С. Г. Танкеев, О стандартной гипотезе для расслоенного над поверхностью 3-мерного многообразия, *Матем. заметки*, 2019, том 105, выпуск 4, 643–644

DOI: 10.4213/mzm12246

О стандартной гипотезе для расслоенного над поверхностью 3-мерного многообразия

С. Г. Танкеев

Ключевые слова: стандартная гипотеза Гротендика типа Лефшеца, отображение Кодаиры–Спенсера, якобиево многообразие.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm12246

Пусть H – обильный дивизор на гладком комплексном проективном d-мерном многообразии X. Тогда для любого натурального числа $i \leqslant d$ отображение

$$L^{d-i}\colon H^i(X,\mathbb{Q}) \xrightarrow{\smile \mathrm{cl}_X(H)^{\smile d-i}} H^{2d-i}(X,\mathbb{Q})$$

является изоморфизмом согласно сильной теореме Лефшеца. Стандартная гипотеза Гротендика $B(X)$ типа Лефшеца [1] утверждает, что существует алгебраический $\mathbb{Q}$-цикл Z на декартовом произведении $X \times X$, определяющий обратный *алгебраический* изоморфизм

$$H^{2d-i}(X,\mathbb{Q}) \xrightarrow[\sim]{x \mapsto \mathrm{pr}_{2*}(\mathrm{pr}_1^* x \smile \mathrm{cl}_{X\times X}(Z))} H^i(X,\mathbb{Q}).$$

Известно, что стандартная гипотеза $B(X)$ верна для всех гладких комплексных проективных кривых, поверхностей, абелевых многообразий [2] и трехмерных многообразий размерности Кодаиры [3] $\varkappa(X) < 3$. Стандартная гипотеза $B(X)$ для комплексных 3-мерных многообразий размерности Кодаиры $\varkappa = 3$ является трудной задачей принципиальной важности.

Используя интересные связи стандартной гипотезы $B(X)$ для расслоенного над поверхностью 3-мерного комплексного проективного многообразия с теорией Гротендика–Делиня гомоморфизмов абелевых схем над алгебраическими кривыми [4], [5], мы анонсируем доказательство следующей теоремы:

Теорема 1. *Пусть $\pi\colon X \to S$ – обладающий сечением проективный морфизм гладкого трехмерного многообразия на гладкую проективную поверхность и $\mathrm{End}(\mathrm{Pic}^0(X_s)) = \mathbb{Z}$ для некоторого замкнутого гладкого слоя X_s. Если для некоторого непустого открытого подмножества $U \subset S$ морфизм $\pi|_{\pi^{-1}(U)}\colon \pi^{-1}(U) \to U$ гладкий и ранг отображения Кодаиры–Спенсера $\rho_{\pi,u}\colon T_u \to H^1(X_u,\Theta_{X_u})$ касательного пространства T_u к поверхности S в любой точке $u \in U$ равен 1, то для многообразия X верна стандартная гипотеза Гротендика $B(X)$ типа Лефшеца.*

В случае, когда род g общего слоя морфизма π равен 2, условие $\mathrm{End}(\mathrm{Pic}^0(X_s)) = \mathbb{Z}$ можно исключить. Если $g = 3$, то можно заменить условие на кольцо эндоморфизмов якобиева многообразия $\mathrm{Pic}^0(X_s)$ предположением о тривиальности следа якобиана общего схемного слоя морфизма π (что автоматически выполнено в случае, когда для некоторого замкнутого гладкого слоя X_s морфизма π якобиево многообразие $\mathrm{Pic}^0(X_s)$ является простым абелевым многообразием).

При выполнении условий теоремы 1 легко получить с помощью стандартных рассуждений [3; § 5], что верна гипотеза Фридландера–Мазура [6] о совпадении фильтрации соответствий и геометрической фильтрации на гомологиях многообразия X и всех его гладких проективных моделей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-01-00143).

Основной метод доказательства стандартной гипотезы $B(X)$ для комплексного проективного многообразия X заключается в том, чтобы заменить X на доминирующее расслоенное над гладкой кривой C многообразие с полустабильными слоями (используя теорему Мамфорда о полустабильных редукциях [7; с. 53–54]), а затем применить результат Цуккера о вырожденности спектральной последовательности Лере [8; следствие (15.15)] и теорему о локально инвариантных циклах (см. [9; п. (3.7)], [8; предложение (15.12)]), а также использовать свойства классов Пуанкаре [10; п. 1.4, лемма 1.5], которые позволяют во многих случаях построить алгебраические соответствия, реализующие изоморфизмы рациональных когомологий, необходимые для доказательства гипотезы $B(X)$.

В рассматриваемом случае доказательство теоремы 1 состоит из следующих двух шагов.

Теорема 2. *Пусть X – гладкое комплексное проективное трехмерное многообразие, $\pi\colon X \to C$ – сюръективный морфизм на гладкую кривую C, любой геометрический слой X_s является объединением гладких поверхностей кратности 1 с нормальными пересечениями, $\pi'\colon X' \to C'$ – гладкая часть морфизма π.*

Если пространство $H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q})$ инвариантных циклов является $\mathbb{Q}$-структурой Ходжа типа $(1,1)$, то стандартная гипотеза типа Лефшеца верна для X.

Теорема 3. *Пусть $\pi_k\colon X_k \to C$, $k = 1, 2$, – морфизм гладкой проективной поверхности на гладкую проективную кривую. Предположим, что кольцо эндоморфизмов якобиева многообразия $\operatorname{Pic}^0(X_{1\eta})$ общего схемного слоя морфизма π_1 удовлетворяет следующему условию:*

$$\operatorname{End}(\operatorname{Pic}^0(X_{1\eta}) \otimes_{\kappa(\eta)} \overline{\kappa(\eta)}\,) = \operatorname{End}(\operatorname{Pic}^0(X_{1\eta})) = \mathbb{Z}.$$

Тогда для любой гладкой проективной модели X расслоенного произведения $X_1 \times_C X_2$ верна стандартная гипотеза Гротендика $B(X)$ типа Лефшеца.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] A. Grothendieck, *Algebraic Geometry*, Oxford Univ. Press, London, 1969, 193–199. **[2]** D. Lieberman, *Amer. J. Math.*, **90**:2 (1968), 366–374. **[3]** С. Г. Танкеев, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **75**:5 (2011), 177–194. **[4]** A. Grothendieck, *Invent. math.*, **2** (1966), 59–78. **[5]** P. Deligne, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **40** (1971), 5–57. **[6]** E. M. Friedlander, B. Mazur, *Filtrations on the Homology of Algebraic Varieties*, Mem. Amer. Math. Soc., **110**, no. 529, Amer. Math Soc., Providence, RI, 1994. **[7]** G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat, *Toroidal Embeddings I*, Lecture Notes in Math., **339**, Springer-Verlag, Berlin, 1973. **[8]** S. Zucker, *Ann. Math.*, **109**:3 (1979), 415–476. **[9]** C. H. Clemens, *Duke Math. J.*, **44**:2 (1977), 215–290. **[10]** С. Г. Танкеев, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74**:1 (2010), 175–196.

С. Г. Танкеев
Владимирский государственный
университет имени Александра Григорьевича
и Николая Григорьевича Столетовых
E-mail: tankeev@vlsu.ru

Поступило
08.11.2018
Принято к публикации
19.11.2018