КОНТАКТНЫЕ СИММЕТРИИ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

В. Е. Шемарулин

Рассматриваются квазилинейные уравнения

$$(\varphi_x^2 - c^2)\cdot\varphi_{xx} + (\varphi_y^2 - c^2)\cdot\varphi_{yy} + (\varphi_z^2 - c^2)\cdot\varphi_{zz} + 2\varphi_x\varphi_y\cdot\varphi_{xy} + 2\varphi_x\varphi_z\varphi_{xz} + 2\varphi_y\varphi_z\varphi_{yz} = 0, \quad (1)$$

$$c^2 = \frac{k-1}{2}\cdot(w^2 - \varphi_x^2 - \varphi_y^2 - \varphi_z^2), \quad k = \mathrm{const}, \quad w = \mathrm{const},$$

$$(\varphi_x^2 - c^2)\cdot\varphi_{xx} + (\varphi_y^2 - c^2)\cdot\varphi_{yy} + \varphi_{tt} + 2\varphi_x\varphi_y\cdot\varphi_{xy} + 2\varphi_x\cdot\varphi_{xt} + 2\varphi_y\cdot\varphi_{yt} - \frac{\nu\cdot c^2\varphi_y}{y} = 0, \quad (2)$$

$$c^2 = -(k-1)\left(\varphi_t + \frac{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}{2}\right), \quad k = \mathrm{const}, \quad \nu = 0{,}1,$$

к которым сводятся системы уравнений, описывающие безвихревые изэнтропические течения политропного газа с показателем адиабаты k [1]. Уравнение (1) описывает трехмерные установившиеся потоки, а уравнение (2) — двумерные неустановившиеся плоские ($\nu = 0$) и осесимметричные ($\nu = 1$) потоки. В уравнениях (1), (2) φ — потенциал скоростей, c — скорость звука; w, $k \in R$.

Физическими являются требования $c^2 > 0$, $k > 1$. Однако формально результаты работы справедливы для любого вещественного $k \neq \pm 1$.

Ниже используются обозначения, терминология и факты, принятые и доказанные в [2, 3]. Контактные симметрии и законы сохранения вычисляются в соответствии с методом, изложенным в [3].

Уравнения (1), (2) являются уравнениями на трехмерном многообразии $M = R^3\,(q_1, q_2, q_3)$, где $q_1 \equiv x$, $q_2 \equiv y$, $q_3 \equiv z$ для (1) и $q_3 \equiv t$ для (2). Пусть $\Phi = J^1M$ — многообразие 1-джетов гладких функций на M; $\Phi \cong R^7\,(q_i, u, p_i)$ $(i = 1, 2, 3)$; ω — эффективная 3-форма на Φ, представляющая уравнения (1), (2), $\omega \in \Lambda^3\,(R^7)$; X_f — контактное векторное поле на Φ с производящей функцией $f \in C^\infty\,(\Phi)$.

Алгебру симметрий X_f уравнения с представляющей формой ω будем обозначать $\mathrm{symc}\,(\Delta_\omega)$. Функция $f \in \mathrm{symc}\,(\Delta_\omega)$ тогда и только тогда, когда

$$h\cdot\omega + d_p i_f\omega + i_f d_p\omega + f\cdot L_1\omega = 0, \quad (3)$$

где h — гладкая функция на Φ, d_p — проекция внешнего дифференциала, $i_f\omega = X_f \rfloor \omega$, $L_1\omega$ — производная Ли вдоль поля X_1 [3].

Законы сохранения на Φ находятся во взаимно однозначном соответствии с решениями g следующего уравнения [3]:

$$E\,(g\cdot\omega) \equiv g\cdot E\,(\omega) + X_1\,(g)\cdot\omega + d_p g \wedge \perp d_p\omega + d_p i_g\omega = 0, \quad (4)$$

$$E\,(\omega) \equiv L_1\,(\omega) + d_p \circ \perp \circ\, d_p\,(\omega).$$

Решения $g \in C^\infty\,(\Phi)$ уравнения (4) называют производящими функциями законов сохранения, отвечающих им в силу отмеченного взаимно однозначного соответствия. Процедура восстановления закона сохранения по его производящей функции описана в [3].

П р е д л о ж е н и е 1. *Если* $k \neq 1$, *то контактные симметрии уравнений* (1), (2) *являются точечными.*

Уравнения (1), (2) при $k \neq 1$ являются уравнениями Эйлера — Лагранжа, отвечающими лагранжианам $L_1 = i^{k/(k-1)}$, $i = w^2 - \varphi_x^2 - \varphi_y^2 - \varphi_z^2$ и $L_2 = y^\nu\cdot i^{k/(k-1)}$, $i = \varphi_t + \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2)$, соответственно. Поэтому классическая теорема Э. Нётер обуславливает связь между производящими функциями симметрий и законов сохранения для этих уравнений. Ее точный вид устанавливается в следующих двух предложениях.

Предложение 2. *Пусть g — производящая функция закона сохранения для уравнения, задаваемого эффективной формой ω, и функция $a \not\equiv 0$ удовлетворяет соотношению $d_p(a \cdot \omega) = 0$. Тогда $a^{-1}g \in \operatorname{symc}(\Delta_\omega)$. Более того, если $f \in \operatorname{symc}(\Delta_\omega)$, то $g \equiv a \cdot f$ является производящей функцией закона сохранения тогда и только тогда, когда для функции h из (3) выполнено равенство*

$$h = X_1(f) + a^{-1} \cdot f \cdot L_1 a + a^{-1} \cdot i_f d_p a.$$

Предложение 3. *В качестве функции a, фигурирующей в предложении 2, для уравнения (1) можно взять функцию $a = i^{-(k-2)/(k-1)}$, $i = w^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2$, а для уравнения (2) — функцию $a = q_2^{\nu} \cdot i^{-(k-2)/(k-1)}$, $i = p_3 + \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2)$.*

Ниже под a понимается одна из функций, описанных в предложении 3. При $k \neq \pm 1$ справедливы следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Алгебра контактных симметрий уравнения (1) как линейное пространство имеет базис*

$$f_0 = 1; \quad f_i = p_i; \quad f_{ij} = p_i q_j - p_j q_i; \quad i, j = 1, 2, 3; \; i \neq j,$$

$$f_4 = u - q_1 p_1 - q_2 p_2 - q_3 p_3.$$

Базис пространства контактных законов сохранения образует законы сохранения массы (энергии), импульса и момента импульса с производящими функциями

$$g_0 = a; \quad g_i = aP_i; \quad g_{ij} = a(P_i q_j - p_j q_i); \quad i, j = 1, 2, 3; \; i \neq j.$$

ТЕОРЕМА 2. *Алгебра контактных симметрий уравнения (2) в плоском случае ($\nu = 0$) как линейное пространство имеет базис:*

а) *при* $k \neq 2$ $B_1 = \{f_0 = 1;\ f_1 = p_1,\ f_2 = p_2,\ f_3 = p_3;\ f_4 = p_1 q_2 - p_2 q_1;\ f_5 = q_1 - q_3 p_1,\ f_6 = q_2 - q_3 p_2;\ f_7 = u - q_1 p_1 - q_2 p_2 - q_3 p_3,\ f_8 = u + q_3 p_3\}$;

б) *при* $k = 2$ $B_2 = B_1 \cup \{f_9^0\}$, *где* $f_9^0 = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) - q_1 q_3 \cdot p_1 - q_2 q_3 \cdot p_2 - q_3^2 \cdot p_3$.

Базис пространства контактных законов сохранения при $k \neq 2$ образует законы сохранения массы, импульса, энергии, момента импульса, теоремы о движении центра масс с производящими функциями

$$g_i = a \cdot f_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, 6, \tag{5}$$

и дополнительный закон сохранения с производящей функцией, зависящей от k,

$$\tilde{g}_k = a \cdot \left[-\frac{k+1}{3(k-1)} \cdot f_7 + f_8 \right], \tag{6}$$

при $k = 2$ система (5), (6) дополняется функцией $g_9^0 = a \cdot f_9^0$.

ТЕОРЕМА 3. *Алгебра контактных симметрий уравнения (2) в осесимметричном случае ($\nu = 1$) как линейное пространство имеет базис:*

а) *при* $k \neq 5/3$ $B_3 = \{f_0 = 1;\ f_1 = p_1,\ f_2 = p_3;\ f_3 = q_1 - q_3 p_1;\ f_4 = u - q_1 p_1 - q_2 p_2 - q_3 p_3,\ f_5 = u + q_3 p_3\}$;

б) *при* $k = 5/3$ $B_4 = B_3 \cup \{f_6^0\}$, *где*

$$f_6^0 = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) - q_1 q_3 \cdot p_1 - q_2 q_3 \cdot p_2 - q_3^2 p_3.$$

Базис пространства контактных законов сохранения при $k \neq 5/3$ образует законы сохранения массы, импульса, энергии, теоремы о движении центра масс с производящими функциями

$$g_i = a \cdot f_i; \qquad i = 0, 1, 2, 3, \tag{7}$$

и дополнительный закон сохранения с производящей функцией, зависящей от k,

$$\tilde{g}_k = a\cdot\left[-\frac{k+1}{4(k-1)}\cdot f_4 + f_5\right], \tag{8}$$

при $k = 5/3$ *система* (7), (8) *дополняется функцией* $g_6^0 = a\cdot f_6^0$.

Замечание 1. Все функции f_i и g_i, перечисленные в теоремах 1—3, являются производящими функциями симметрий и законов сохранения и для $k = -1$. Кроме того, при $k = -1$ функция $g = a\cdot(u + q_3p_3)$ определяет дополнительный закон сохранения для уравнения (2) как в плоском ($\nu = 0$), так и в осесимметричном ($\nu = 1$) случае.

Замечание 2. Частично результаты, относящиеся к уравнению (2) в плоском случае, приведены в [4].

В заключение автор выражает благодарность В. В. Лычагину за внимание к работе и полезные обсуждения.

Поступило
18.05.89

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981. 2. Лычагин В. В. // УМН. 1975. Т. 30, вып. 1. С. 101—171. 3. Лычагин В. В. // УМН. 1979. Т. 34, вып. 1. С. 137—165. 4. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.