В. И. Казарина, А. А. Махнев, О локально $GQ(s,t)$ графах с сильно регулярными μ-подграфами, *Алгебра и анализ*, 2005, том 17, выпуск 3, 93–106

Алгебра и анализ
Том 17 (2005), №3

О ЛОКАЛЬНО $GQ(s,t)$ ГРАФАХ С СИЛЬНО РЕГУЛЯРНЫМИ μ-ПОДГРАФАМИ

© В. И. КАЗАРИНА, А. А. МАХНЕВ

В работе изучаются связные локально $GQ(s,t)$ графы, в которых каждый μ-подграф является известным сильно регулярным графом (т. е. $K_{m,m}$ для некоторого натурального числа m; граф Мура с параметрами $(k^2+1,k,0,1)$, $k=2,3$ или 7; граф Клебша, граф Гевиртца, граф Хигмена–Симса или вторая окрестность вершины в графе Хигмена–Симса, имеющая параметры $(77,16,0,4)$). Доказано, что если Γ — сильно регулярный локально $GQ(s,t)$ граф, в котором каждый μ-подграф изоморфен известному сильно регулярному графу Δ, то верно одно из следующих утверждений: (1) $\Delta=K_{t+1,t+1}$ и либо $s=1$ и $\Gamma=K_{3\times(t+1)}$, либо $s=4,t=1$ и Γ — частное графа Джонсона $\bar{J}(10,5)$, либо $s=t=1,2,3,8$ или 13; (2) Δ — граф Петерсена и Γ является единственным локально $GQ(2,2)$ графом с параметрами $(28,15,6,10)$; (3) Δ — граф Гевиртца и Γ — граф Маклафлина.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, т. е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $\Gamma(a)=\Gamma_1(a)$, $a^\perp=\{a\}\cup\Gamma(a)$. Если граф Γ зафиксирован, то вместо $\Gamma(a)$ будем писать $[a]$. Если не оговорено противное, то слово подграф будет означать индуцированный подграф. Обозначения взяты в основном из [1].

Пусть $\mathcal{F}$ — некоторый класс графов. Граф Γ назовем *локально $\mathcal{F}$ графом*, если $[a]$ лежит в $\mathcal{F}$ для любой вершины a графа Γ. Если при этом класс $\mathcal{F}$ состоит из графов, изоморфных некоторому графу Δ, то граф Γ назовем *локально Δ графом*.

Пусть Γ — граф, $a,b\in\Gamma$, число вершин в $[a]\cap[b]$ обозначается через $\mu(a,b)$ (через $\lambda(a,b)$), если a,b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 02–01–00772).

Далее, индуцированный $[a] \cap [b]$ подграф называется *μ-подграфом* (*λ-подграфом*).

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным* степени k, если степень любой вершины a из Γ равна k. Граф Γ назовем *реберно регулярным* с параметрами (v, k, λ), если он содержит v вершин, регулярен степени k, и каждое его ребро лежит в λ треугольниках. Граф Γ — *вполне регулярный граф* с параметрами (v, k, λ, μ), если он реберно регулярен с соответствующими параметрами, и $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин для любых двух вершин a, b, находящихся на расстоянии 2 в Γ. Вполне регулярный граф называется *сильно регулярным графом*, если он имеет диаметр 2. Через $K_{m_1,\ldots,m_n}$ обозначим полный многодольный граф $\{M_1, \ldots, M_n\}$ с долями M_i порядка m_i. Если $m_1 = \cdots = m_n = m$, то указанный граф обозначается $K_{n\times m}$. Для подграфа Δ графа Γ через $X_i(\Delta)$ обозначим множество всех вершин из $\Gamma - \Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ.

Геометрия G ранга 2 — это система инцидентности с множеством точек P и множеством блоков $\mathcal{B}$, не имеющая кратных блоков. При этом каждый блок можно отождествить с множеством инцидентных ему точек и инцидентность становится обычным включением. Две точки из P называются *коллинеарными*, если они лежат в общем блоке. *Точечный граф* геометрии G — это граф на множестве точек P, в котором две точки смежны, если они различны и коллинеарны. Аналогично определяется блок граф. Геометрию назовем *связной*, если связен ее точечный граф.

Для $a \in P$ *вычетом* G_a называется геометрия с множеством точек P_a, коллинеарных с a, и множеством блоков $\mathcal{B}_a = \{B - \{a\} \mid a \in B \in \mathcal{B}\}$. Пусть $a \in P, B \in \mathcal{B}$. Если $a \notin B$ (если $a \in B$), то пара (a, B) называется *антифлагом* (*флагом*).

Если любые два блока из $\mathcal{B}$ пересекаются не более чем по одной точке, то множество блоков называется *множеством прямых* и обозначается $\mathcal{L}$, а геометрия $(P, \mathcal{L})$ называется *частичным пространством прямых*. Частичное пространство прямых имеет порядок (s, t), если каждая прямая содержит $s + 1$ точку и каждая точка лежит на $t + 1$ прямой.

Частичное пространство прямых порядка (s, t) называется *α-частичной геометрией*, если для любого антифлага (a, L) найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих L (обозначается $pG_\alpha(s, t)$). Если $\alpha = 1$, то геометрия называется *обобщенным четырехугольником* и обозначается $GQ(s, t)$. Коклика в точечном графе для $GQ(s, t)$, состоящая из $st+1$ точек, называется *овоидом*. *Спредом* в $GQ(s, t)$ называется семейство из $st + 1$ прямых, образующих разбиение множества точек.

Точечный граф геометрии $pG_\alpha(s,t)$ сильно регулярен с $v = (s+1)(1+st/\alpha)$, $k = s(t+1)$, $\lambda = s-1+t(\alpha-1)$, $\mu = \alpha(t+1)$. Сильно регулярный граф с такими параметрами называется *псевдогеометрическим графом* для $pG_\alpha(s,t)$.

Геометрия G называется *расширением* α-частичных геометрий, если она связна, и вычет в каждой точке является $pG_\alpha(s,t)$ для подходящих (s,t) (обозначается EpG_α). По связности порядок геометрии (s,t) не зависит от выбора вычета и такое расширение обозначается $EpG_\alpha(s,t)$. Геометрия EpG_α называется *треугольной*, если любые три попарно коллинеарные точки лежат в общем блоке (необходимо единственном). Изучение треугольных расширений геометрий G из класса pG_α опирается на изучение связных локально $\Gamma(G_a)$ графов (и равносильно этому изучению в случае $\alpha = 1$).

Подмножество Λ обобщенного четырехугольника называется *гиперовалом*, если любая прямая пересекает Λ по 0 или 2 точкам. То есть гиперовал в $GQ(s,t)$ — это регулярный подграф без треугольников степени $t+1$, имеющий четное число вершин. Известно [2], что μ-подграфы в локально $GQ(s,t)$ графах являются гиперовалами.

Если регулярный граф степен и k диаметра d имеет v вершин, то выполняется неравенство, доказанное Муром:

$$v \leqslant 1 + k + k(k-1) + \cdots + k(k-1)^{d-1}.$$

Графы, для которых это нестрогое неравенство превращается в равенство, называются графами Мура. Простейший пример графа Мура доставляет $(2d+1)$-угольник. Дамерелл [3] доказал, что граф Мура степени $k \geqslant 3$ имеет диаметр 2. В этом случае $v = k^2+1$, граф сильно регулярен с $\lambda = 0$ и $\mu = 1$, а степень k равна 3 (граф Петерсена), 7 (граф Хоффмана–Синглтона) или 57. Существование графа Мура степени $k = 57$ неизвестно.

Граф Клебша определен на множестве векторов 4-мерного линейного пространства V над полем из двух элементов, причем два вектора смежны, если расстояние Хемминга между ними равно 1 или 4. Это единственный сильно регулярный граф с параметрами $(16,5,0,2)$. Графы Гевиртца, Хигмена–Симса и Маклафлина — это графы ранга 3 групп $L_3(4)$, Хигмена–Симса и Маклафлина на 56, 100 и 275 вершинах соответственно.

Граф Джонсона $J(n,m)$ определен на семействе m-подмножеств данного n-элементного множества X, причем два m-подмножества a и b смежны, если $|a \cap b| = m-1$. Частным графа Джонсона $J^\sigma(2m,m)$ называется фактор-граф, вершинами которого являются пары $(a^\sigma, X-a)$, где σ — подстановка на X порядка, не большего 2, имеющая не менее 8 неподвижных точек. Если $\sigma = 1$, то частное называется стандартным и обозначается $\bar{J}(2m, m)$.

Пусть Γ является связным локально $GQ(s,t)$ графом, u, w — вершины с $d(u,w) = 2$. Хорошо известно, что $\mu(u,w)$ четно и $\max\{2(t+1), (s+1)(t+2-s)\} \leqslant \mu(u,w) \leqslant 2(st+1)$.

В работе изучаются связные локально $GQ(s,t)$ графы, в которых μ-подграфы являются известными сильно регулярными графами. Пусть Δ является известным сильно регулярным графом без треугольников. Тогда выполняется одна из возможностей:

(1) $\Delta = K_{m,m}$ для некоторого натурального числа m;

(2) Δ — граф Мура с параметрами $(k^2+1, k, 0, 1)$, $k = 2, 3$ или 7;

(3) Δ — граф Клебша с параметрами $(16, 5, 0, 2)$ или граф Гевиртца с параметрами $(56, 10, 0, 2)$;

(4) Δ — граф Хигмена–Симса с параметрами $(100, 22, 0, 6)$;

(5) Δ — вторая окрестность вершины в графе Хигмена–Симса, имеющая параметры $(77, 16, 0, 4)$.

Для каждого из указанных наборов параметров существует единственный сильно регулярный граф с этими параметрами.

Теорема. *Пусть Γ — вполне регулярный локально $GQ(s,t)$ граф, в котором каждый μ-подграф изоморфен известному сильно регулярному графу Δ. Тогда выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) $\Delta = K_{t+1,t+1}$ *и* $t+1$ *делит* $s^2(s^2-1)$;

(2) Δ — *граф Петерсена и* Γ — *единственный локально* $GQ(2,2)$ *граф с параметрами* $(28, 15, 6, 10)$;

(3) Δ — *граф Хофмана–Синглтона,* $t = 6$ *и* $s = 9, 14, 15, 24, 29$ *или* 30;

(4) Δ — *граф Клебша,* $t = 4$ *и* $s = 2, 4, 6, 8, 11, 12$ *или* 16;

(5) Δ — *граф Гевиртца,* $t = 9$ *и* $s = 3, 7, 27, 31$ *или* 63;

(6) Δ — *граф с параметрами* $(77, 16, 0, 4)$, $t = 15$ *и* $s = 21, 41, 55, 153$ *или* 195;

(7) Δ — *граф Хигмена–Симса,* $t = 21$ *и* $s = 19, 24, 34, 35, 39, 45, 49, 69, 84, 89, 99, 105, 115, 119, 144, 159, 175, 189, 199, 210, 214, 259, 294, 309, 339, 364, 375, 399, 419$ *или* 420.

Для $t = 1$ графы Джонсона $J(2m, m)$ и их частные (при $m > 4$) являются локально $GQ(m-1, 1)$ графами, в которых каждый μ-подграф изоморфен четырехугольнику. Существование графов диаметра, большего 2, из заключения теоремы для $t > 1$ неизвестно.

Следствие. *Пусть Γ — сильно регулярный локально $GQ(s,t)$ граф, в котором каждый μ-подграф изоморфен известному сильно регулярному графу Δ. Тогда выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) $\Delta = K_{t+1,t+1}$ *и либо* $s=1$ *и* $\Gamma = K_{3\times(t+1)}$, *либо* $s=4, t=1$ *и* Γ — *частное графа Джонсона* $\bar{J}(10,5)$, *либо* $s=t=1,2,3,8$ *или* 13;

(2) Δ — *граф Петерсена и* Γ *является единственным локально* $GQ(2,2)$ *графом с параметрами* $(28,15,6,10)$;

(3) Δ — *граф Гевиртца и* Γ — *граф Маклафлина.*

Известны существование и единственность сильно регулярных локально $GQ(t,t)$ графов с μ-подграфами, изоморфными $K_{t+1,t+1}$ для $t=1$ (Γ — частное графа Джонсона $\bar{J}(10,5)$), $t=2$ (Γ — единственный локально $GQ(2,2)$ граф с параметрами $(28,15,6,10)$) и $t=3$ (Γ — граф ранга 3 для группы $U_4(2)$ с параметрами $(176,40,12,8)$).

Заметим, что вполне регулярные локально $GQ(4,2)$ графы классифицированы в [6]. В работе [7] описаны связные локально $GQ(3,t)$ графы.

В §1 приведены некоторые вспомогательные результаты. В §2 рассмотрены случаи, когда Δ является одним из графов Мура. В §3 предполагается, что Δ — граф Клебша или граф Гевиртца. В §4 рассмотрен случай, когда Δ — граф с параметрами (77,16,0,4) или граф Хигмена–Симса.

§1. Предварительные результаты

В этом параграфе приведены некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 1.1. *Пусть* Γ — *локально* $GQ(s,t)$*-граф. Тогда максимальные клики из* Γ *состоят из* $s+2$ *точек (такие клики мы будем называть блоками), каждая точка лежит в* $(t+1)(st+1)$ *блоках, любые две смежные точки лежат в* $t+1$ *общих блоках, любые два блока пересекаются не более чем по двум точкам.*

Доказательство. Все утверждения следуют из определения расширения и свойств GQ [2]. •

Лемма 1.2. *Пусть* Λ *является гиперовалом обобщенного четырехугольника* $GQ(s,t)$, $\mu = |\Lambda|$. *Тогда* μ *четно, и верны неравенства:* $\mu_* \leqslant \mu \leqslant \mu^*$, *где* $\mu_* = \max\{2(t+1),(s+1)(t+2-s)\}$, $\mu^* = 2(st+1)$. *Далее, если* $\mu = (s+1)(t+2-s)$ *(если* $\mu=\mu^*$*), то для любой точки* $a \notin \Lambda$ *точно* $(t+2-s)/2$ *прямых (точно* $(t+1)$ *прямых), содержащих* a*, пересекают* Λ *по двум точкам.*

Доказательство. Оценки для μ и четность μ следуют из лемм 3.9, 3.11 [2]. Если $\mu=(s+1)(t+2-s)$, то из доказательства леммы 3.11 [2] следует, что для $a \notin \Lambda$ число прямых из $a^{\perp}$, не пересекающих Λ, равно $(s+t)/2$.

Если $\mu = \mu^*$, то по лемме 3.9 (b) [2] каждая содержащая a прямая пересекает Λ (естественно по двум точкам). •

Лемма 1.3. *Если Γ является сильно регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ), то*

(1) $k(k-\lambda-1) = \mu(v-k-1)$ (*прямоугольное соотношение*);

(2) *либо Γ имеет параметры $(4\mu+1, 2\mu, \mu-1, \mu)$ (половинный случай), либо неглавные собственные значения $n-m$, $-m$ графа Γ — целые числа, где $n^2 = (\lambda-\mu)^2 + 4(k-\mu)$, $n-\lambda+\mu = 2m$ и кратность $n-m$ равна $\frac{k(m-1)(k+m)}{\mu n}$;*

(3) *если m — целое число, большее 1, то $m-1$ делит $k-\lambda-1$ и*

$$\mu = \lambda + 2 + (m-1) - \frac{k-\lambda-1}{m-1}, \quad n = m-1+\frac{k-\lambda-1}{m-1}.$$

Доказательство. Все утверждения леммы, кроме последнего, хорошо известны (см., например, гл. 1 из [1]). Утверждение (3) — это лемма 3.1 из [4]. •

Требование того, что $\frac{k(m-1)(k+m)}{\mu n}$ является целым числом, называется условием целочисленности.

Лемма 1.4. *Пусть Γ — точечный граф обобщенного четырехугольника $GQ(s,t)$. Тогда Γ является сильно регулярным с параметрами $v = (s+1)(st+1)$, $k = s(t+1)$, $\lambda = s-1$, $\mu = t+1$ и $s+t$ делит $st(s+1)(t+1)$.*

Доказательство. Равенства для параметров следуют из определения GQ. Условие целочисленности для Γ принимает вид $s+t$ делит $st(s+1)(t+1)$. •

Лемма 1.5. *Пусть Γ — сильно регулярный локально $GQ(s,t)$ граф с параметрами (v, k, λ, μ). Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) $k = (s+1)(st+1)$, $\lambda = s(t+1)$ *и* $s+t$ *делит* $st(s+1)(t+1)$;

(2) $t \leqslant m-1 \leqslant st$, $m-1$ *делит* s^2t, $\mu = s(t+1)+m+1-s^2t/(m-1)$ *и* $n = m-1+s^2t/(m-1)$;

(3) $\mu \cdot n$ *делит* $(m-1)(s+1)(st+1)((s+1)(st+1)+m)$;

(4) $s+2$ *делит* $2t(t+1)(2t-1)(4t+\mu-2)$.

Доказательство. Утверждение (1) следует из леммы 1.4. Утверждения (2)–(3), кроме неравенства $t \leqslant m-1 \leqslant st$, следуют из определения GQ и леммы 1.3. Указанное неравенство следует из того, что $(s+1)(t+2-s) \leqslant \mu \leqslant 2(st+1)$.

Число блоков в Γ равно $v(t+1)(st+1)/(s+2)$. Отсюда следует утверждение (4). Лемма доказана. •

§2. Случай графов Мура

Пусть до конца работы Γ является вполне регулярным локально $GQ(s,t)$ графом, в котором каждый μ-подграф изоморфен известному сильно регулярному графу Δ. Тогда $k=(s+1)(st+1)$, $\lambda=s(t+1)$. Пусть $\Delta=[a]\cap[b]$. Заметим, что каждая прямая L обобщенного четырехугольника $[a]$ пересекает Δ по 0 или 2 точкам. Действительно, если $c\in L\cap\Delta$, то $M=(L\cup\{a\})-\{c\}$ является прямой из $[c]$ и по определению обобщенного четырехугольника $[b]$ содержит единственную точку d из M. Таким образом, $\{c,d\}=L\cap\Delta$.

В этом параграфе мы рассмотрим случаи, когда Δ — полный двудольный граф или граф Мура.

Лемма 2.1. *Если $\Delta=K_{t+1,t+1}$, то $t+1$ делит $s^2(s^2-1)$.*

Доказательство. Из прямоугольного соотношения $k(k-\lambda-1)=k_2\mu$, где $k_2=|\Gamma_2(a)|$ для любой вершины a, заключаем, что $2(t+1)$ делит $(s+1)(st+1)s^2t$.

Так как $t+1$ взаимно-просто с t, $(t+1,st+1)=(t+1,s-1)$, то $t+1$ делит $s^2(s^2-1)$. Лемма доказана. •

Лемма 2.2. *Если $\Delta=K_{t+1,t+1}$ и Γ сильно регулярен, то либо $s=1$, либо $s=4,t=1$, либо $s=t=2,3,8$ или 13.*

Доказательство. По теореме 3.1 из [8] выполняется заключение леммы или $s=t=4$. Но в последнем случае по [9] таких графов нет. •

Заметим, что локально $GQ(1,t)$ граф совпадает с $K_{3\times(t+1)}$. Пусть $s>1$. Для небольших значений t известна дополнительная информация. Если $t=1$, то окрестности вершин в Γ являются $(s+1)\times(s+1)$ решетками и по [5] Γ является графом Джонсона или его частным. Если $t=2$, то $s=2$ или 4. В случае $s=2$ граф Γ является единственным локально $GQ(2,2)$ графом с параметрами (36,15,6,6). Если же $s=4$, то по [6] Γ является единственным дистанционно регулярным локально $GQ(4,2)$-графом на 378 вершинах с массивом пересечений $(45,32,12,1;1,6,32,45)$.

Если $t=3$, то $s=3,5$ или 9. Если $s=3$, то по [7] Γ — единственный локально $GQ(3,3)$ граф с параметрами (176,40,12,8). Если $t=4$, то 5 делит $s^2(s^2-1)$, поэтому $s=4,6,11$ или 16. В случае $s=4$ граф Γ является сильно регулярным и по теореме из [9] не существует.

Пусть Δ является графом Мура. Если Δ — пятиугольник, то $t = 1$ и Γ является локально $(s+1)\times(s+1)$ решеткой. Противоречие с тем, что тогда связные компоненты μ-подграфов являются циклами четной длины.

Лемма 2.3. *Если Δ — граф Петерсена, то Γ является единственным сильно регулярным локально $GQ(2,2)$ графом с параметрами* $(28,15,6,8)$.

Доказательство. Если Δ — граф Петерсена, то $t = 2$ и $s = 1,2$ или 4. Но в случае $s = 1$ получим $\mu = 6$, противоречие. Если $s = 2$, то выполняется заключение леммы (см., например, [2]).

Пусть $s = 4$. Тогда по [6] вполне регулярный локально $GQ(4,2)$ граф имеет μ, равное 6 или 18. Лемма доказана. •

Пусть до конца параграфа Δ — граф Хофмана–Синглтона. Тогда $t = 6$. По условию целочисленности $s+6$ делит $42s(s+1)$ и $s = 3,4,6,8,9,12,14, 15,22,24,29,30$ или 36. Так как $\mu = 50$ делит $6s^2(s+1)(6s+1)$, то $s = 4,9,14,15,24,29$ или 30.

Лемма 2.4. *Пусть a,b — вершины из Γ с $d(a,b) = 2$, и $\Delta = [a]\cap[b]$ — граф Хофмана–Синглтона. Тогда для $x_i = |X_i(\Delta)\cap[b]|$ выполняются следующие утверждения:*

(1) $x_i = 0$ *для нечетных i и для* $i > 8$;

(2) $\sum x_i = (s+1)(6s+1)-50$, $\sum ix_i = 50(7s-7)$.

Доказательство. Если вершина c из $[b]-[a]$ смежна с вершиной из Δ, то $[c]\cap\Delta$ состоит из изолированных ребер. Заметим, что для ребра $\{u,w\}$ графа Δ подграф $\Delta-([u]\cup[w])$ состоит из 3 изолированных ребер. Поэтому $x_i = 0$ для нечетных i и для $i > 8$. Утверждение (1) доказано. •

Далее, $[b]-\Delta$ содержит $(s+1)(6s+1)-50$ вершин и каждая вершина из Δ смежна с $7s-7$ вершинами из $\Gamma-\Delta$. Отсюда следует утверждение (2).

Лемма 2.5. *Параметр s не равен* 4.

Доказательство. Если $s = 4$, то $\mu = 2(st+1) = 50$, и ввиду леммы 1.2 граф Γ сильно регулярен с параметрами $(366,125,28,50)$. Далее, $n^2 = (\lambda-\mu)^2 + 4(k-\mu) = 28^2$ и неглавные собственные значения графа равны $n-m = 3$, $-m = -25$. По условию целочисленности $n\mu = 28\cdot 50$ делит $(m-1)k(k+m) = 24\cdot 125\cdot 150$, противоречие. •

Лемма 2.6. *Граф Γ не является сильно регулярным.*

Доказательство. Если Γ — сильно регулярный граф с наименьшим собственным значением $-m$, то $m-1$ делит $6s^2$ и $\mu = 50 = \lambda+2+(m-1)-6s^2/(m-1)$.

Если $s = 9$, то $\lambda = 63$ и $15+(m-1) = 6\cdot 9^2/(m-1)$, противоречие. Если $s = 14$, то $\lambda = 98$ и $50+(m-1) = 6\cdot 14^2/(m-1)$. Если $m-1$ не делится на 7, то $50+(m-1)$ делится на 49, противоречие. Если же $m-1$ делится на 7, то $(m-1)$ делится на 49, снова противоречие.

Если $s = 15$, то $\lambda = 105$ и $57+(m-1) = 6\cdot 15^2/(m-1)$. Поэтому $m-1 = 3r$ и $19+r = 450/r$. Если r делится на 5, то r делится на 25 и $19+r > 450/r$, противоречие. Значит, r не делится на 5 и $19+r$ делится на 25, поэтому $r = 6$ и $25 \neq 450/6$, противоречие.

Если $s = 24$, то $\lambda = 168$ и $120+(m-1) = 6\cdot 24^2/(m-1)$. Поэтому $m-1 = 3r$ и $40+r = 2\cdot 24^2/r$. Если r делится на 3, то r делится на 9 и $40+r$ — степень 2, противоречие. Значит, r — степень 2 и $40+r$ делится на 9, поэтому $r = 32$ и $72 \neq 36$, противоречие.

Если $s = 29$, то $\lambda = 203$ и $155+(m-1) = 6\cdot 29^2/(m-1)$. Если $m-1$ делится на 29, то $m-1$ делится на 29^2, противоречие. Если же $m-1$ не делится на 29, то $155+(m-1) < 6\cdot 29^2/(m-1)$.

Наконец, если $s = 30$, то $\lambda = 210$ и $162+(m-1) = 6\cdot 30^2/(m-1)$. Поэтому $m-1 = 3^r l$. Если $r \leqslant 1$, то $162+(m-1)$ не делится на 9, а $6\cdot 30^2/(m-1)$ делится на 9. Если же $r \geqslant 2$, то $162+(m-1)$ делится на 9, а $6\cdot 30^2/(m-1)$ не делится на 9. В любом случае получим противоречие. Лемма доказана. •

§3. Случай графов Клебша и Гевиртца

В этом параграфе мы рассмотрим случаи, когда Δ — граф Клебша или граф Гевиртца.

Лемма 3.1. *Если Δ — граф Клебша, то $t = 4$ и $s = 2,4,6,8,11,12$ или 16. В случае $s = 2$ граф Γ является локально $GQ(2,4)$ графом Тэйлора на 56 вершинах.*

Доказательство. Если Δ — граф Клебша, то $t = 4$ и $s = 2,4,6,8,11,12$ или 16. В любом случае 16 делит $4(s+1)(4s+1)s^2$ и прямоугольное соотношение не дает новых ограничений.

Если $s = 2$, то Γ является локально $GQ(2,4)$ графом Тэйлора на 56 вершинах [2]. •

Лемма 3.2. *Пусть a, b — вершины из Γ с $d(a,b) = 2$, и $\Delta = [a]\cap[b]$ — граф Клебша. Через X_i обозначим множество вершин из $[b]-[a]$ смежных точно с i вершинами из Δ, $x_i = |X_i|$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *$x_i = 0$ для нечетных i и для $i > 8$;*

(2) $\sum x_i = (s+1)(4s+1) - 16$, $\sum ix_i = 16(5s-5)$;

(3) *если* $s = 4$, *то диаметр* Γ *равен* 3.

Доказательство. Если вершина c из $[b] - [a]$ смежна с вершиной из Δ, то $[c] \cap \Delta$ состоит из изолированных ребер. Заметим, что для ребра $\{u, w\}$ графа Δ подграф $\Delta - ([u] \cup [w])$ состоит из 3 изолированных ребер. Поэтому $x_i = 0$ для нечетных i и для $i > 8$. Утверждение (1) доказано. •

Далее, $\Gamma - \Delta$ содержит $(s+1)(4s+1) - 16$ вершин, и каждая вершина из Δ смежна с $5s - 5$ вершинами из $\Gamma - \Delta$. Отсюда следует утверждение (2).

Пусть $s = 4$. Тогда $k = 85$, $\lambda = 20$ и для любой вершины a получим $|\Gamma_2(a)| = 340$. Далее, $x_0 + x_2 + x_4 + x_6 + x_8 = 69$, $x_2 + x_4 + 3x_6 + 4x_8 = 120$.

Если Γ — сильно регулярный граф, то он имеет параметры (426, 85, 20, 16). Но в этом случае $n^2 = (\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu) = 292$, противоречие.

Если диаметр Γ не меньше 4 и $acbde$ — геодезический путь в Γ, то $[b]$ содержит подграфы Клебша $\Delta_1 = [a] \cap [b]$ и $\Delta_2 = [b] \cap [e]$ такие, что каждая вершина из Δ_1 находится на расстоянии 2 от любой вершины из Δ_2. Заметим, что число прямых в $[b]$ равно 85, причем 40 из них являются секущими для Δ_1 и не пересекают Δ_2. Симметрично 40 прямых из $[b]$ являются секущими для Δ_2 и не пересекают Δ_1. Таким образом, точно 5 прямых $L_1, \ldots, L_5$ из $[b]$ не пересекают Δ_1 и Δ_2.

Для вершины f из $[b] - (\Delta_1 \cup \Delta_2)$ через δ_f обозначим $|[f] \cap (\Delta_1 \cup \Delta_2)|$. Тогда $\delta_f \leqslant 10$ и для любой секущей M графа Δ_2 получим $\sum_{f \in M} |[f] \cap \Delta_2| = 12$, $\sum_{f \in M} |[f] \cap \Delta_1| = 16$, поэтому $\sum_{f \in M} \delta_f = 28$. Значит, для 2 точек $g \in M$ верно равенство $\delta_g = 10$ (и эти точки не попадают на прямые L_i), а для 1 точки $f \in M$ верно равенство $\delta_f = 8$ (и f принадлежит единственной прямой L_i).

Таким образом, либо найдется вершина z из $[b]$, лежащая на всех 5 прямых $L_1, \ldots, L_5$, либо прямые L_i, L_j попарно не пересекаются для любых различных $i, j \in \{1, \ldots, 5\}$. Но в последнем случае прямая, проходящая через точки, лежащие на прямых L_1, L_2, является секущей для одного из подграфов Δ_1, Δ_2 и содержит 2 точки f с $\delta_f = 8$, противоречие.

Положим $\Sigma = [b] - (z^\perp \cup \Delta_1 \cup \Delta_2)$, $Y_i = X_i(\Delta_1) \cap \Sigma$, $y_i = |Y_i|$. Тогда Σ — регулярный граф степени 5 без треугольников на 32 вершинах, $\sum y_i = 32$, $\sum iy_i = 160$.

Определим типы прямых, не проходящих через z относительно Δ_1. Если прямая M не пересекает Δ_1, то она является секущей для Δ_2 и содержит по точке из $X_i(\Delta_1)$, $X_j(\Delta_1)$ и из $X_l(\Delta_1)$ так, что $i + j + l = 16$. Будем считать, что точка из $M \cap X_i(\Delta_1)$ принадлежит $[z]$ и $j \leqslant l$. В этом случае скажем, что прямая M имеет тип (i, j, l). По структуре графа Клебша $\{i, j, l\} \neq \{4, 6, 6\}$. Поэтому прямые, не пересекающие Δ_1, имеют типы (0,8,8), (2,6,8), (4,4,8) или (6,2,8). Аналогично секущая L для Δ_1 содержит по точке из $[z]\cap X_i(\Delta_1)$, из $X_j(\Delta_1)$ и из $X_l(\Delta_1)$ так, что $j \geqslant l$ и $i+j+l=12$. Скажем, что прямая L имеет тип (i,j,l).

Если прямая имеет тип (i,j,l) относительно Δ_1, то она имеет тип $(8-i, 10-j, 10-l)$ относительно Δ_2, поэтому секущие для Δ_1 не могут быть типов (4,4,4) и (2,6,4). Таким образом, секущие для Δ_1 имеют типы (8,2,2), (6,4,2), (4,6,2) или (2,8,2).

Значит, окрестность точки из Y_2 содержит 4 точки из Y_8 и 1 из $Y_2 \cup Y_4 \cup Y_6 \cup Y_8$, окрестность точки из Y_4 содержит 3 точки из Y_8 и 2 из Y_2, окрестность точки из Y_6 содержит 2 точки из Y_8 и 3 из Y_2, окрестность точки из Y_8 содержит 4 точки из Y_2 и 1 из $Y_0 \cup Y_2 \cup Y_4 \cup Y_6$. Теперь число ребер между Y_2 и Y_8, попадающих на прямые, не пересекающие Δ_1, равно $4y_2$ и не превосходит y_8. Аналогично число ребер между Y_2 и Y_8, попадающих на прямые, пересекающие Δ_1, равно $4y_8$ и не превосходит y_2. Отсюда $y_2 = y_8 = 0$. Противоречие с тем, что тогда и $y_4 = y_6 = 0$.

Лемма 3.3. *Если Δ — граф Клебша, то Γ не является сильно регулярным.*

Доказательство. Пусть Δ — граф Клебша и Γ сильно регулярен с наименьшим собственным значением $-m$. По лемме 1.3 число $m-1$ делит $4s^2$ и $\mu = 16 = \lambda + 2 + (m-1) - 4s^2/(m-1)$.

Если $s=6$, то $\lambda = 30$ и $16 + (m-1) = 4 \cdot 6^2/(m-1)$. Поэтому $(m-1)$ является степенью 2 и $16+(m-1)$ делится на 9. Противоречие с тем, что тогда $18 \neq 72$.

Если $s=8$, то $\lambda=40$ и $26+(m-1) = 4\cdot 8^2/(m-1)$, противоречие. Если $s=11$, то $\lambda=55$ и $41+(m-1) = 4\cdot 11^2/(m-1)$. Поэтому $(m-1)$ не делится на 11 и $41+(m-1)$ делится на 11^2, противоречие.

Если $s=12$, то $\lambda=60$ и $46+(m-1) = 4\cdot 12^2/(m-1)$. Если $(m-1)$ делится на 3, то либо $(m-1)=9$ и $55\neq 64$, либо $(m-1)=18$ и $64 \neq 32$. Значит, $m-1$ — степень 2 и $46+(m-1)$ делится на 9. Поэтому $m-1=8$ и $54 \neq 72$, противоречие.

Если $s=16$, то $\lambda = 80$ и $66+(m-1) = 4\cdot 16^2/(m-1)$, противоречие. •

Лемма 3.4. *Если Δ — граф Гевиртца, то $t=9$ и $s = 3, 7, 27, 31$ или 63. В случае $s=3$ граф Γ является графом Маклафлина.*

Доказательство. Если Δ — граф Гевиртца, то $t=9$ и $s = 3,6,7,9,11,15,18,21,27,31,36,39,45,51,63,71,72$ или 81. Так как 56 делит $9s^2(s+1)(9s+1)$, то $s = 3,7,27,31$ или 63.

Если $s=3$, то по [7] Γ является графом Маклафлина. •

Лемма 3.5. *Если Δ — граф Гевиртца и Γ сильно регулярен, то Γ является графом Маклафлина.*

Доказательство. Пусть Δ — граф Гевиртца и Γ сильно регулярен с наименьшим собственным значением $-m$. Тогда по лемме 1.3 число $m-1$ делит $9s^2$ и $\mu = 56 = \lambda + 2 + (m-1) - 9s^2/(m-1)$. По лемме 3.4 имеем $s = 3, 7, 27, 31$ или 63.

Если $s = 7$, то $\lambda = 70$ и $16 + (m-1) = 9 \cdot 7^2/(m-1)$. Если $m-1$ делится на 7, то $m-1$ делится на 49 и $65 \neq 9$. Значит, $m-1$ — степень 3 и $16 + (m-1)$ делится на 49, противоречие.

Если $s = 27$, то $\lambda = 270$ и $216 + (m-1) = 9 \cdot 27^2/(m-1)$, противоречие. Если $s = 31$, то $\lambda = 310$ и $256 + (m-1) = 9 \cdot 31^2/(m-1)$. Поэтому $m-1$ не делится на 31 и $256 + (m-1)$ делится на 31^2, противоречие.

Если $s = 63$, то $\lambda = 630$ и $576 + (m-1) = 9 \cdot 63^2/(m-1)$. Поэтому $m-1 = 9r$ и $64 + r = 63^2/r$. Если r делится на 7, то r делится на 49 и $64 + 49 \neq 81$. Если же r не делится на 7, то r — степень 3 и $64 + r$ делится на 49, противоречие. Лемма доказана. •

§4. Δ — граф с $\mu > 2$

В этом параграфе мы рассмотрим случаи, когда Δ является графом с $\mu > 2$.

Лемма 4.1. *Пусть Δ является сильно регулярным графом с параметрами $(77, 16, 0, 4)$. Тогда $t = 15$ и $s = 21, 41, 55, 154$ или 195. Далее, Γ не является сильно регулярным графом.*

Доказательство. Пусть Δ является сильно регулярным графом с параметрами $(77, 16, 0, 4)$. Тогда $t = 15$, $s + 15$ делит $15 \cdot 16s(s+1)$ и 77 делит $15s^2(s+1)(15s+1)$. Отсюда $s = 21, 41, 55, 154$ или 195.

Если Γ сильно регулярен с наименьшим собственным значением $-m$, то по лемме 1.3 число $m-1$ делит $15s^2$ и $\mu = 77 = \lambda + 2 + (m-1) - 15s^2/(m-1)$.

Если $s = 21$, то $\lambda = 336$ и $261 + (m-1) = 15 \cdot 21^2/(m-1)$. Поэтому $15 \cdot 21^2/(m-1) - (m-1)$ делится на 9, противоречие.

Если $s = 41$, то $\lambda = 656$ и $581 + (m-1) = 15 \cdot 41^2/(m-1)$. Поэтому $m-1$ не делится на 41 и $581 + (m-1)$ делится на 41^2, противоречие.

Если $s = 55$, то $\lambda = 880$ и $803 + (m-1) = 15 \cdot 55^2/(m-1)$. Поэтому $m-1 = 11r$ и $71 + r = 3 \cdot 5^3/r$. Далее, r не делится на 5 и $71 + r$ делится на 125, противоречие.

Если $s = 154$, то $\lambda = 2464$ и $2387 + (m-1) = 15 \cdot 154^2/(m-1)$. Поэтому $m-1 = 11r$ и $217 + r = 15 \cdot 14^2/r$. Далее, $r = 7l$ и $31 + l = 60/l$, противоречие.

Если $s = 195$, то $\lambda = 3120$ и $3043 + (m-1) = 15 \cdot 195^2/(m-1) = 3^3 \cdot 5^3 \cdot 13/(m-1)$. Если $m-1$ делится на 5, то $m-1$ делится на 5^3 и $3043 + (m-1) > 15 \cdot 195^2/(m-1)$. Если $m-1$ делится на 3, то $m-1$ делится на 3^3 и снова $3043 + (m-1) > 15 \cdot 195^2/(m-1)$. Значит, $m-1 = 1$ или 13 и $3043 + (m-1)$ не делится на 5, противоречие. •

Лемма 4.2. *Пусть Δ является графом Хигмена–Симса. Тогда $t = 21$, $s = 19, 24, 34, 35, 39, 45, 49, 69, 84, 89, 99, 105, 115, 119, 144, 159, 175, 189, 199, 210, 214, 259, 294, 309, 339, 364, 375, 399, 419$ или 420. Далее, Γ не может быть сильно регулярным графом.*

Доказательство. Пусть Δ является графом Хигмена–Симса с параметрами $(100, 22, 0, 6)$. Тогда $t = 21$, $s + 21$ делит $21 \cdot 22s(s+1)$ и 100 делит $21s^2(s+1)(21s+1)$. Значит, s или $s+1$ делится на 5 и $s + 21$ делит $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11$. Отсюда $s = 9, 14, 15, 19, 24, 34, 35, 39, 45, 49, 69, 84, 89, 99, 105, 115, 119, 144, 159, 175, 189, 199, 210, 214, 259, 294, 309, 339, 364, 375, 399, 419$ или 420.

Напомним, что если $t > s$, то $\mu \geqslant (s+1)(t+2-s)$, поэтому $s \geqslant 19$. Если Γ сильно регулярен с наименьшим собственным значением $-m$, то по лемме 1.3 число $m-1$ делит $21s^2$ и $\mu = 100 = \lambda + 2 + (m-1) - 21s^2/(m-1)$.

Далее, $n^2 = (\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu) = (22s - 100)^2 + 4((s+1)(21s+1) - 100)$. Поэтому $x = (11s - 50)^2 + (s+1)(21s+1) - 100$ является квадратом. Если s нечетно, то $x \equiv 1 \pmod 8$ и $s + 1 \equiv 2 \pmod 4$. Если же s четно, то снова $x \equiv 1 \pmod 8$ и $s \equiv 0 \pmod 4$. Следовательно, $s = 24, 45, 49, 69, 84, 89, 105, 144, 189, 309, 364$ или 420.

Подстановкой этих значений s, убеждаемся, что в любом случае $(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)$ не является квадратом. •

Список литературы

[1] Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A., *Distance-regular graphs*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), vol. 18, Springer-Verlag, Berlin, 1989, 495 pp.

[2] Cameron P., Hughes D. R., Pasini A., *Extended generalized quadrangles*, Geom. Dedicata **35** (1990), 193–228.

[3] Damerell R. M., *On Moore graphs*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **74** (1973), 227–236.

[4] Махнев А. А., *О расширениях частичных геометрий, содержащих малые μ-подграфы*, Дискрет. анал. и исслед. операций **3** (1996), №3, 71–83.

[5] Blokhuis A., Brouwer A. E., *Locally 4-by-4 grid graphs*, J. Graph Theory **13** (1989), no. 2, 229–244.

[6] Махнев А. А., Падучих Д. В., *Расширения $GQ(4,2)$, вполне регулярный случай*, Дискрет. мат. **13** (2001), №3, 91–109.

[7] Махнев А. А., *Локально GQ(3,5)-графы и геометрии с короткими прямыми*, Дискрет. мат. **10** (1998), №2, 72–86.

[8] Fisher P. H., Hobart S. A., *Triangular extended generalized quadrangles*, Geom. Dedicata **37** (1991), 339–344.

[9] Makhnev A. A., *On strongly regular locally $GQ(4,t)$ graphs*, Internat. Conf. Combinatorica 2002, Maratea (Potenza), Abstracts, pp. 69–70.

Институт математики
и механики УрО РАН
Екатеринбург
Россия
E-mail: makhnev@imm.uran.ru

Поступило 10 января 2004 г.