Математические заметки

Том 105 выпуск 4 апрель 2019

УДК 517.521

# Система функций, ортогональная в смысле Соболева и порожденная системой Уолша

**М. Г. Магомед-Касумов**

Изучены свойства функций из ортогональной по Соболеву системы $\mathfrak{W}_r$, порожденной системой Уолша. В частности, получены рекуррентные соотношения для функций из $\mathfrak{W}_1$. Доказана равномерная сходимость рядов Фурье по системе $\mathfrak{W}_r$ к функциям $f$ из пространств Соболева $W^r_{L^p}$, $p \geqslant 1$, $r = 1, 2, \dots$ .

Библиография: 9 названий.

**Ключевые слова:** ортогональность в смысле Соболева, система Уолша, равномерная сходимость, рекуррентное соотношение.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm12069

**1. Введение.** Система функций Уолша $\mathfrak{W} = \mathfrak{W}_0 = \{w_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ определяется с помощью функций Радемахера $r_k(x) = \operatorname{sign}\sin 2^{k+1}\pi x$ следующим образом [1]. Положим $w_0(x) = 1$. Представляя $n \geqslant 1$ в виде двоичного разложения $n = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon_i 2^i$, где $\varepsilon_k = 1$ и $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$, определим

$$w_n(x) = \prod_{i=0}^{k} (r_i(x))^{\varepsilon_i}. \tag{1.1}$$

Введем в рассмотрение новую систему функций $\mathfrak{W}_r$, $r \geqslant 1$, порожденную системой функций Уолша $\mathfrak{W}$ ($x \in [0, 1]$):

$$w_{r,k}(x) = \frac{x^k}{k!}, \qquad 0 \leqslant k \leqslant r-1, \tag{1.2}$$

$$w_{r,k}(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^x (x-t)^{r-1} w_{k-r}(t)\, dt, \qquad k \geqslant r. \tag{1.3}$$

Пусть $L^p$ – пространство функций, суммируемых на отрезке $[0, 1]$, т.е.

$$L^p = \left\{ f : \int_0^1 |f(x)|^p\, dx < \infty \right\}. \tag{1.4}$$

Через $W^r_{L^p}$, $r \geqslant 1$, обозначим пространство Соболева, состоящее из непрерывно дифференцируемых $r-1$ раз функций $f = f(x)$, заданных на отрезке $[0, 1]$, для

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-31-00477 мол_а).

© М. Г. Магомед-Касумов, 2019

которых $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна, а $f^{(r)} \in L^p$. Заметим, что $\mathfrak{W}_r \subset W^r_{L^1}$ при любом $r$. В пространстве $W^r_{L^2}$ определим скалярное произведение соболевского типа

$$\langle f, g\rangle = \sum_{s=0}^{r-1} f^{(s)}(0)g^{(s)}(0) + \int_0^1 f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)\,dt, \tag{1.5}$$

которое превращает $W^r_{L^2}$ в гильбертово пространство. Нетрудно показать (см. п. 2), что ряд Фурье функции $f \in W^r_{L^2}$ по системе $\mathfrak{W}_r$ принимает следующий вид:

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \sum_{k=r}^{\infty} c_{r,k}(f)w_{r,k}(x), \tag{1.6}$$

где

$$c_{r,k} = \int_0^1 f^{(r)}(t)w_{k-r}(t)\,dt.$$

Общая теория систем функций, ортогональных относительно соболевского скалярного произведения вида (1.5) и порожденных классическими ортогональными системами, разработана в работах Шарапудинова (см., например, [2]). В работах [2]–[5] рассмотрены конкретные соболевские системы $\Phi_r$, $r \geqslant 1$, порожденные различными классическими ортогональными системами: системой Хаара, системой полиномов Чебышева, Лежандра, Якоби, Лагерра. Для функций из систем $\Phi_r$ получены явные представления, исследованы их асимптотические свойства и изучены аппроксимативные свойства частичных сумм рядов Фурье по указанным системам. Аналогичные результаты получены и для систем, порожденных классическими дискретными ортогональными системами, такими как система полиномов Чебышева дискретной переменной [6], система полиномов Мейкснера [7], [8]. Нерассмотренной оставалась ортогональная по Соболеву система функций $\mathfrak{W}_r$, порожденная системой Уолша. Данная работа призвана частично восполнить этот пробел.

Основная цель работы заключается в исследовании вопроса о равномерной сходимости рядов Фурье по системе $\mathfrak{W}_r$ для функций $f \in W^r_{L^p}$, $p \geqslant 1$. Прежде всего, отметим, что, применяя теорему 2.1, доказанную в общем случае в [2], к системе $\mathfrak{W}_r$, можно получить следующее утверждение.

Утверждение 1. *Система функций $\mathfrak{W}_r$ полна в $W^r_{L^2}$ и ортонормирована относительно скалярного произведения* (1.5).

В той же работе исследованы вопросы равномерной сходимости рядов Фурье по системам, ортогональным относительно скалярных произведений вида (1.5), для функций из пространств Соболева. Из теоремы 2.2 работы [2] вытекает следующее утверждение.

Утверждение 2. *Ряд Фурье по системе $\mathfrak{W}_r$ функции $f \in W^r_{L^2}$ равномерно на $[0,1]$ сходится к $f$.*

Используя базисность системы Уолша в пространствах $L^p$, $p > 1$, данное утверждение можно усилить, распространив его на более широкий класс функций – $W^r_{L^p}$, $p > 1$.

Теорема 1. *Для любой функции $f \in W^r_{L^p}$, $p > 1$, $r = 1, 2, \dots$, ряд Фурье этой функции по системе $\mathfrak{W}_r$ равномерно на $[0,1]$ сходится к $f$.*

Отметим, что ряд Фурье по системе $\mathfrak{W}_r$ можно определить для любой функции $f \in W^r_{L^1}$. В связи с этим возникает естественный вопрос о том, справедливо ли утверждение теоремы 1 для случая $p = 1$. Ответ на этот вопрос является основным результатом настоящей статьи.

Теорема 2. *Для любой функции $f \in W^r_{L^1}$, $r = 1, 2, \dots$, ряд Фурье этой функции по системе $\mathfrak{W}_r$ равномерно на $[0, 1]$ сходится к $f$.*

**2. Некоторые свойства систем функций $\mathfrak{W}_r$.** Используя формулу дифференцирования под знаком интеграла [9; п. 509, с. 667], из (1.2) и (1.3) выводим

$$(w_{r,k}(x))^{(\nu)} = \begin{cases} w_{r-\nu,k-\nu}(x), & \nu \leqslant \min\{k, r\}, \\ 0, & \nu > \min\{k, r\}, \end{cases} \tag{2.1}$$

где полагаем $w_{0,k}(x) = w_k(x)$, $r \geqslant 0$, причем если $k > r$ и $\nu \geqslant r$, то равенство (2.1) верно лишь почти всюду.

Покажем, что коэффициенты Фурье $c_{r,k}(f)$, $k, r \geqslant 0$, функции $f \in W^r_{L^2}$ по системе $\mathfrak{W}_r$ имеют вид

$$c_{r,k}(f) = \begin{cases} f^{(k)}(0), & k < r, \\ \displaystyle\int_0^1 f^{(r)}(t) w_{k-r}(t)\, dt, & k \geqslant r. \end{cases} \tag{2.2}$$

В самом деле, из (1.5) имеем

$$c_{r,k}(f) = \langle f, w_{r,k} \rangle = \sum_{s=0}^{r-1} f^{(s)}(0) w^{(s)}_{r,k}(0) + \int_0^1 f^{(r)}(t) w^{(r)}_{r,k}(t)\, dt.$$

Если $k < r$, то

$$w^{(r)}_{r,k}(x) = \left(\frac{x^k}{k!}\right)^{(r)} = 0, \quad w^{(s)}_{r,k}(0) = \left(\frac{x^k}{k!}\right)^{(s)}\Bigg|_{x=0} = \delta_{ks}, \qquad 0 \leqslant s \leqslant r-1.$$

Следовательно, $c_{r,k}(f) = f^{(k)}(0)$, $k < r$. При $k \geqslant r$ в силу (2.1) имеем равенство $w^{(s)}_{r,k}(0) = w_{r-s,k-s}(0) = 0$, поэтому

$$c_{r,k}(f) = \int_0^1 f^{(r)}(t) w^{(r)}_{r,k}(t)\, dt.$$

Если еще раз применить (2.1), то получим вторую строку в (2.2).

Непосредственно с помощью (2.2) можно установить связь между коэффициентами $c_{r,k}(f)$ при различных $r$:

$$c_{r,k}(f) = c_{r-\nu,k-\nu}(f^{(\nu)}), \qquad 0 \leqslant \nu \leqslant \min\{r, k\}. \tag{2.3}$$

Частичная сумма ряда Фурье функции $f$ по системе $\mathfrak{W}_r$ порядка $n$ имеет вид

$$S_{r,n}(f, x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_{r,k}(f) w_{r,k}(x) = \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=r}^{n-1} c_{r,k}(f) w_{r,k}(x), \qquad n > r \geqslant 1.$$

Через

$$S_{0,n}(f) = S_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) w_k(x)$$

будем обозначать частичную сумму Фурье функции $f$ порядка $n$ по системе Уолша.

Используя соотношения (2.1) и (2.3), выводим

$$S_{r,n}^{(\nu)}(f,x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_{r,k}(f) w_{r,k}^{(\nu)}(x) = \sum_{k=\nu}^{n-1} c_{r-\nu,k-\nu}(f^{(\nu)}) w_{r-\nu,k-\nu}(x).$$

Последнее выражение представляет собой частичную сумму Фурье функции $f^{(\nu)}$ по системе $\mathfrak{W}_{r-\nu}$ порядка $n-\nu$. Таким образом, имеет место равенство

$$S_{r,n}^{(\nu)}(f,x) = S_{r-\nu,n-\nu}(f^{(\nu)},x), \qquad 0 \leqslant \nu \leqslant r. \tag{2.4}$$

Остановимся более подробно на свойствах функций системы $\mathfrak{W}_1$. Приведем явный вид нескольких первых функций этой системы при $x \in [0,1]$:

$$w_{1,0}(x) = 1, \qquad w_{1,1}(x) = x, \qquad w_{1,2}(x) = \frac{1}{2} - \left|x - \frac{1}{2}\right| = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < \dfrac{1}{2}, \\ 1-x, & \dfrac{1}{2} \leqslant x < 1, \end{cases}$$

$$w_{1,3}(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < \dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{1}{2} - x, & \dfrac{1}{4} \leqslant x < \dfrac{1}{2}, \\ x - \dfrac{1}{2}, & \dfrac{1}{2} \leqslant x < \dfrac{3}{4}, \\ 1-x, & \dfrac{3}{4} \leqslant x < 1, \end{cases} \qquad w_{1,4}(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < \dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{1}{2} - x, & \dfrac{1}{4} \leqslant x < \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{2} - x, & \dfrac{1}{2} \leqslant x < \dfrac{3}{4}, \\ x-1, & \dfrac{3}{4} \leqslant x < 1. \end{cases} \tag{2.5}$$

Далее, отметим, что из ортогональности функций Уолша на $[0,1]$ вытекает соотношение

$$w_{1,n}(0) = w_{1,n}(1) = 0, \qquad n \geqslant 2.$$

Это свойство позволяет нам без дополнительных оговорок периодически с периодом $T = 1$ продолжить $w_{1,k}(x)$, $k \geqslant 2$, на всю ось. Поэтому всюду в дальнейшем мы будем считать функции $w_{1,k}(x)$, $k \geqslant 2$, определенными на всей оси.

Теорема 3. *Если $k \geqslant 0$ и $0 \leqslant p \leqslant k$, то имеет место следующее рекуррентное соотношение*

$$w_{1,1+2^k}(x) = \frac{1}{2^p} w_{1,1+2^{k-p}}(2^p x).$$

Доказательство. Пусть $p = 1$. Пользуясь тем фактом, что

$$w_{2^k}(t) = r_k(t) = r_{k-1}(2t) = w_{2^{k-1}}(2t),$$

непосредственно из определения (1.3) выводим

$$w_{1,1+2^k}(x) = \int_0^x w_{2^k}(t)\,dt = \int_0^x w_{2^{k-1}}(2t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2x} w_{2^{k-1}}(t)\,dt = \frac{1}{2} w_{1,1+2^{k-1}}(2x).$$

Доказательство завершается применением математической индукции.

Полагая $p = k$, из приведенной выше теоремы получаем

$$w_{1,1+2^k}(x) = \frac{1}{2^k} w_{1,2}(2^k x). \tag{2.6}$$

Отсюда с учетом (2.5) имеем следующую оценку:

$$0 \leqslant w_{1,1+2^k}(x) \leqslant \frac{1}{2^{k+1}}, \qquad k \geqslant 0. \tag{2.7}$$

Из равенства (2.6) также следует, что период функции $w_{1,1+2^k}(x)$ равен $1/2^k$. Кроме того, указанное равенство дает простой способ вычисления значений функции $w_{1,1+2^k}(x)$ при произвольном $k \geqslant 1$.

Теорема 4. *Если $n = 2^k + i$, $k \geqslant 0$, $0 \leqslant i \leqslant 2^k - 1$, то справедливо следующее равенство*:

$$w_{1,1+n}(x) = w_i(x) w_{1,1+2^k}(x).$$

Доказательство. Далее нам понадобятся следующие два утверждения относительно свойств системы Уолша, доказательство которых можно найти в [1; с. 11, теорема 1.1.3] и [1; с. 11, теорема 1.1.4] соответственно.

Утверждение 3. *Функция $w_n(x)$ при $0 \leqslant n < 2^{k+1}$ принимает постоянное значение, равное $\pm 1$, на каждом двоичном интервале $\Delta_m^{(k+1)} = [m/2^{k+1}, (m+1)/2^{k+1})$, $0 \leqslant m < 2^{k+1}$, причем $w_n(x) = 1$ при $x \in \Delta_0^{(k+1)}$.*

Утверждение 4. *Для любого $m$, $0 \leqslant m \leqslant 2^k - 1$, и для любого $k \geqslant 0$ справедливо равенство*

$$\int_{m/2^k}^{(m+1)/2^k} w_n(x)\, dx = 0, \qquad 2^k \leqslant n < 2^{k+1}.$$

Из определения функций Уолша легко получить соотношение (см. [1; с. 10, формула (1.1.5)])

$$w_n(x) = w_i(x) w_{2^k}(x). \tag{2.8}$$

Обозначим через $j(k,x)$ номер того единственного двоичного интервала $\Delta_j^{(k)}$ из $k$-й пачки, который содержит точку $x$, т.е. $x \in \Delta_{j(k,x)}^{(k)}$. Учитывая, что функция $w_i(x)$ постоянна на двоичных интервалах $\Delta_j^{(k)}$ (см. утверждение 3), обозначим через $w_{i,j}^{(k)}$ значение функции $w_i(x)$ на $\Delta_j^{(k)}$ и, используя (2.8), запишем

$$\begin{aligned} w_{1,1+n}(x) &= \int_0^x w_{2^k}(t) w_i(t)\, dt \\ &= \sum_{j=0}^{j(k,x)-1} w_{i,j}^{(k)} \int_{\Delta_j^{(k)}} w_{2^k}(t)\, dt + w_{i,j(k,x)}^{(k)} \int_{j(k,x)/2^k}^x w_{2^k}(t)\, dt. \end{aligned}$$

В силу утверждения 4 все интегралы под знаком суммы обращаются в нуль, поэтому

$$w_{1,1+n}(x) = w_{i,j(k,x)}^{(k)} \int_{j(k,x)/2^k}^x w_{2^k}(t)\, dt = w_i(x) \int_{j(k,x)/2^k}^x w_{2^k}(t)\, dt. \tag{2.9}$$

Заметим теперь, что при $i = 0$ полученное соотношение принимает вид

$$w_{1,1+2^k}(x) = \int_{j(k,x)/2^k}^{x} w_{2^k}(t)\,dt. \tag{2.10}$$

Утверждение теоремы вытекает из (2.9) и (2.10).

**3. Доказательство теорем.**

Доказательство теоремы 1. Применяя формулу Тейлора с остатком в интегральной форме для функции $f$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \frac{1}{(r-1)!}\int_0^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t)\,dt,$$

используя определение (1.3) функций $w_{r,k}(x)$ и замечая, что $c_{r,k}(f) = c_{k-r}(f^{(r)})$, можно получить следующее выражение для остатка ряда Фурье:

$$\begin{aligned} f(x) - S_{r,r+n}(f,x) &= \frac{1}{(r-1)!}\int_0^x (x-t)^{r-1}\biggl(f^{(r)}(t) - \sum_{k=r}^{r+n-1} c_{k-r}(f^{(r)})w_{k-r}(t)\biggr)\,dt \\ &= \frac{1}{(r-1)!}\int_0^x (x-t)^{r-1}(f^{(r)}(t) - S_n(f^{(r)},t))\,dt. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Отсюда с помощью неравенства Гёльдера получаем

$$\begin{aligned} |f(x) - S_{r,r+n}(f,x)| &\leqslant \frac{1}{(r-1)!}\biggl(\int_0^1 |x-t|^{q(r-1)}\,dt\biggr)^{1/q} \|f^{(r)} - S_n(f^{(r)})\|_p \\ &\leqslant \frac{1}{(r-1)!}\|f^{(r)} - S_n(f^{(r)})\|_p. \end{aligned}$$

Но для $f^{(r)} \in L^p$, $p > 1$, норма разности в силу базисности системы Уолша в $L^p$, $p > 1$, стремится к нулю. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Докажем теорему 2, используя индукцию по $r$. Пусть $r = 1$. При указанном $r$ формула (3.1) примет вид

$$f(x) - S_{1,1+n}(f,x) = \int_0^x (f'(t) - S_n(f',t))\,dt.$$

Отсюда вытекает неравенство

$$|f(x) - S_{1,1+n}(f,x)| \leqslant \|f' - S_n(f')\|_{L^1}, \qquad x \in [0,1]. \tag{3.2}$$

Как известно [1; с. 209, теорема 10.2.2], подпоследовательность с номерами $n = 2^k$ последовательности частичных сумм Фурье–Уолша функции $f \in L^1$ сходится в метрике этого пространства к самой функции $f$. Тогда из (3.2) получаем, что

$$S_{1,1+2^k}(f,x) \rightrightarrows f(x), \qquad k \to \infty, \quad x \in [0,1]. \tag{3.3}$$

Возьмем теперь произвольное $n = 2^k + i$, $0 \leqslant i \leqslant 2^k - 1$. Тогда

$$|f(x) - S_{1,1+n}(f,x)| \leqslant |f(x) - S_{1,1+2^k}(f,x)| + |Q_{k,i}(f,x)|, \tag{3.4}$$

где

$$Q_{k,i}(f,x) = \sum_{j=2^k}^{2^k+i-1} c_{1,1+j}(f) w_{1,1+j}(x), \quad i > 0, \qquad Q_{k,0}(f) = 0.$$

Из (3.3) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $k_1 = k_1(\varepsilon)$ такой, что

$$|f(x) - S_{1,1+2^k}(f,x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad k \geqslant k_1, \quad x \in [0,1]. \tag{3.5}$$

Далее, используя теорему 4, оценку (2.7) и равенство (2.3), получаем следующее соотношение:

$$|Q_{k,i}(f,x)| \leqslant \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{j=2^k}^{2^k+i-1} |c_{1,1+j}(f)| \leqslant \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-2} |c_j(f')|. \tag{3.6}$$

В рассматриваемом случае $f' \in L^1$, поскольку $f \in W^1_{L^1}$. Следовательно, ввиду того, что коэффициенты Фурье–Уолша суммируемых функций стремятся к нулю [1; с. 65, теорема 2.7.3], для заданного $\varepsilon$ найдется такой номер $k_2 = k_2(\varepsilon)$, что $|c_j(f')| < \varepsilon$ при $j \geqslant 2^{k_2}$. Тогда из (3.6) имеем

$$|Q_{k,i}(f,x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad k \geqslant k_2, \quad 1 \leqslant i \leqslant 2^k - 1. \tag{3.7}$$

Полагая $n_0 = 2^{\max\{k_1,k_2\}}$, из (3.4), (3.5) и (3.7) выводим

$$|f(x) - S_{1,1+n}(f,x)| < \varepsilon, \qquad n \geqslant n_0, \quad x \in [0,1].$$

Таким образом, база индукции выполнена. Для доказательства шага индукции воспользуемся свойством (2.4) частичных сумм Фурье по системе $\mathfrak{W}_r$:

$$f(x) - S_{r,n}(f,x) = \int_0^x (f(t) - S_{r,n}(f,t))'\,dt = \int_0^x (f'(t) - S_{r-1,n-1}(f',t))\,dt.$$

Для завершения индукционного перехода остается только заметить, что если $f \in W^r_{L^1}$, то $f' \in W^{r-1}_{L^1}$.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


[1] Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, *Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения*, Наука, М., 1987.

[2] И. И. Шарапудинов, “Системы функций, ортогональные по Соболеву, ассоциированные с ортогональной системой”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **82**:1 (2018), 225–258.

[3] И. И. Шарапудинов, “Аппроксимативные свойства рядов Фурье по многочленам, ортогональным по Соболеву с весом Якоби и дискретными массами”, *Матем. заметки*, **101**:4 (2017), 611–629.

[4] И. И. Шарапудинов, “Специальные ряды по полиномам Лагерра и их аппроксимативные свойства”, *Сиб. матем. журн.*, **58**:2 (2017), 440–467.

[5] И. И. Шарапудинов, М. Г. Магомед-Касумов, С. Р. Магомедов, “Полиномы, ортогональные по Соболеву, ассоциированные с полиномами Чебышева первого рода”, *Дагестанские электронные математические известия*, 2015, № 4, 1–14.

[6] И. И. Шарапудинов, Т. И. Шарапудинов, “Полиномы, ортогональные по Соболеву, порожденные многочленами Чебышева, ортогональными на сетке”, *Изв. вузов. Матем.*, 2017, № 8, 67–79.

[7] И. И. Шарапудинов, З. Д. Гаджиева, “Полиномы, ортогональные по Соболеву, порожденные многочленами Мейкснера”, *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, **16**:3 (2016), 310–321.

[8] Р. М. Гаджимирзаев, “Ряды Фурье по полиномам Мейкснера, ортогональным по Соболеву”, *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, **16**:4 (2016), 388–395.

[9] Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, Т. 2, Физматлит, М., 2001.

**М. Г. Магомед-Касумов**
Владикавказский научный центр
Российской академии наук;
Дагестанский научный центр
Российской академии наук, г. Махачкала
*E-mail*: rasuldev@gmail.com

Поступило
23.05.2018
После доработки
10.07.2018
Принято к публикации
12.09.2018