

УДК 519.6:517.958:531.32

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РАСПАДА РАЗРЫВА ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ МЕЛКОЙ ВОДЫ¹⁾

© 1997 г. В. В. Беликов, А. Ю. Семенов

(Москва)

Поступила в редакцию 19.02.96 г.
Переработанный вариант 14.08.96 г.

Построены и исследованы явные разностные схемы сквозного счета для моделирования течений жидкости в рамках уравнений теории мелкой воды с учетом рельефа дна. Для нахождения сеточных величин на границах разностных ячеек используется точное решение задачи о распаде произвольного гидродинамического разрыва Стокера. Построен экономичный итерационный алгоритм для нахождения точного решения задачи о распаде разрыва, и дана оценка точности первого итерационного приближения. Изложены модификации метода, обеспечивающие второй порядок точности метода в областях гладкого решения. Работоспособность методики иллюстрируется примерами расчетов одномерных и двумерных задач.

ВВЕДЕНИЕ

В работе описан и исследован явный численный метод типа распада разрыва для сквозных расчетов течений жидкости на основе одномерных и двумерных уравнений теории мелкой воды [1]–[4]. Метод особо удобен для расчетов течений при умеренных и больших числах Фруда Fr , при которых могут возникать в том числе течения с большими перепадами параметров или даже негладкие. (Число Фруда является здесь аналогом газодинамического числа Маха, см. [4].)

Алгоритм позволяет адекватно передавать гидромеханику распространения сильных разрывов, например гидравлических прыжков (г.п.), см. [1], – аналога ударных волн [4], а также обеспечивать монотонные профили сеточных величин вблизи г.п. Он позволяет также рассчитывать сквозным образом величины заплесков (неполностью затопленных ячеек разностной сетки) и при этом моделировать области обмеления или сухого дна без необходимости какого-либо их специального выделения.

Течения, описываемые уравнениями мелкой воды, достаточно распространены. Это – распространение волн цунами [5], течения в нижних бьефах гидроэлектростанций, движение волн прорыва в реках [1], течения в водопропускных трубах (быстротоках) [1], [3] и т.д. Для решения уравнений мелкой воды можно использовать и адаптировать численные методы, возникшие первоначально для решения уравнений газовой динамики. Такой подход естествен, так как уравнения мелкой воды при ряде предположений с точностью до обозначений переходят в уравнения баротропной газовой динамики с коэффициентом адиабаты, равным двойке. Например, схема В.В. Русанова [6] модифицирована в [7] для исследования течения в расширяющемся канале с образованием г.п. и водоворотных зон. Схема Мак-Кормака [8] использовалась для расчета течений в каналах с криволинейными стенками [9]. Понятие инвариантных схем [10], развитое для уравнений газодинамики, применено для расчетов уравнений мелкой воды в [11]. Модификация метода Куранта–Изаксона–Риса [12] применена для численных расчетов уравнений мелкой воды в [13].

Данная работа также адаптирует для уравнений мелкой воды одну из методик, которая была разработана для газодинамики. А именно, для решения уравнений мелкой воды построены и опробованы явные разностные схемы распада разрыва [14]–[16], но основанные на точных формулах не газодинамического, а гидродинамического распада. Среди предшествующих работ отметим [15, Приложение 3], в которой для решения одномерных уравнений мелкой воды без учета рельефа дна была построена аналогичная (как и в газодинамике) неявная конечно-разностная схема с выделением разрывов. Упомянем здесь схему из [13], относящуюся к схемам типа распада разрыва, когда используются линеаризованные формулы [12]. Назовем также методику [17], основанную на приближенном методе решения задачи о распаде разрыва [18].

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 94-02-03413-а и 95-01-00835-а).

В работе особое внимание уделено двум следующим моментам, которые отличают изложенный подход от ранее известных:

разработан быстрый и экономичный алгоритм для нахождения точного решения задачи о распаде произвольного гидродинамического разрыва; с оценками скорости сходимости для итерационного процесса;

разработаны и опробованы в рамках сквозного счета для схем распада разрыва алгоритмы учета произвольного гладкого рельефа дна, рассматриваемого здесь как однозначная функция пространственных координат, включая при этом области полного обмеления. Одна из проблем состоит здесь в том, что при негоризонтальном дне уравнения мелкой воды точных решений не имеют. Другая проблема состоит в построении алгоритма сквозного счета для учета обмелений и “сухого” дна. Применение точных формул распада, в отличие от формул методик [13], [17], содержащих операции деления на корень из глубины, позволяет преодолеть их естественным путем, без регуляризаций.

Эти два момента являются новыми и, по-видимому, в такой формулировке излагаются впервые. Дальнейшее изложение результатов опирается на публикации, посвященные предварительному развитию отдельных аспектов метода, а именно [19]–[23].

Разработанные методы могут быть применены в том числе для расчета течений при малых числах Фруда, $Fr \ll 1$. Но в этом случае расчеты становятся неэкономичными из-за ужесточения условий на шаг по времени (условие Куранта–Фридрихса–Леви) и появляется необходимость использования неявных разностных схем, например из [15], [24]. Дополнительным вопросом может стать здесь также применимость самих уравнений теории мелкой воды, которые могут быть заменены, в частности, на уравнения типа диффузионных волн.

В разделе 1 статьи описаны уравнения мелкой воды, в разделе 2 дается описание разностного метода. Следующие два раздела работы посвящены изложению исследования алгоритма решения задачи о распаде произвольного гидродинамического разрыва. В заключительном разделе 5 изложены результаты численных расчетов, иллюстрирующие свойства предлагаемой методики.

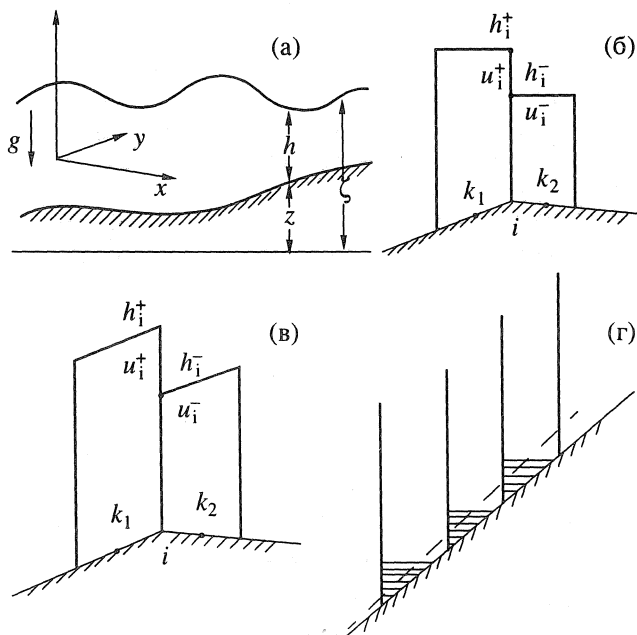
1. УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ МЕЛКОЙ ВОДЫ

Двумерная нестационарная система уравнений мелкой воды (уравнения Сен-Венана), описывающая плоские движения жидкости в горизонтальной плоскости, имеет вид (см. [1]–[4])

$$h_t + (\nabla \cdot \mathbf{w})h = 0, \quad (hw)_t + (\nabla \cdot \mathbf{w})hw + gh\nabla(h+z) = \mathbf{f}; \tag{1.1}$$

здесь t – время; $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$, где x, y – координаты на горизонтальной плоскости; $h = h(x, y, t)$ – глубина потока жидкости (см. фиг. 1а); $\mathbf{w} = \mathbf{w}(x, y, t) = (u, v)^T$ – вектор скорости, осредненный по глубине потока; g – ускорение свободного падения вдоль вертикального направления; $z = z(x, y)$ – вертикальные отметки рельефа дна, который отсчитывается от какого-либо горизонтального уровня (см. фиг. 1а); величина $\zeta = h + z$ называется уровнем свободной поверхности жидкости; \mathbf{f} – учет действия внешних сил, например силы Кориолиса или трения: $\mathbf{f} = \lambda \mathbf{w}|\mathbf{w}|/2$, λ – коэффициент гидравлического трения, в частности $\lambda = 2gn^2h^{-1/3}$, n – коэффициент шероховатости (см. [3]); (а · б) – скалярное произведение векторов а и б.

Систему уравнений мелкой воды получают путем осреднения трехмерных нестационарных уравнений Эйлера (или Навье–Стокса) по глубине потока вдоль вертикальной координаты. С выводом и вопроса-



Фиг. 1.

ми его обоснования можно ознакомиться в [1]–[4], [25], [26].

Одной из особенностей квазилинейных гиперболических систем типа (1.1) является существование для них решений с разрывами [1], [4]. При этом разрывные решения могут возникать из первоначально гладких начальных условий. Впервые такие решения для уравнений мелкой воды построены в [27] (см. также [1]). Обобщение решений для призматических русел дано в [28].

Система уравнений (1.1) в интегральной форме имеет вид

$$\left(\iint_G h dG \right)_t + \oint_{\sigma} h (d\sigma \cdot \mathbf{w}) = 0, \quad (1.2)$$

$$\left(\iint_G h \mathbf{w} dG \right)_t + \oint_{\sigma} h \mathbf{w} (d\sigma \cdot \mathbf{w}) + \frac{1}{2} g \oint_{\sigma} h^2 d\sigma + g \iint_G h \nabla z dG = \iint_G \mathbf{f} dG.$$

Здесь G – произвольная область на плоскости (x, y) , dG – элемент площади, σ – граница G , $d\sigma = \mathbf{n} d\sigma$ – векторный элемент σ , \mathbf{n} – внешняя нормаль к σ , $d\sigma$ – элемент кривой.

Для решения конкретных задач система уравнений (1.1) или (1.2) дополняется соответствующими начальными и граничными условиями. В начальный момент времени $t = 0$ задаются $\mathbf{w}(x, y, 0) = \mathbf{w}_0(x, y)$ и $h(x, y, 0) = h_0(x, y)$. На границах расчетной области осуществляется постановка граничных условий, например задаются потоки или условия на непроницаемой стенке. Корректности постановки граничных условий посвящены работы [29], обзор [30]; о неотражающих граничных условиях см. обзор в [31].

2. РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ТИПА РАСПАДА РАЗРЫВА

Разностная схема численного метода распада разрыва строится на основе уравнений в интегральной форме (1.2). Покроем область расчета разностной сеткой из произвольных выпуклых многоугольников G_k , $k = 1, 2, \dots$, с площадью, равной S_k , с числом сторон $m = m(k)$ и их длиной, соответственно, σ_n , $n = 1, 2, \dots, m(k)$. На каждом из многоугольников аппроксимируем интегральную систему уравнений следующим образом:

$$S_k (\hat{h}_k - h_k) / \tau + \sum_{i=1}^m H_i (\sigma_i \cdot \mathbf{W}_i) = 0, \quad (2.1)$$

$$S_k (\hat{h} \hat{\mathbf{w}}_k - h \mathbf{w}_k) / \tau + \sum_{i=1}^m (H \mathbf{W})_i (\sigma_i \cdot \mathbf{W}_i) + \frac{1}{2} g \sum_{i=1}^m H_i^2 \sigma_i = \frac{1}{2} g \sum_{i=1}^m h_i^2 \sigma_i + S_k [\gamma \hat{\mathbf{f}}_k + (1 - \gamma) \mathbf{f}_k]. \quad (2.2)$$

Нижним индексом k в (2.1), (2.2) отмечены сеточные величины, которые отнесены к центру тяжести многоугольника, индексом i – сеточные величины на соответствующей стороне ячейки с номером i . Символом “домик” отмечены значения на верхнем слое по времени, τ – шаг по времени. При этом соответствующими большими буквами обозначены на границах разностных ячеек глубина H и скорость $\mathbf{W} = (U, V)^T$, которые находятся из решения задачи о распаде, как и в газодинамическом подходе [14]–[16]. Коэффициент γ задает ту или иную степень неясности в аппроксимации правой части уравнений \mathbf{f} . В частности, для трения $\mathbf{f} = 0.5\lambda \mathbf{w} |\mathbf{w}|$ в расчетах использовалась аппроксимация

$$S_k g n^2 [\gamma (\hat{h} \hat{\mathbf{w}})_k + (1 - \gamma) (h \mathbf{w})_k] |\mathbf{w}_k| / \hat{h}_k^{4/3}.$$

Поясним метод на одномерном примере. Рассмотрим две соседние разностные ячейки с номерами k_1 и k_2 , которые разделены границей σ номером i (см. фиг. 16). Полагая, что скорости и отметки свободной поверхности $\zeta = h + z$ внутри каждой ячейки являются кусочно-постоянными, а дно кусочно-линейно и непрерывно в G , находим значения глубин h_i^+ , h_i^- и скоростей u_i^+ , u_i^- слева и справа от границы i . Далее по этим значениям решаем задачу о распаде разрыва и находим на границе значения глубины H_i и скорости U_i . Отметим, что равенство нулю одного из предраспадных значений h_i^+ или h_i^- (при неполном затоплении ячейки водой) не накладывает каких-либо ограничений на вычисление “больших” величин H_i и U_i , так как решение задачи о распаде существует и в этом случае.

В двумерном случае на каждой из сторон ячейки вектор скорости W предварительно раскладывается на касательную и нормальную составляющие к границе. Распад разрыва рассчитывается для нормальных составляющих. При этом тангенциальная составляющая сносится на границу по направлению скорости, полученной в распаде. Глубины потока h_i^- , h_i^+ вычисляются для середин соответствующих сторон многоугольников. Отметки дна удобно задавать в вершинах многоугольников.

Поясним аппроксимацию в (2.2) выражения, учитывающего рельеф дна:

$$g \iint dG h \nabla z = -\frac{1}{2} g \sum_{i=1}^m h_i^2 \sigma_i.$$

Оно рассчитывается по предраспадным значениям глубин h_i . Формулу для аппроксимации получаем, преобразуя интеграл по площади многоугольника G_k к интегралу по границе σ , используя равенства $\zeta = h + z = \text{const}$ и $h = \zeta - z$:

$$\begin{aligned} g \iint dG h \nabla z &= g \zeta \iint dG \nabla z - g \iint dG \nabla \frac{1}{2} z^2 = \\ &= 0 - \frac{1}{2} g \iint dG \nabla (\zeta - z)^2 = -\frac{1}{2} g \oint d\sigma (\zeta - z)^2 = -\frac{1}{2} g \sum_{i=1}^m h_i^2 \sigma_i. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Важным свойством аппроксимации рельефа дна (2.3) является то, что равновесные решения системы уравнений мелкой воды $w = 0$, $\zeta = \text{const}$ являются решением разностных уравнений (2.1), (2.2) (см. [19]–[21]).

Условие линейной устойчивости разностной схемы на равномерной сетке из четырехугольников имеет вид $\max |C_x| + \max |C_y| \leq 1$, где C_x и C_y – числа Куранта по направлениям x и y соответственно: $C_x = (|u| + c)\tau/\Delta x$, $C_y = (|v| + c)\tau/\Delta y$; Δx , Δy – шаги разностной сетки вдоль x и y соответственно, $c = \sqrt{gh}$.

Описанная схема имеет первый порядок аппроксимации по времени и пространству (см. [16], [20]). Известен ряд алгоритмов, позволяющих при необходимости повысить порядок таких схем. В частности, это алгоритмы из [32], гибридные разностные схемы из [20], [21] (см. обзор гибридных схем в [33], [34]), подходы в [35]–[37] и др.

Необходимость в повышении порядка схемы может быть вызвана следующим: 1) при сильной неравномерности сетки по пространству схема первого порядка точности может терять свою аппроксимацию; 2) схемы первого порядка обладают значительной схемной вязкостью, что может приводить к сильному сглаживанию профилей сеточных величин в областях гладкого течения.

Один из алгоритмов повышения порядка по пространству [32] состоит в том, что u и h считаются изменяющимися теперь внутри разностной ячейки линейно (см. фиг. 1в), а не постоянными, как на фиг. 1б. С учетом этого вычисляются предраспадные значения h^+ , h^- и u^+ , u^- в серединах сторон многоугольников. Линейное распределение скоростей и отметок свободной поверхности внутри ячеек строится на основе принципа минимума производной [32]. А именно, полагаем наклон равным минимальному (по модулю) наклону сеточных функций, построенных по значениям в данной ячейке и в соседних [32], если они имеют одинаковый знак, и нулю в противном случае. Результат такого выбора из двух наклонов a и b записывается оператором

$$\text{minmod}(a, b) = 0.5(\text{sign } a + \text{sign } b) \min(|a|, |b|) \tag{2.4}$$

Такой подход, основанный на восстановлении профилей сеточных функций внутри разностной ячейки по их средним, называемый реконструкцией, был развит в работах [38]–[40]. В [38] построены, в частности, алгоритмы восстановления, в том числе полиномиальных распределений. Правило выбора наклонов сеточных функций получило в библиографии название “ограничителя” (от англ. limiter); в частности, ограничитель minmod выписан в (2.4).

Переходя к уравнениям мелкой воды, отмечаем, что использование в расчетной схеме кусочно-линейной аппроксимации свободной поверхности воды вместо кусочно-постоянной является естественным для мелких потоков со значительными уклонами дна. В этом случае расчет по схеме первого порядка давал нефизичное разрывное решение с образованием пульсирующих зон обмеления (см. фиг. 1г) и не приводил к установлению по времени для стационарных задач. В от-

личие от этого численные расчеты по методике [32] позволяют достигать установления (см. [20], [21]).

Для повышения порядка по времени следует использовать пересчет по времени типа предиктор–корректор (см. [35], [38], [41]). Более простые гибридные (переменного порядка) методы В.П. Колгана [32], основанные на дополнительном сглаживании ограничителя (2.4) и без пересчета времени, описаны в [20].

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСПАДЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО РАЗРЫВА

Задача о распаде произвольного разрыва строится на основе одномерных уравнений мелкой воды с горизонтальным дном. Распад разрыва является решением задачи Коши, когда в качестве начальных данных в полупространстве $x \leq 0$ выбираются постоянные значения глубины и скорости h_1 и u_1 , а при $x \geq 0$ – значения h_2 и u_2 . Впервые эта задача для ряда начальных значений была решена в [27]. Ниже при построении решения будем следовать логике изложения [16].

Предположим, что в течении распространяется разрыв (гидравлический прыжок) со скоростью D . Условия, которые связывают параметры среды по обе стороны от него, имеют вид

$$[(u - D)h] = 0, \quad [(u - D)^2h + 0.5gh^2] = 0. \quad (3.1)$$

Через $[f]$ для функции f обозначена разность значений функции f по обе стороны от разрыва: $f_2 - f_1$, где индекс 1 соответствует значениям f слева, 2 – справа от разрыва; (3.1) являются аналогом известных соотношений условий Ренкина–Гюгонио (см. [4]).

Решение задачи о распаде ищется в классе автомодельных конических решений [42], которые имеют для любой искомой функции f вид $f = f(\xi)$, $\xi = x/t$. При этом используется следующее соображение: если граничные значения в некоторой краевой задаче заданы в конически-автомодельном виде, то они совместимы с предложением о конической автомодельности задачи и есть смысл искать решение в этом классе. Постановка задачи о распаде разрыва удовлетворяет сформулированному свойству. Движущийся с постоянной скоростью разрыв соответствует прямой линии на плоскости (x, t) и относится к классу автомодельных конических решений.

Построение непрерывного автомодельного конического решения для одномерных уравнений мелкой воды приводит к решениям вида

$$u = \xi + c, \quad I_+ = u + 2c = C_1 - \text{const} \quad (\text{или } [I_+] = 0), \quad (3.2a)$$

либо

$$u = \xi - c, \quad I_- = u - 2c = C_2 - \text{const} \quad (\text{или } [I_-] = 0), \quad \text{где } c = \sqrt{gh}, \quad (3.2b)$$

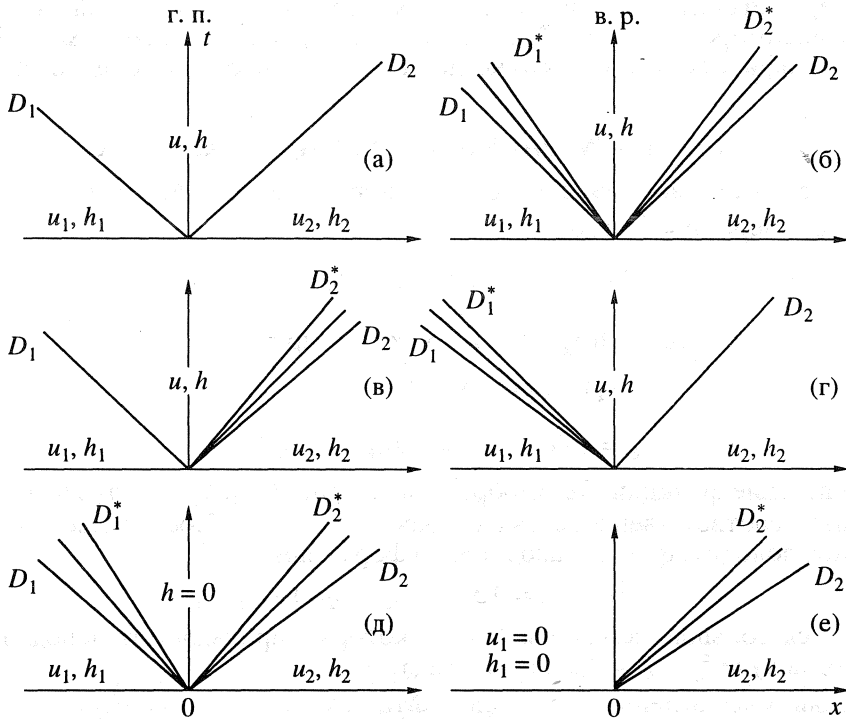
I_{\pm} – инварианты Римана (см. [4]) одномерной системы уравнений мелкой воды. Решения (3.2) – простые волны или волны разрежения (в.р.) и характеризуются постоянством одного из инвариантов Римана I .

Решение задачи о распаде разрыва может состоять из простых волн и скачков. Его построение состоит в “склеивании” в.р. и г.п. и в определении соответствующих им параметров. При этом решение задачи о распаде является комбинацией не более чем двух г.п. или в.р.

Схематично пять возможных конфигураций на плоскости (x, t) автомодельного течения отображены на фиг. 2а–2д. Здесь центральная область с постоянной скоростью и глубиной отделена от невозмущенных областей с параметрами слева и справа либо г.п., либо в.р. Конфигурация фиг. 2д – это предельный случай “обмеления”, когда в результате распада образуется область сухого дна, глубина которой падает до $h = 0$ в двух в.р., примыкающих к этой области справа и слева. Конфигурация с фиг. 2е – это частный случай правой в.р., примыкающей к сухой области, аналогично рассматривается случай левой в.р.

Для решения задачи о распаде разрыва для конфигураций в фиг. 2а–2д достаточно определить параметры u и h в центральной зоне, скорости движения скачков и границ в.р., а также параметры потока внутри в.р.

Исключим D из соотношения (3.1) с учетом невозможности г.п. разрежения, т.е. потребуем, чтобы частицы всегда двигались через разрыв из области с большей высотой слоя в область с меньшей высотой жидкости. Это условие сформулировано Рэлеем (см. [1]) и служит физическим правилом отбора решений, каковым является правило возрастания энтропии за ударными вол-



Фиг. 2.

нами в газовой динамике [4]. Исключая D из соотношений (3.1), получаем связь между u и h для левого и правого г.п. соответственно в виде

$$u - u_1 + 0.5g(h^2 - h_1^2) / \sqrt{0.5gh_1h(h_1 + h)} = 0, \quad \text{если } h \geq h_1,$$

$$u - u_2 - 0.5g(h^2 - h_2^2) / \sqrt{0.5gh_2h(h_2 + h)} = 0; \quad \text{если } h \geq h_2.$$

Условие Рэлея позволяет выбрать правильный знак перед квадратным корнем. Для анализа в.р. используем условия непрерывности римановых инвариантов (3.2) и получим связь между u и h для левой и правой в.р., соответственно, в виде

$$u - u_1 + 2\sqrt{g}(\sqrt{h} - \sqrt{h_1}) = 0, \quad \text{если } h < h_1, \tag{3.3a}$$

$$u - u_2 - 2\sqrt{g}(\sqrt{h} - \sqrt{h_2}) = 0, \quad \text{если } h < h_2. \tag{3.3б}$$

Перепишем (3.3) в компактном виде [20], произведя замену переменных $c = \sqrt{gh}$, $c_1 = \sqrt{gh_1}$, $c_2 = \sqrt{gh_2}$:

$$u - u_1 + \varphi_1(c) = 0, \quad \varphi_k = \begin{cases} (c - c_k)(S_k + 1)\sqrt{1 + S_k^{-2}} / \sqrt{2} & \text{при } S_k \geq 1, \\ 2(c - c_k) & \text{при } S_k \leq 1, \end{cases} \tag{3.4}$$

$$u - u_2 - \varphi_2(c) = 0,$$

$$S_k = c/c_k, \quad c_k = \sqrt{gh_k}, \quad k = 1, 2.$$

Уравнения (3.4) справедливы при $c_k > 0$, $k = 1, 2$. Если $c_1 = 0$ (фиг. 3е) или $c_2 = 0$, то имеет место только одна в.р. и справедливо соотношение (3.3а) или (3.3б). Исключая из (3.4) величину u , получаем уравнение для определения c :

$$F(c) \equiv \varphi_1(c) + \varphi_2(c) = u_1 - u_2. \tag{3.5}$$

В частных случаях это уравнение можно решить аналитически, но в общем случае требуется привлекать численные методы. Решая уравнение (3.5), находим u и h в центральной зоне по формулам $h = c^2/g$, $u = 0.5[u_1 + u_2 + \varphi_2(c) - \varphi_1(c)]$. Далее находятся остальные параметры.

Построим теперь алгоритм решения задачи о распаде разрыва, который был бы удобен для реализации на компьютере. Ранее, в работе [1], для нахождения решения помимо аналитического использовался графический метод, что неудобно для компьютерных реализаций.

4. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА РАСПАДА РАЗРЫВА

Расчет распада разрыва сводится к решению одного уравнения $F(c) = u_1 - u_2$ относительно c (решение обозначим через $c = \tilde{c}$), где

$$F(c) = \varphi_1(c) + \varphi_2(c) = u_1 - u_2, \quad (4.1)$$

$$\varphi_k = \begin{cases} (c - c_k)(S_k + 1)\sqrt{1 + S_k^{-2}}/\sqrt{2} & \text{при } S_k \geq 1, \\ 2(c - c_k) & \text{при } S_k \leq 1, \end{cases}$$

$$S_k = c/c_k, \quad c_k = \sqrt{gh_k}, \quad k = 1, 2.$$

Схематически поведение функции $F(c)$ изображено на фиг. 3; u_1, h_1 и u_2, h_2 в (4.1) – это значения скорости и глубины, соответственно, слева и справа от разрыва. После решения (4.1) величины u и h в центральной зоне (см. фиг. 2) находятся по формулам

$$h = c^2/g, \quad u = 0.5[u_1 + u_2 + \varphi_2(c) - \varphi_1(c)].$$

Далее определяются большие величины U и H , которые принадлежат неподвижной границе ячейки или лежат на луче $\xi = x/t = 0$ в плоскости (x, t) .

Непосредственным вычислением нетрудно найти, что $\partial F/\partial c > 0$ и $\partial^2 F/\partial c^2 \geq 0$ (см. [21], [22]). В частности,

$$\partial \varphi_k / \partial c = \begin{cases} (2S_k^2 + 1 + S_k^{-2}) / [\sqrt{2} S_k \sqrt{1 + S_k^{-2}}] & \text{при } S_k > 1, \\ 2 & \text{при } S_k \leq 1. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $\partial F/\partial c > 0$ и т.д. Эти свойства производных показывают, что $F(c)$ монотонна и выпукла вниз. Следовательно, (4.1) удобно решать методом Ньютона, а именно итерационным процессом:

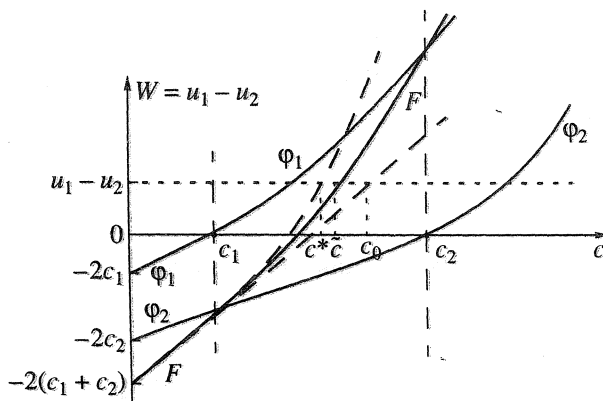
$$c^{n+1} = c^n - [F(c^n) - (u_1 - u_2)] / [\partial F(c^n) / \partial c],$$

где $n = 0, 1, \dots$ – номер итерации, c^0 – начальное приближение. Поскольку функция выпукла вниз, то допустим выбор в качестве c^0 произвольного положительного числа. Но, по-видимому, наиболее удобным начальным приближением для итерационного процесса является линейное (или “звуковое”) приближение

$$c_0 = 0.25(u_1 - u_2) + 0.5(c_1 + c_2), \quad (4.2)$$

где c_0 совпадает с точным решением уравнения (4.1), если $c \leq c_1$ и $c \leq c_2$. Иначе (см. фиг. 3) c_0 лежит правее точного решения, что позволяет обеспечить монотонную сходимость метода Ньютона.

В целях убыстрения вычислений можно учесть, что $1 < q = 1 + S_k^{-2} < 2$ при $S_k > 1$, и применить для нахождения \sqrt{q} трехчлен наилучшего равномерного приближения $\sqrt{q} \approx q_0 = 0.443451 + 0.629462q - 0.072268q^2$ с максимальной относительной погрешностью 0.00066, а затем при необходимости – однократное уточнение по методу Ньютона $\sqrt{q} \approx q_1 = 0.5(q_0 + q/q_0)$, что дает уже погрешность не более 3×10^{-7} . Такой точности вычисления квадратного корня более чем достаточно при определении распадных значений во всех случаях.



Фиг. 3.

Таблица

Разрывы	Левое расположение	Правое расположение
Гидравлический прыжок	Если $u > 0$ и $c > c_1$, то $D_1 = u_1 - c \sqrt{1 + S_1^2} / \sqrt{2}$, где D_1 – скорость г. п. Если $D_1 < 0$, то $H = h$, $U = u$, иначе $H = h_1$, $U = u_1$	Если $u < 0$ и $c > c_2$, то $D_2 = u_2 + c \sqrt{1 + S_2^2} / \sqrt{2}$, где D_2 – скорость г. п. Если $D_2 > 0$, то $H = h$, $U = u$, иначе $H = h_2$, $U = u_2$
Волна разрежения	Если $u > 0$ и $c \leq c_1$, то $c_1^* = c_1 + (u_1 - u)/2$, $D_1^* = u - c_1^*$, $D_1 = u - c_1$, где D_1^* , D_1 – скорости границ в. р. Если $D_1^* < 0$, то $U = u$, $H = h$. Если $D_1 > 0$, то $U = u_1$, $H = h_1$. Иначе $x = 0$ лежит внутри в. р. и $U = c^*$, $H = (c^*)^2/g$, где $c^* = (2c_1 + u_1)/3$	Если $u < 0$ и $c \leq c_2$, то $c_2^* = c_2 - (u_2 - u)/2$, $D_2^* = u + c_2^*$, $D_2 = u_2 + c_2$, где D_2^* , D_2 – скорости границ в. р. Если $D_2^* > 0$, то $U = u$, $H = h$. Если $D_2 < 0$, то $U = u_2$, $H = h_2$. Иначе $x = 0$ лежит внутри в. р. и $U = -c^*$, $H = (c^*)^2/g$, где $c^* = (2c_2 - u_2)/3$

После решения уравнения (4.1) определяются большие величины U, H на границах ячеек. Для этого необходимо проанализировать положение луча $\xi = x/t = 0$ на плоскости (x, t) . Анализ проведен в работах [19]–[21], и его результат представим в виде таблицы.

Скорости г.п. обозначаем через D_1 и D_2 ; D_1^* и D_2^* – внутренние скорости в.р. (см. фиг. 2), D_1 и D_2 – внешние скорости в.р., которые являются границами в.р. в плоскости (x, t) (см. фиг. 2).

В завершение анализа рассмотрим варианты, когда решения уравнения (4.1) не существует, например при обмелении (фиг. 2д). Этот случай реализуется, если $u_1 - u_2 < -2(c_1 + c_2)$. При этом возникают либо две в.р., либо одна (правая или левая, см. фиг. 2д, 2е). Последняя имеет место, когда в начальный момент времени $t = 0$ с одной стороны от линии распада имелись нулевые глубины и скорости. Пусть для определенности $h_1 = 0$ и $u_1 = 0$, тогда на плоскости (x, t) имеем одну в.р. (правую), переводящую область с параметрами u_2 и h_2 в область с нулевой глубиной. Скорости границ в.р. равны $D_2^* = u_2 - 2c_2$, $D_2 = u_2 + c_2$. (Эти формулы следуют из таблицы, если положить $c_2^* = 0$.) Следовательно, если $D_2^* \geq 0$, то $H = 0$, $U = 0$. Если $D_2 \leq 0$, то $U = u_2$, $H = h_2$. Иначе $U = -c^*$, $H = (c^*)^2/g$, где $c^* = (2c_2 - u_2)/3$. Аналогично проводится анализ одной левой в.р. (Анализ двойной конфигурации в.р. с сухим дном сводится в проведенному выше: такие две в.р. рассматриваются независимо.)

Исследуем погрешность линейного приближения c_0 из (4.2) относительно точного решения $c = \tilde{c}$ (см. [20]). Исходим из предположения $c_1 \leq c_2$, что не ограничивает общности рассуждений. Как уже отмечалось выше, в области $c \leq c_1$ величина c_0 есть точное решения уравнения (4.1). Рассмотрим область $c_1 \leq c \leq c_2$. Имеем оценки

$$\varphi_1(c) = (c^2 - c_1^2) \sqrt{1 + c_1^2/c^2} / (c_1 \sqrt{2}) < (c^2 - c_1^2) / c_1,$$

откуда $F_*(c) = (c^2 - c_1^2) / c_1 + 2(c - c_2) > F(c)$ и, следовательно, решение уравнения $F_*(c) = u_1 - u_2$ равно $c_* = 2\sqrt{c_1 c_0} - c_1$ и лежит левее точного решения (см. фиг. 3). Принимая, что $c_0 = (1 + \alpha)c_1$, где $0 < \alpha \leq 1$, получаем оценку относительной погрешности δ_1 :

$$\delta_1 = (c_0 - \tilde{c}) / \tilde{c} < (c_0 - c_*) / c_1 = 2 + \alpha - 2\sqrt{1 + \alpha} = \alpha^2/4 - \alpha^3/8 + O(\alpha^4). \tag{4.3}$$

Рассмотрим теперь область, где $c > c_2$:

$$\varphi_1(c) < (c^2 - c_1^2) / c, \quad \varphi_2(c) < (c^2 - c_2^2) / c_2.$$

Следовательно, решение $c = c_{**}$ уравнения

$$F_{**}(c) = (c^2 - c_1^2)/c_1 + (c^2 - c_2^2)/c_2 = u_1 - u_2,$$

где $c_{**} = \sqrt{c_1 c_2 [1 + (u_1 - u_2)/(c_1 + c_2)]}$, так же, как c_* , лежит левее точного решения \tilde{c} .

Пусть $c_2 = (1 + \beta)c_1$, где $\beta < \alpha$, так как $c_2 < c_0$. Из равенства

$$c_0 = (1 + \alpha)c_1 = (u_1 - u_2)/4 + (c_1 + c_2)/2 = (u_1 - u_2)/4 + c_1(2 + \beta)/2$$

находим, что $u_1 - u_2 = 2c_1(2\alpha - \beta)$. Тогда

$$\begin{aligned} \delta_2 &= (c_0 - \tilde{c})/\tilde{c} < (c_0 - c_{**})/c_1 = 1 + \alpha - \sqrt{(1 + \beta)[1 + (2\alpha - \beta)/(1 + \beta/2)]} = \\ &= \alpha^2/4 + (\alpha - \beta)^2/4 - \alpha^2(\alpha - \beta)/2 - \beta^3/8 + O(\alpha^4). \end{aligned} \quad (4.4)$$

При $\alpha = \beta$ (или $c_0 = c_2$) оценки δ_1 и δ_2 совпадают, что обеспечивает непрерывность в оценке погрешности. Нетрудно найти, что максимальная погрешность в (4.3) и (4.4) имеет место при $\beta = 0$ и равна $\delta_{\max} = \max(\delta_1, \delta_2) = \alpha^2/2 - \alpha^3/2 + O(\alpha^4) < \alpha^2/2$.

Таким образом, максимальная относительная погрешность линейного приближения c_0 не превышает $\alpha^2/2$ и, следовательно, для $h = c^2/g$ не превышает α^2 . Аналогично можно показать, что максимальная погрешность линейного приближения для скорости $u_0 = 0.5(u_1 + u_2) + c_1 - c_2$ имеет величину $\delta_u = (u_0 - u)/c_1 = 3\alpha^3/8 + O(\alpha^4)$.

Приведенные формулы позволяют априори оценивать погрешность решения (4.2), сравнивая значения c_0 и c_1 . Например, если $\alpha = (c_0 - c_1)/c_1 = 0.1$, а $u_1 = u_2$, то с учетом (4.2) имеем $c_2 = 1.2c_1$ и $h_2 = 1.44h_1$. Следовательно, при соотношении глубин на разрыве 1 : 1.5 линейное приближение позволяет вычислить распадные значения h с погрешностью не хуже 1%. Опыт численного использования алгоритма распада показал, что точности 1% достаточно для нахождения распадных значений практически в любых задачах. Только при решении 2–3% задач на границах разностных ячеек возникает необходимость дальнейшего уточнения значений итерациями по Ньютону (на интенсивных скачках). Таким образом, использование в качестве начального приближения значения (4.2) позволяет резко уменьшить число итераций в наиболее часто выполняемых шагах алгоритма и тем самым повысить быстродействие метода в целом.

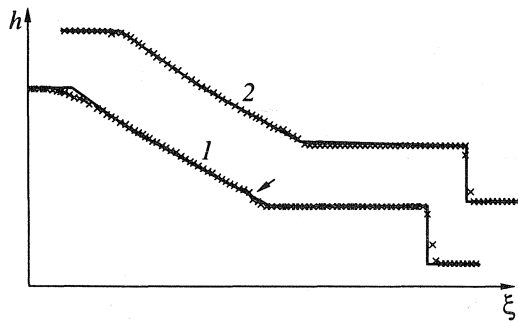
5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

В этом разделе представлены результаты численных расчетов ряда одномерных и двумерных задач, которые иллюстрируют свойства и возможности метода. Более подробное изложение части из них можно найти в работах [19]–[23].

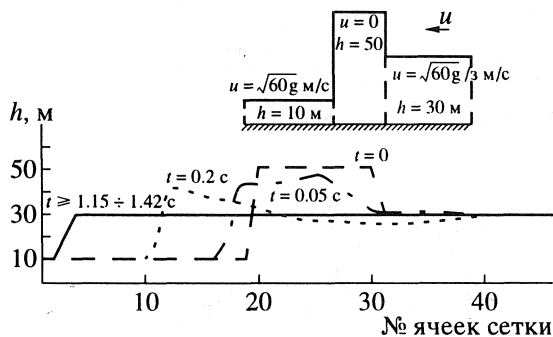
На фиг. 4 представлены расчеты одномерной задачи о распаде разрыва с соотношением начальных глубин $h_1 : h_2 = 10 : 1$ и нулевой начальной скоростью, дно считалось горизонтальным. Задача имеет аналитическое решение [1] и является известным тестом для проверки работоспособности численных алгоритмов. На фиг. 4 приведены численные результаты расчетов на сетке в 100 разностных ячеек, которые представлены в автомодельной переменной $\xi = x/(t\sqrt{gh_1})$. Сплошная линия – это аналитическое решение, крестиками помечены на линии 1 расчеты по схеме первого порядка точности, на линии 2 – расчеты по гибридной схеме переменного порядка точности В.П. Колгана [32], с ограничениями на величины наклонов и без пересчета по времени.

Результаты расчетов демонстрируют несколько более высокую точность гибридной схемы по сравнению со схемой первого порядка точности. При применении гибридной схемы более точно рассчитывается волна разрежения (фиг. 4, левая часть графиков). Гибридная схема позволила также устранить небольшой излом в результатах по схеме первого порядка на месте начального разрыва при $t = 0$, который помечен стрелкой. Максимальная погрешность расчета глубины по гибридной схеме относительно начальной глубины $h_1 = 10$ м не превышала 1%. Что касается фронта гидравлического прыжка, то обе схемы на нем монотонны и размазывают его всего на 2–3 разностные ячейки.

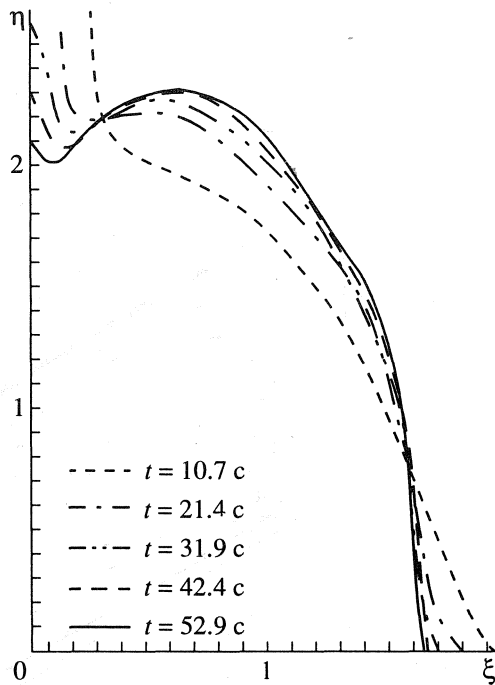
На фиг. 5 представлены расчеты, по-видимому, нового и трудного одномерного теста, который формулируется следующим образом. В начальный момент времени расчетная область по x ($0 \leq x \leq L$, L – длина области) разбивается на большое число (≥ 100) разностных ячеек. Далее, на нескольких (от 2 до 4) разностных ячейках в начале области задается постоянное значение глубины $h = h_0 = 100$ м, а в остальных ячейках $h \equiv 0$. При этом начальная скорость задается нулевой



Фиг. 4.



Фиг. 6.



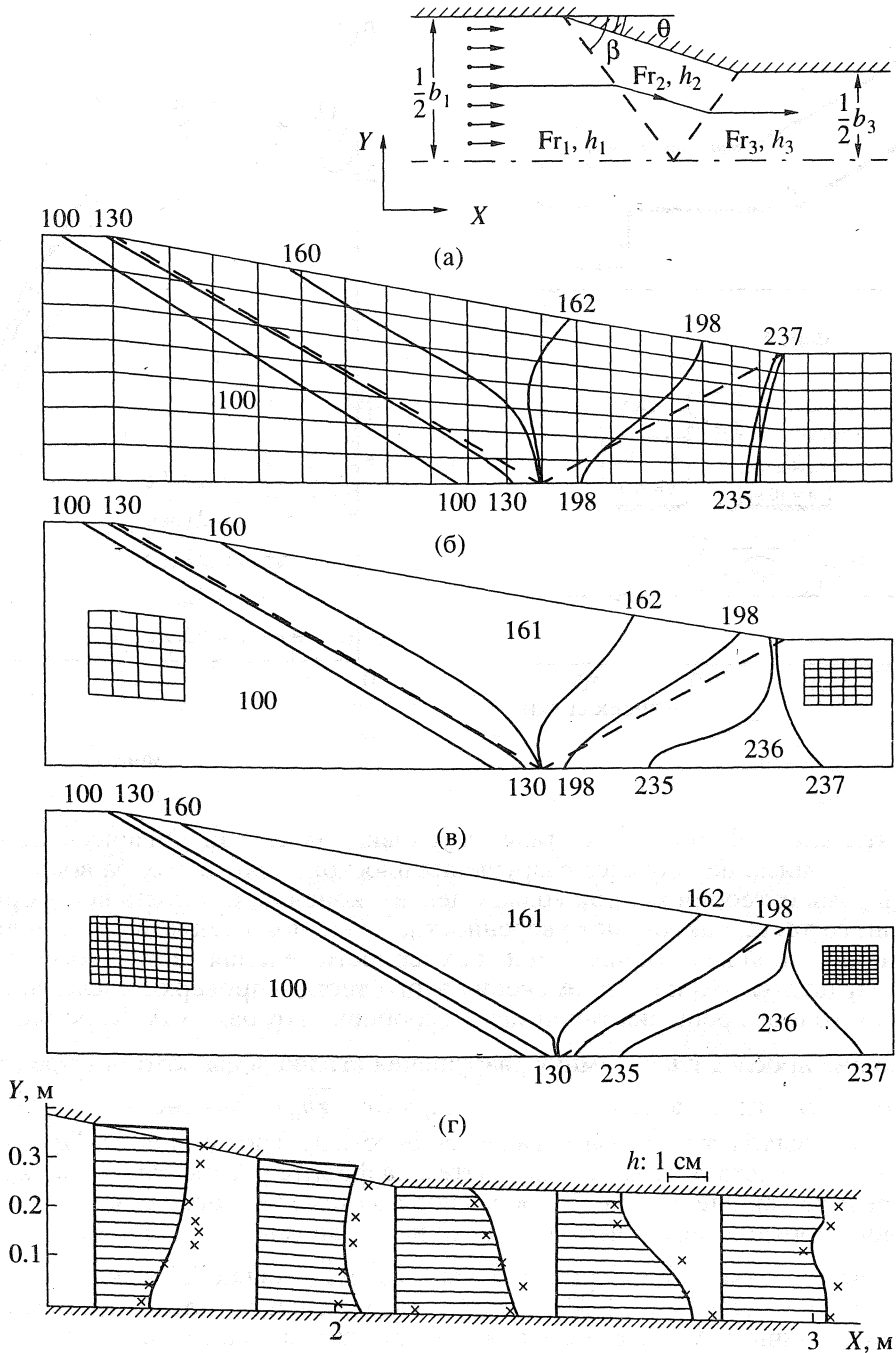
Фиг. 5.

и дно – горизонтальным. В точке $x = 0$ ставится условие симметрии. Физическая интерпретация такой задачи – это описание процесса разрушения плоского узкого столба воды под действием силы тяжести в рамках теории мелкой воды. Следует, конечно, отметить некоторую формализованность данного теста, так как нет уверенности, что приближение теории мелкой воды без учета гидродинамической неустойчивости и трехмерности течения дает в этом случае физически разумные результаты. Но цель применения этого теста – проверка численного алгоритма. О существовании точного решения такой задачи сообщил авторам А.А. Коробкин.

На фиг. 5 можно проследить динамику разрушения столба воды, которая представлена в координатах $\eta = th(x, t)/h_0$, где t – время в секундах и $\xi = x/(t\sqrt{gh_0})$. Заметно, что с течением времени численное решение выходит на асимптотическое автомодельное решение. При этом скорость жидкости линейно возрастает вдоль ξ , падая затем на фронте распространения жидкости до нуля. Расчеты, представленные на фиг. 5, проведены по схеме первого порядка. (Расчеты по схемам повышенного порядка давали небольшие, но неустранимые осцилляции.)

На фиг. 6 даны расчеты стационарного скачка, которые являются важными при тестировании разностных схем (см., например, [43]–[45]). Здесь приведены последовательные стадии изменения по времени величины h по мере выхода ее на стационарный гидравлический скачок (прыжок). Начальные данные (на врезке) были подобраны таким образом, чтобы обеспечить выход на скачок. Скачок “размазан” в процессе численного счета на две ячейки разностной сетки.

Переходим к изложению результатов расчетов некоторых двумерных стационарных задач. Постановка одной из них схематически изображена на врезке фиг. 7. Поток воды в сужающемся симметричном быстротоке с числом Фруда $Fr_1 > 1$ попадает из прямоугольного канала (лотка) с наклонным дном в область, где стенки сужаются под углом θ , обеспечивая уменьшение ширины потока. При этом от стенок сужения отходят г.п. (под углом β), которые отражаются от оси симметрии потока, затем снова от стенок и т.д., образуя стационарную систему возвышенностей и впадин уровня свободной поверхности воды. На фиг. 7 представлены результаты расчетов задачи с $\theta = 10^\circ$, $Fr_1 = 3$, $h_1 = 100$ мм, $b_1 = 1$ м, $b_3 = 0.511$ м (с нулевым уклоном дна) на вложенных разностных сетках: 7×26 (а), 14×52 (б) и 28×104 (в). Расчеты, проведенные по схеме первого порядка точности в продольном направлении и по гибридной схеме переменного порядка в поперечном типа В.П. Колгана [32], демонстрируют сходимость численного решения к точному, которое отмечено штриховой линией и представляет собой систему стационарных гидравличес-

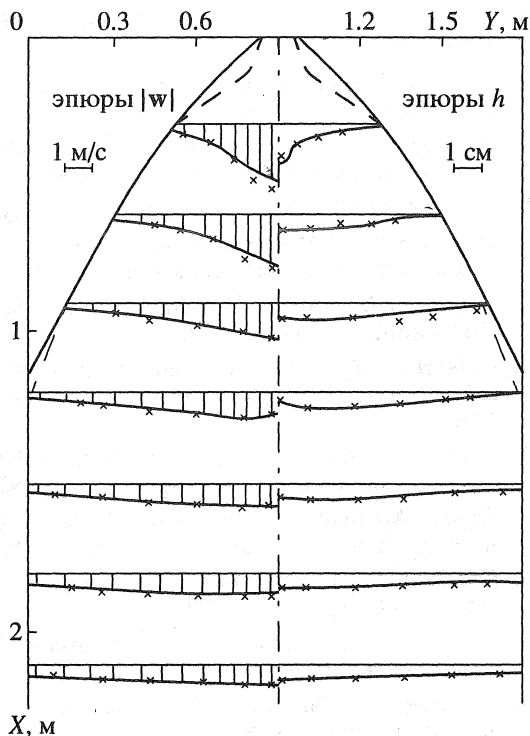


Фиг. 7.

ких прыжков. Сплошные линии – это изолинии уровня свободной поверхности (цифры – уровень в мм), полученные из расчетов. По мере увеличения разрешения сетки заметна все более отчетливая локализация гидравлических прыжков.

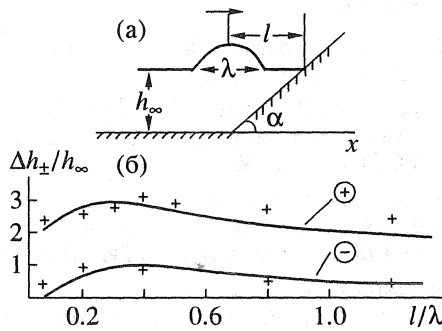
На фиг. 7г приведено сравнение уже экспериментально полученных величин уровней свободной поверхности воды h (крестики) с расчетными значениями (сплошные линии). Согласие с экспериментом удовлетворительное. В этой задаче задавались немного другие параметры быстрого течения, взятые из экспериментов [46]: угол наклона дна полагался равным 0.1, коэффициент шероховатости $n = 0.014$ (материал – бетон), $Fr_1 = 2.37$, $h_1 = 30$ мм и $u_1 = 1.3$ м/с. Геометрические характеристики быстрого течения составляли $\theta = 10^\circ$, $b_1 = 0.52$ м, $b_3 = 0.26$ м. Трение в расчетах учитывалось по формуле (2.3), где $0.5 \leq \gamma \leq 1$.

Фиг. 8 посвящена расчетам и изучению особенностей стационарного растекания воды за трубой диаметром 0.1 м и углом раствора 20°. Поток вытекает через оголовок на бетонную плоскость с постоянным наклоном 0.05 и коэффициентом шероховатости $n = 0.014$. Постановка задачи соответствует экспериментам, выполненным в лаборатории Г.Я. Волченкова (см. [46]). С учетом симметрии задачи расчет проводился в прямоугольной области длиной 3.3 м и шириной 0.9 м. Расчет производился по гибридной схеме и с пересчетом наклонов сеточных величин на ячейках через каждые 10 слоев по времени. На фиг. 8 проведено сравнение экспериментальных значений эпюр скоростей в м/с и глубин потока (крестики) с полученными в численных расчетах при уклоне дна 0.05. Совпадение данных оказалось удовлетворительным. Сплошными линиями на фиг. 8 нанесены рассчитанные границы растекания потока, штриховыми линиями – границы растекания потока из эксперимента с оголовком (в расчетах не учитывался). Заметно, что влияние оголовка сказалось лишь в непосредственной близости выхода из трубы. Следует напомнить, что расчет этой задачи велся по единой сквозной методике, которая не нуждалась в выделении каким-либо образом границ областей, занятых водой, и в этом ее преимущество.



Фиг. 8.

На фиг. 9 представлены результаты серии расчетов наката длинных волн-солитонов на берег с амплитудой и скоростью, пропорциональными $\cos^2(\lambda x - l)$, $|\lambda x - l| \leq \pi/2$, см. фиг. 9а; $\text{tg } \alpha = 0.3$. По осям координат на фиг. 9б отложены значения $\Delta h_{\pm}/h_{\infty}$ – относительные величины повышения и понижения уровня воды на откосе (например, $\Delta h_{-} = |h_{\text{min}} - h_{\infty}|$) отнесенные к равновесному уровню h_{∞} и l/λ – относительные длины откоса. В расчетах по схеме первого порядка (сплошные линии) варьировались l и λ , крестиками отмечены экспериментальные данные [47], [48]. При больших значениях $l/\lambda \geq 0.67$ расчетная кривая изменений уровня $\Delta h_{+}/h_{\infty}$ лежит ниже экспериментальной, что объясняется, по-видимому, неприменимостью в этой области уравнений мелкой воды. При малых l/λ совпадение с экспериментом удовлетворительное.



Фиг. 9.

Построенные и исследованные разностные схемы распада разрыва для решения уравнений мелкой воды показали свою работоспособность и надежность в численных расчетах различного рода течений с умеренными и большими числами Фруда. Они могут быть рекомендованы для использования в практике гидравлических расчетов.

Авторы выражают благодарность Г.Я. Волченкову, В.Н. Коньшину и А.А. Коробкину за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стокер Дж. Волны на воде. Математическая теория и приложения. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
2. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. М.: Физматгиз, 1963. Ч. 1.
3. Вольцингер Н.Е., Пясковский Р.В. Теория мелкой воды. Океанологические задачи и численные методы. Л.: Гидрометеиздат, 1977.
4. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978.

5. Марчук А.Г., Чубаров Л.Б., Шокин Ю.И. Численное моделирование цунами. Новосибирск: Наука, 1983.
6. Русанов В.В. Расчет взаимодействия нестационарных ударных волн с препятствиями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1961. Т. 1. № 2. С. 267–279.
7. Лятхер В.М., Милитеев А.Н. Исследование плана течений в нижнем бьефе гидротехнических сооружений численными методами // Гидротехн. стр-во. 1978. № 6. С. 27–32.
8. MacCormack R.W. The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering: AIAA Paper, 1969. № 69-354. 7 p.
9. Пандольфи М. Численные эксперименты при движении воды со свободной поверхностью и ступенчатыми волнами // Числ. решение задач гидромехан. М.: Мир, 1977. С. 64–75.
10. Шокин Ю.И., Яненко Н.Н. Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1985.
11. Федотова З.И. О применении инвариантной разностной схемы к расчету колебаний жидкости в бассейне // Числ. методы механ. сплошной среды. Новосибирск: ВЦСО АН СССР, 1978. Т. 9. № 3. С. 137–146.
12. Courant R., Isaacson E., Rees M. On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences // Commun Pure and Appl. Math. 1952. V. 5. № 3. P. 243–255.
13. Para L. Application of the Courant-Isaacson-Rees method to solve the shallow-water hydrodynamic equations // Appl. Math. and Comput. 1984. V. 15. № 1. P. 85–92.
14. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений гидродинамики // Матем. сб. 1959. Т. 47 (89). № 3. С. 271–306.
15. Алапыкин Г.В., Годунов С.К., Киреева И.Л., Плинер Л.А. Решение одномерных задач газовой динамики в подвижных сетках. М.: Наука, 1970.
16. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
17. Louaked M., Hanich L. A high resolution algorithm for the shallow water equations in general coordinates // The Sixth Internat. Symp. on CFD. Sept. 4–8, 1995. Lake Tahoe, Nevada, USA. A Collection of Techn. Papers. V. 2. P. 725–731.
18. Roe P.L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes // J. Comput. Phys. 1981. V. 43. № 2. P. 357–372.
19. Семенов А.Ю. Применение метода Годунова к уравнениям теории мелкой воды с учетом рельефа дна // Тр. VIII конф. молодых ученых Моск. физ.-техн. ин-та (27 марта – 7 апреля 1983). – Деп. в ВИНТИ АН СССР. Ч. 1. № 5927-83 Деп. С. 150–157.
20. Беликов В.В., Семенов А.Ю. Метод Годунова с модификацией Колгана для численного решения двумерных уравнений мелкой воды // Тр. X конф. молодых ученых Моск. физ.-техн. ин-та (23 марта–7 апреля 1985). – Деп. в ВИНТИ АН СССР. Ч. 1. № 5983-85 Деп. С. 179–214.
21. Беликов В.В., Семенов А.Ю. Явный численный метод распада разрывов для решения уравнений мелкой воды: Препринт № 42. М.: Ин-т общей физ. АН СССР, 1988. 44 с.
22. Belikov V.V., Semenov A.Yu. Godunov's type method for a numerical solution of the two-dimensional shallow water equations // Proc. 17th Session of Sci. and Methodol. Seminar on Ship Hydrodynamics. (Oct. 17–22, 1988. Bulgaria, Varna) 1988. V. 2. P. 56/1–56/6.
23. Belikov V.V., Semenov A.Yu. Godunov's type method for numerical solution of the shallow water equations // Proc. of SU-Jpn Simp. on CFD. (Sept. 9–16, 1988. USSR, Khabarovsk). М.: Comput. Centre USSR Acad. Sci., 1989. V. 2. P. 177–183.
24. Воеводин А.Ф., Шугрин С.М. Численные методы расчета одномерных систем. Новосибирск: Наука, 1981.
25. Овсянников Л.В., Макаренко Н.И., Налимов В.И. и др. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука, 1985.
26. Friedrichs K.O. On the derivation of the shallow water theory. Appendix to "The formation of breakers and bores by J.J. Stoker" // Commun Pure and Appl. Math. 1948. V. 1. № 1. P. 81–85.
27. Stoker J.J. The formation of breakers and bores // Commun Pure and Appl. Math. 1948. V. 1. № 1. P. 1–87.
28. Гладышев М.Т. К задаче о распаде начального разрыва в открытых руслах // Изв. вузов. Сер. Энергетика. 1968. № 4. С. 81–88.
29. Баклановская В.Ф., Пальцев Б.В., Чечель И.И. О краевых задачах для системы уравнений Сен-Венана на плоскости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1979. Т. 19. № 3. С. 708–725.
30. Нажёткина Э.И., Русанов В.В. Аппроксимация граничных условий в разностных схемах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1980. Т. 20. № 6. С. 1483–1499.
31. Погорелов Н.В., Семёнов А.Ю. Модификация неотражающих граничных условий при газодинамическом моделировании в астрофизике // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1996. Т. 36. № 3. С. 135–146.

32. Колган В.П. Применение принципа минимальных значений производных к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Уч. зап. ЦАГИ. 1972. Т. 3. № 6. С. 68–77.
33. Копченков В.И., Крайко А.Н. Построение монотонной конечно-разностной схемы второго порядка аппроксимации для уравнений гиперболического типа: Техн. отчет ЦИАМ, № 9108. М., 1980. 42 с.
34. Копченков В.И., Крайко А.Н. Монотонная разностная схема второго порядка для гиперболических систем с двумя независимыми переменными // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1983. Т. 23. № 4. С. 848–859.
35. Родионов А.В. Монотонная схема второго порядка аппроксимации для сквозного расчета неравновесных течений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1987. Т. 27. № 4. С. 585–593.
36. Родионов А.В. Повышение порядка аппроксимации схемы С.К. Годунова // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1987. Т. 27. № 12. С. 1853–1860.
37. Меньшов И.С. Повышение порядка аппроксимации схемы Годунова на основе решения обобщенной задачи Римана // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1990. Т. 30. № 9. С. 1357–1371.
38. Harten A., Osher S., Engquist B., Chakravarthy S.R. Some results on uniformly high-order accurate essentially nonoscillatory schemes // Appl. Numer. Math. 1986. V. 2. № 3–5. P. 347–377.
39. Harten A., Osher S. Uniformly high-order accurate nonoscillatory schemes. I // SIAM. J. Numer. Anal. 1987. V. 24. № 2. P. 279–309.
40. Harten A., Engquist B., Osher S., Chakravarthy S.B. Uniformly high-order accurate nonoscillatory schemes. III // J. Comput. Phys. 1987. V. 71. № 2. P. 231–303.
41. Каменецкий В.Ф., Семенов А.Ю. Самосогласованное выделение разрывов при сквозных расчетах газодинамических течений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1994. Т. 34. № 10. С. 1489–1502.
42. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.
43. Иванов М.Я., Корецкий В.В., Курочкина Н.Я. Исследование свойств разностных схем сквозного счета первого порядка аппроксимации // Числ. методы механ. сплошной среды. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1980. Т. 11. № 1. С. 81–110.
44. Иванов М.Я., Корецкий В.В., Курочкина Н.Я. Исследование свойств разностных схем сквозного счета второго порядка аппроксимации // Числ. методы механ. сплошной среды. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1980. Т. 11. № 2. С. 41–63.
45. Иванов М.Я., Корецкий В.В., Курочкина Н.Я. Исследование свойств разностных схем сквозного счета повышенного порядка аппроксимации // Числ. методы механ. сплошной среды. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1980. Т. 11. № 4. С. 83–103.
46. Беликов В.В., Волченков Г.Я., Пейч Ю.Л. и др. Разработка методики определения деформаций и оптимальных размеров укреплений на выходах из косогорных водопропускных труб: Научно-техн. отчет ЦНИИС. М.: ЦНИИС, 1985. Тема № ИП-ХI-5-84/85, разд. 1. 181 с.
47. Мишуев А.В., Сладкевич М.С., Сильченко А.С. Анализ экспериментальных результатов и численного метода расчета длинных волн на откос // Совещание по цунами. Горький, 1984. С. 121–123.
48. Лятхер В.М., Милитеев А.Н., Мишуев А.В., Сладкевич М.С. Исследование наката волн цунами на берега численными методами // Исслед. цунами. Возникновение и распространение в океане волн цунами. М.: 1986. № 1. С. 110–119.