$, и ${}^t\!A^{s+1}=0$, ${}^t\!A^{s+1}={}^t\!A$, причем s является единственным числом, удовлетворяющим этому условию для данного t. В такой ситуации будем говорить, что s-й и t-й слои фильтрации Φ связаны слева в пространстве $A\in\Sigma_0$; как видно из предшествующих рассуждений, для связанных слева слоев пространства ${}^s\!A$ и ${}^t\!A$ изоморфны.

Теорема 3. *Для любой допустимой фильтрации Φ представления Π существуют ее допустимое нормальное слева измельчение.*

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 2, строим последовательность строгих измельчений $\Phi_0=\Phi$, Φ_1, $\Phi_2,\ldots$ фильтрации Φ. Если Φ_i не полунормальна, то в качестве Φ_{i+1} возьмем допустимое полунормальное измельчение Φ_i, существующее по теореме 2. Если же фильтрация Φ_i полунормальна, но не нормальна слева, то для некоторых $A\in\Sigma_0$, $0\leqslant t<s$ либо ${}^s\!A^t$ отлично от 0 и ${}^s\!A$, либо ${}^t\!A^s$ отлично от 0 и ${}^t\!A$. В первом случае полагаем $\Phi_{i+1}=\Phi(s;A,{}^s\!A^t)$; во втором ${}^t\!A^s=\varepsilon^t(B,A)({}^tB^s)=\varepsilon^t(C,A)({}^tC^s)$ и мы

положим $\Phi_{i+1} = \Phi(t; B, {}^tB^s, C, {}^tC^s)$. По лемме 6 в обоих случаях выполняется условие а) леммы 2 или лемма 3, и потому фильтрация Φ_{i+1} допустима.

Поскольку последовательность строгих измельчений фильтрации конечномерного представления не может быть бесконечной, на каком-то шаге мы получим допустимую нормальную слева фильтрацию. Теорема доказана.

§ 4$'$ Нормальные справа фильтрации

Пусть Φ – полунормальная фильтрация представления Π, $A \in \Sigma_0$, $A \neq A_{n+1}$; пусть далее (B, C) – ближайшая к A справа пара пространств из Σ_1. Для $0 \leqslant t < s$ обозначим через $A^{t,s}$ множество элементов $a \in B^t$, таких что $\varepsilon(A,B)(a) \in B^s$, $\varepsilon(A,C)(a) \in C^s$, а через $B^{t,s}$ и $C^{t,s}$ соответственно $\varepsilon(A,B)(a)(A^{t,s}) + B^{s+1}$ и $\varepsilon(A,C)(a)(A^{t,s}) + C^{s+1}$. Определим теперь подпространства ${}^tA^s \subseteq {}^tA$, ${}^sB^t \subseteq {}^sB$, ${}^sC^t \subseteq {}^sC$, ${}^sA^t \subseteq {}^sA$, положив ${}^sA^t = (\varepsilon^s(A,B))^{-1}({}^sB^t)$, ${}^tA^s = (A^{t,s} + A^{t+1})/A^{t+1}$, ${}^sB^t = B^{t,s}/B^{s+1}$, ${}^sC^t = C^{t,s}/C^{s+1}$.

Лемма 4$'$. $(\varepsilon^s(A,C))^{-1}({}^sC^t) = (\varepsilon^s(A,B))^{-1}({}^sB^t) = {}^sA^t$.

Доказательство. Из определения следует, что $(\varepsilon^s(A,C))^{-1}({}^sC^t) = ((A^{t,s} \cap A^s) + A^{s+1})/A^{s+1}$; тому же равняется и $(\varepsilon^s(A,B))^{-1}({}^sB^t)$.

Лемма 6$'$. *Для любых $0 \leqslant t < s$ пространства ${}^sA^t/{}^sA^{t+1}$, ${}^tA^s/{}^tA^{s+1}$ изоморфны. Если они отличны от 0, то ${}^tB = 0$, ${}^tC = 0$, $\varepsilon^s(A,B)$ и $\varepsilon^s(A,C)$ – изоморфизмы, а ${}^sE = 0$ для любого $E \in \Sigma$, лежащего правее B и C.*

Доказательство. Рассмотрим отображение α, индуцируемое гомоморфизмом $\varepsilon(A,B)$, $\alpha: A^{t,s} \xrightarrow{\varepsilon} B^{s,t} \to^s B^t$. Непосредственная проверка показывает, что его ядром является $A^{t,s+1}$, и следовательно, по первой теореме о гомоморфизмах $A^{t,s}/A^{t,s+1} \cong {}^sB^t$. Аналогично, $A^{t,s}/A^{t,s+1} \cong {}^sC^t$. Таким образом ${}^sB^t \cong {}^sC^t$.

Рассмотрим новое пространство $Y^{t,s} = A^{t,s+1} + A^{t+1,s}$. Оно содержит ядро α и посредством α отображается на ${}^sB^{t+1}$; значит, по теореме о гомоморфизмах $A^{t,s}/Y^{t,s} \cong^s B^t/{}^sB^{t+1}$.

Далее, так как $\varepsilon^s(A,B)$ – эпиморфизм (в силу полунормальности фильтрации) и оба пространства $A^{s,t}$ и $A^{s,t+1}$ содержат его ядро, по третьей теореме о гомоморфизмах имеем:

$$ {}^sB^t/{}^sB^{t+1} \cong (\varepsilon^s(A,B))^{-1}({}^sB^t)/(\varepsilon^s(A,B))^{-1}({}^sB^{t+1}) = {}^sA^t/{}^sA^{t+1}. $$

С другой стороны,

$$ {}^tA^s = (A^{t,s} + A^{t+1})/A^{t+1} \cong A^{t,s}/(A^{t,s} \cap A^{t+1}) = A^{t,s}/A^{t+1,s}. $$

Рассмотрим эпиморфизм $\beta : A^{t,s} \to A^{t,s}/A^{t+1,s} = {}^t\!A^s$. Тогда, во-первых, $\ker\beta = A^{t+1,s} \subseteq A^{t,s+1} + A^{t+1,s} = Y^{t,s}$, а, во-вторых, β отображает $Y^{t,s}$ на $(A^{t,s+1} + A^{t+1,s})/A^{t+1,s} \cong A^{t,s+1}/(A^{t,s+1} \cap A^{t+1,s}) = A^{t,s+1}/A^{t+1,s+1} = {}^t\!A^{s+1}$. Следовательно, $A^{t,s}/Y^{t,s} \cong {}^t\!A^s/{}^t\!A^{s+1}$ по теореме о гомоморфизмах.

Таким образом, ${}^s\!A^t/{}^s\!A^{t+1} \cong {}^t\!A^s/{}^t\!A^{s+1}$.

Пусть хотя бы одно из пространств ${}^tB$, ${}^tC$ отлично от 0. Тогда $\ker\varepsilon^t(A,B) \cap \ker\varepsilon^t(A,C) = 0$. Если $a \in A^{t,s}$, то по определению $\varepsilon(A,B)(a) \in B^s \subseteq B^{t+1}$ и $\varepsilon(A,C)(a) \in C^s \subseteq C^{t+1}$. Положим, $\alpha = a \pmod{A^{t+1}}$. Ясно, что $\alpha \in \ker\varepsilon^t(A,B)$ и $\alpha \in \ker\varepsilon^t(A,C)$, а значит α принадлежит их пересечению и, следовательно, $\alpha = 0$. Таким образом, $a \in A^{t+1} \Rightarrow a \in A^{t+1,s} \Rightarrow A^{t,s} = A^{t+1,s}$, что противоречит предположению о неравенстве нулю пространства ${}^t\!A^s/{}^t\!A^{s+1}$.

Пусть $\varepsilon^s(A,B)$ или $\varepsilon^s(A,C)$ – не мономорфизмы. Поскольку они в силу полунормальности фильтрации являются эпиморфизмами и ${}^sB^t \subseteq {}^sB$, ${}^sC^t \subseteq {}^sC$, то ${}^sB \neq 0$ или ${}^sC \neq 0$; следовательно, $\ker\varepsilon^s(A,B) + \ker\varepsilon^s(A,C) \neq {}^s\!A$. Это означает, что $\ker\varepsilon^s(A,B) + \ker\varepsilon^s(A,C) = 0$, то есть $\ker\varepsilon^s(A,B) + \ker\varepsilon^s(A,C) = 0$, и $\varepsilon^s(A,B)$ и $\varepsilon^s(A,C)$ – изоморфизмы.

Лемма полностью доказана.

Полунормальную фильтрацию Φ называем нормальной справа, если для всех пространств $A \in \Sigma_0$, $A \neq A_1$ и всех $0 \leqslant t < s$ пространство ${}^t\!A^s$ совпадает либо с ${}^t\!A$, либо с 0, а пространство ${}^s\!A^t$ – либо с ${}^s\!A$, либо с 0. Если фильтрация нормальна справа и ${}^s\!A = 0$, то существует не более одного $t > s$, такого что ${}^s\!A^{t+1} = 0$, ${}^s\!A^t = {}^s\!A$; в этом случае по лемме 6′ пространство ${}^t\!A^s/{}^t\!A^{s+1}$ изоморфно ${}^s\!A^t/{}^s\!A^{t+1} \neq 0$, и ${}^t\!A^{s+1} = 0$, ${}^t\!A^{s+1} = {}^t\!A$, причем s является единственным числом, удовлетворяющим этому условию для данного t. В такой ситуации будем говорить, что s-й и t-й слои фильтрации Φ связаны справа в пространстве $A \in \Sigma_0$; как видно из предшествующих рассуждений, для связанных справа слоев пространства ${}^s\!A$ и ${}^t\!A$ изоморфны.

Теорема 3′. *Для любой допустимой фильтрации представления существует ее допустимое нормальное справа измельчение.*

Доказательство. Как и при доказательстве теорем 2 и 3, строим последовательность строгих допустимых измельчений $\Phi_0 = \Phi$, Φ_1, $\Phi_2, \ldots$ фильтрации Φ. Если Φ_i не полунормальна, то в качестве Φ_{i+1} возьмем допустимое полунормальное измельчение Φ_i, существующее по теореме 2. Если же фильтрация Φ_i полунормальна, но не нормальна справа, то для некоторых $A \in \Sigma_0$, $0 \leqslant t < s$ либо ${}^t\!A^s$ отлично от 0 и ${}^t\!A$, либо ${}^s\!A^t$ отлично от 0 и ${}^s\!A$. В первом случае полагаем $\Phi_{i+1} = \Phi(t; A, {}^tA^s)$; во втором ${}^sA^t = (\varepsilon^s(B,A))^{-1}({}^sB^t) = (\varepsilon^s(C,A))^{-1}({}^sC^t)$, и тогда положим $\Phi_{i+1} = \Phi(s; B, {}^sB^t, C, {}^sC^t)$. По лемме $6'$ в обоих случаях выполняется условие b) леммы 2 или леммы 3, и потому фильтрация Φ_{i+1} допустима.

Поскольку последовательность строгих измельчений фильтрации конечномерного представления не может быть бесконечной, на каком-то шаге мы получим допустимую нормальную справа фильтрацию. Теорема доказана.

§ 5. Нормальные фильтрации

Фильтрация представления называется нормальной, если она является нормализованной и слева, и справа.

Теорема 4. *Для любой допустимой фильтрации представления колчана Q_n существует ее нормальное измельчение.*

Доказательство. Теорема легко доказывается "методом маятника". Для допустимой фильтрации Φ построим последовательность допустимых фильтраций $\Phi_0 = \Phi$, Φ_1, $\Phi_2, \ldots$, каждая из которых – измельчение предыдущей: при четном $i > 0$ фильтрация Φ_i – существующее по теореме 3 допустимое нормальное слева измельчение фильтрации Φ_{i-1}, а при нечетном i фильтрация Φ_i – существующее по теореме 3' допустимое нормальное справа измельчение фильтрации Φ_{i-1}. Поскольку последовательность строгих элементарных измельчений фильтрации конечномерного представления не может быть бесконечной, для некоторого i фильтрации Φ_i и Φ_{i-1} совпадают, и потому фильтрация $\Phi_i = \Phi_{i-1}$ нормальна и слева, и справа.

Литература

1. А. В. Яковлев, Неразложимые представления одного типа ориентированных графов, Всесоюзный алгебраический симпозиум. Тезисы докладов. ч. 2. Гомель, 473–474, (1975).
2. Л. А. Назарова, *Представления четвериады.* — Изв. АН СССР, Сер. мат. **31** (1967), 1361–1377.
3. А. В. Яковлев, *2-адические представления циклической группы 8-го порядка.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **28** (1972), 98–123.

С.-Петербургский государственный университет

Поступило 10 февраля 1995 г.