

О КООРДИНАТНОЙ АСИМПТОТИКЕ ФУНКЦИИ ГРИНА ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Функция Грина задачи рассеяния определяется, как решение уравнения

$$[-\Delta_x + q(x) - \lambda] G(x, x', \lambda) = \delta(x - x'), \quad x, x' \in \mathbb{R}^3, \quad \lambda > 0 \quad (1)$$

удовлетворяющее при фиксированном x' и $x \rightarrow \infty$ условию излучения

$$\left(\frac{\partial}{\partial |x|} - i\sqrt{\lambda}\right) G(x, x', \lambda) = o\left(\frac{1}{|x|}\right). \quad (2)$$

Предположим, что в уравнении (1) потенциал $q(x)$ и все его производные $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\nu} q(x)$ по декартовым координатам удовлетворяют оценкам

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\nu} q(x)\right| \leq C_{\nu} (1 + |x|)^{-\alpha - |\nu|}, \quad (3)$$

$$|\nu| \geq 0, \quad \alpha > 1.$$

В настоящей заметке мы опишем конструкцию асимптотического решения $G_{as}(x, x', \lambda)$ задачи (1)-(2) при $x \rightarrow \infty$, равномерного по x' . При этом из-за недостатка места здесь мы ограничимся рассмотрением наиболее сложного случая, когда $x \rightarrow \infty$ в окрестности направления $-\hat{x}'$, $\hat{x}' = x'/|x'|^{-1}$. В этой области происходит интерференция прямой волны пришедшей из источника x' в точку x с фазой $\sqrt{\lambda}|x - x'|$ и волны рассеянной потенциалом пришедшей с фазой $\sqrt{\lambda}(|x| + |x'|)$. В других областях, где разность этих фаз велика соответствующие волны можно рассматривать по отдельности и получить для них выражения при помощи лучевого метода. Например, при $x' \sim x \rightarrow \infty$ можно считать

$$G_{as}(x, x', \lambda) \sim \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|x-x'|}}{|x-x'|} \sum_{\nu \geq 0} \left(\frac{1}{2i\sqrt{\lambda}}\right)^{\nu} \mathcal{H}_{\nu}(x, x'), \quad (4)$$

где $\mathcal{H}_0 = 1$, $\mathcal{H}_1 = \int_x^x q ds$ и т.д.

Итак, рассмотрим окрестность направления $-\hat{x}'$. Характерным масштабом задачи в этой области является переменная $\eta = \sqrt{\lambda}(|x| + |x'| - |x - x'|)$ - разность фаз рассеянной и прямой волн. Введем в рассматриваемой области координаты вытянутого эллипсоида вращения с фокусами в начале координат и точке x' . Эти координаты v , u , θ определяются соотношениями

$$\left. \begin{aligned} |x| + |x'| - |x - x'| &= 2|x'| \sin^2 \frac{v}{2}, \quad 0 \leq v < \pi \\ |x| + |x'| + |x - x'| &= 2|x'| \operatorname{ch}^2 \frac{u}{2}, \quad 0 \leq u < \infty \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

и θ - угловая переменная в плоскости ортогональной к \hat{x}' .

Сделаем в уравнении (I) подстановку

$$G(x, x', \lambda) = e^{i\sqrt{\lambda}|x-x'|} u(x, x', \lambda), \quad (6)$$

для u получим уравнение

$$2i\sqrt{\lambda} \frac{\partial}{\partial |x-x'|} u + \Delta u + 2i\sqrt{\lambda} \frac{1}{|x-x'|} u - qu = 0. \quad (7)$$

В координатах v, u, θ переменные в этом уравнении делятся, в старших, при $x \rightarrow \infty$, членах. Таким образом возникает следующее эталонное уравнение

$$\left[-2i\sqrt{\lambda} \frac{|x'|}{2} \sin v \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} + \operatorname{ctg} v \frac{\partial}{\partial v} + \frac{1}{\sin^2 v} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{|x'|}{2} (\alpha - 2i\sqrt{\lambda} \omega \sin v) \right] \varphi = 0 \quad (8)$$

Нам понадобятся следующие решения этого уравнения

$$\varphi_{\omega}(v, |x'|, \theta) = \tilde{\varphi}_{\alpha, m}(v, |x'|) e^{im\theta}, \quad (9)$$

где ω - пара α и m , а $\tilde{\varphi}_{\alpha, m}(v, |x'|)$ решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\left[\frac{d^2}{dv^2} - 2i\sqrt{\lambda} \frac{|x'|}{2} \sin v \frac{d}{dv} + \operatorname{ctg} v \frac{d}{dv} + \frac{|x'|}{2} (\alpha - 2i\sqrt{\lambda} \omega \sin v) \frac{m^2}{\sin^2 v} \right] \tilde{\varphi} = 0 \quad (10)$$

конечное при $v=0$.

В уравнение (8) удобно использовать переменные

$$y_1 = \sqrt{\frac{|x'|}{2}} \operatorname{tg} \frac{v}{2} \cos \theta, \quad y_2 = \sqrt{\frac{|x'|}{2}} \operatorname{tg} \frac{v}{2} \sin \theta, \quad (11)$$

в этих переменных у уравнения (8) нет сингулярностей при $v=0$

$$\left[2i\sqrt{\lambda} y_1 \nabla_y + \Delta_y + (\alpha + 2i\sqrt{\lambda}) - 2i\sqrt{\lambda} \frac{1}{\frac{|x'|}{2} + y_1^2 + y_2^2} \right] \varphi = 0, \quad (12)$$

где $\nabla_y = y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_2}$, $\Delta_y = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}$.

Решение (6) ищется теперь в виде

$$G(x, x', \lambda) = e^{i\sqrt{\lambda}|x-x'|} \int d\omega C_{\omega}(x') U_{\omega}(x, x', \lambda), \quad (13)$$

где интегрирование по ω означает суммирование по всем целым и интегрирование по α вдоль некоторого контура, $C_{\omega}(x')$ - неопределенные пока коэффициенты, а U_{ω} имеет вид

$$u_{\omega}(x, x', \lambda) = \sum_{\mathcal{D}} \mathcal{A}_{\mathcal{D}}(x, x', \omega) \mathcal{D} \varphi_{\omega}, \quad (I4)$$

здесь φ_{ω} - решения (9), а \mathcal{D} - однородные дифференциальные операторы по переменным Y_1 и Y_2 , суммирование в (I4) ведется по все таким операторам.

Подставляя выражение (I4) в уравнение (7) и используя уравнение (I2) для φ_{ω} получаем уравнения для определения коэффициентов $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}$ в (I4). Мы не будем их выписывать.

Вне окрестности направления \hat{x}' решение (I3) "сшивается" с решением (4) построенным по лучевому методу, при этом коэффициенты $C_{\omega}(x')$ в (I3) определяются из условий сшивания.

Таким образом строится асимптотическое решение $G_{as}(x, x', \lambda)$ задачи (I)-(2). При подстановке этого решения в уравнение (I) невязка, равномерно по x' , мала во всех степенных порядках по $|x|^{-1}$, при $x \rightarrow \infty$.

С использованием $G_{as}(x, x', \lambda)$ задача (I)-(2) может быть сведена к некоторому интегральному уравнению, исследование которого позволяет доказать существование и единственность функции Грина задачи рассеяния $G(x, x', \lambda)$.

При фиксированном x и $x' \rightarrow \infty$ $G_{as}(x, x', \lambda)$ имеет следующую асимптотику

$$G_{as}(x, x', \lambda) \simeq \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|x'|}}{|x'|} \Psi_{as}(x, \lambda, \hat{k}) + O\left(\frac{1}{|x'|}\right), \quad |x'| \rightarrow \infty, \quad \hat{x}' = -\hat{k}, \quad (I5)$$

где $\Psi_{as}(x, \lambda, \hat{k})$ некоторое асимптотическое решение уравнения Шредингера.

Аналогично и точная функция Грина $G(x, x', \lambda)$ имеет асимптотику

$$G(x, x', \lambda) \simeq \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|x'|}}{|x'|} \Psi(x, \lambda, \hat{k}) + O\left(\frac{1}{|x'|}\right), \quad |x'| \rightarrow \infty, \quad \hat{x}' = -\hat{k}, \quad (I6)$$

где $\Psi(x, \lambda, \hat{k})$ - некоторое точное решение уравнения Шредингера.

Окончательный результат можно сформулировать так

Теорема. 1) Существует единственное решение $G(x, x', \lambda)$ задачи (I)-(2). 2) При $x \rightarrow \infty$, равномерно по x' , справедлива асимптотика

$$G(x, x', \lambda) \simeq G_{as}(x, x', \lambda) + \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|x|}}{|x|} \left\{ F(\hat{x}, x', \lambda) + \dots \right\}. \quad (I7)$$

3) При фиксированном x и $x' \rightarrow \infty$ имеет место формула (I6).

4) Определенное формулой (I6) решение уравнения Шредингера

$\Psi(x, \lambda, \hat{k})$ имеет при $x \rightarrow \infty$ асимптотику

$$\Psi(x, \lambda, \hat{k}) \simeq \Psi_{as}(x, \lambda, \hat{k}) + \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|x|}}{|x|} \left\{ F(\hat{x}, \lambda) + \dots \right\}. \quad (I8)$$

Автор благодарен В.С.Буслаеву за ценные обсуждения в процессе работы.