ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

Серия математическая

29 (1965), 485—492

УДК 511

А. И. ВИНОГРАДОВ

О ПРОДОЛЖИМОСТИ В ЛЕВУЮ ПОЛУПЛОСКОСТЬ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ L-РЯДОВ ГЕККЕ С ХАРАКТЕРАМИ ВЕЛИЧИНЫ

(К 50-летию академика Ю. В. Линника в знак глубокого уважения)

Доказывается продолжимость скалярного произведения L-рядов Гекке до прямой $\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}$ и отсюда получаются некоторые арифметические следствия.

В работе ([1]) Гекке ввел L-ряды с характерами величины, доказал их продолжимость на всю плоскость и получил функциональное уравнение для них. Это позволило ему создать многомерную арифметику числовых полей.

Основная арифметическая задача, для решения которой Гекке создал эту аналитическую теорию, следующая. Дано поле k степени n. Будем рассматривать некоторый класс $\mathfrak{c}$ идеальных чисел этого поля как решетку в некотором n-мерном неэвклидовом пространстве t. Точное определение этого пространства дано в ([1]). Пусть в этом пространстве задана некоторая конечная область v. Спрашивается, сколько простых точек нашей решетки будет лежать в области v? Другими словами, требуется найти число решений уравнения

$$p = |N\hat{\mu}| = |\hat{\mu}_1 \cdot \hat{\mu}_2 \ldots \hat{\mu}_n| = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где p пробегает все простые числа рационального поля, N — абсолютная норма, $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \ldots, \hat{\mu}_n$ — все сопряженные идеального числа $\hat{\mu} \in \mathfrak{c}$, причем каждое $\hat{\mu}_i$ рассматривается как i-я координата точки $(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \ldots, \hat{\mu}_n)$ в пространстве t с условием $(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \ldots, \hat{\mu}_n) \in v$. f — форма степени n, отвечающая классу $\mathfrak{c}$.

Поставим общую задачу такого типа.

Пусть нам даны r алгебраических числовых полей $k_1, k_2, \ldots, k_r$ степеней $n_1, n_2, \ldots, n_r$ соответственно. В каждом из них выделим класс идеальных чисел $\mathfrak{c}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ и будем рассматривать его как решетку в соответствующем n_i-мерном неэвклидовом пространстве t_i.

В каждом пространстве t_i зададим область v_i. Спрашивается, сколько существует простых чисел p рационального поля, для которых разрешима система

$$p = |N_i\hat{\mu}_i| = |\hat{\mu}_{i,1} \cdot \hat{\mu}_{i,2} \ldots \hat{\mu}_{i,n_i}| = f_i(x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots, x_{i,n_i}), \quad 1 \leqslant i \leqslant r, \quad \text{(A)}$$

в случае ее совместности, где N_i — абсолютная норма поля k_i, $\hat{\mu}_{i,1}, \hat{\mu}_{i,2}, \ldots$ $\ldots, \hat{\mu}_{i,n_i}$ — n_i сопряженных числа $\hat{\mu} \in c_i$ поля k_i, точка $(\hat{\mu}_{i,1}, \hat{\mu}_{i,2}, \ldots$ $\ldots, \hat{\mu}_{i,n_i}) \in v_i$ в пространстве t_i, f_i — форма степени n_i, отвечающая классу c_i поля k_i.

С помощью известных приемов эта задача сводится к исследованию свойств скалярного произведения L-рядов Гекке с произведением двух характеров — характера величины Гекке и характера группы классов идеальных чисел в соответствующих полях:

$$\prod_{i=1}^{r} {}_cL(s, \lambda_i \cdot \chi_i, k_i) = \sum_{|N_1\hat{\mu}_1| = \ldots = |N_r\hat{\mu}_r|} \frac{\prod\limits_{i=1}^{r} \lambda_i(\hat{\mu}_i) \cdot \chi_i(\hat{\mu}_i)}{|N_1\mu_1|^s}, \tag{1}$$

где $\hat{\mu}_i$ пробегает все идеальные числа поля k_i, λ_i — некоторый характер величины Гекке поля k_i, χ_i — характер группы классов идеальных чисел поля k_i

Правую часть (1) можно записать в виде

$$\prod_{p=|N_1\hat{\pi}_1| = \ldots = |N_r\hat{\pi}_r|} \left[1 - \frac{1}{p^s} \prod_{i=1}^{r} \lambda_i(\hat{\pi}_i) \cdot \chi_i(\hat{\pi}_i)\right]^{-1} \varphi(2s), \tag{2}$$

где $\varphi(2s)$ — некоторое эйлеровское произведение, регулярное в полуплоскости $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$, $\hat{\pi}$ — идеальное простое число первой степени поля k_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$.

Пусть K — композит полей $(k_1, k_2, \ldots, k_r)$. Будем рассматривать только случай, когда степень n композита полей K равна произведению степеней соответствующих подполей:

$$n = n_1 \cdot n_2 \cdots n_r. \tag{3}$$

К нему сводится общий случай.

Рассмотрим следующий L-ряд поля K:

$$L(s, \lambda \cdot \chi, K) = \sum_{\mu} \frac{\lambda(\hat{\mu}) \cdot \chi(\hat{\mu})}{|N\hat{\mu}|^s}, \tag{4}$$

где $\hat{\mu}$ пробегает все идеальные числа поля K, а характеры λ и χ определяются следующим образом:

$$\lambda(\hat{\mu}) = \prod_{i=1}^{r} \lambda_i(N_{K/k_i}\hat{\mu}), \tag{5}$$

$$\chi(\hat{\mu}) = \prod_{i=1}^{r} \chi_i(N_{K/k_i}\hat{\mu}); \tag{6}$$

здесь N_{K/k_i} — относительная норма, т. е. норма идеального числа $\hat{\mu}$ поля K в отношении подполя k_i.

Отметим свойство L-ряда (4), имеющее для дальнейшего фундаментальное значение. В полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$

$$L(s, \lambda\cdot\chi, K) = \prod_{|N\hat{\pi}|=p}\left[1 - \frac{\lambda(\hat{\pi})\cdot\chi(\hat{\pi})}{p^s}\right]^{-1}\cdot\varphi_1(2s),$$

где $\varphi_1(2s)$ — некоторое эйлеровское произведение, регулярное в полуплоскости $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$, $\hat{\pi}$ — простое идеальное число первой степени поля K. Но в силу равенства (3) и определений (5) и (6) мы получаем основное соотношение этой работы:

$$\prod_{|N\hat{\pi}|=p}\left[1 - \frac{\lambda(\hat{\pi})\cdot\chi(\hat{\pi})}{p^s}\right]^{-1} =$$

$$= \prod_{p=|N_1\hat{\pi}_1|=\ldots=|N_r\hat{\pi}_r|}\left[1 - \frac{1}{p^s}\prod_{i=1}^{r}\lambda_i(\hat{\pi}_i)\cdot\chi_i(\hat{\pi}_i)\right]^{-1}, \tag{7}$$

где правая часть (7) совпадает с произведением, входящим в (2). Следовательно,

$$\prod_{i=1}^{r} {}_cL(s, \lambda_i\cdot\chi_i, k_i) = L(s, \lambda\cdot\chi, K)\,\frac{\varphi\cdot(2s)}{\varphi_1(2s)}\,. \tag{8}$$

Если теперь показать, что (4) продолжимо на всю плоскость, то из (8) сразу же получим продолжимость (1) на полуплоскость $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$. Для арифметических приложений этого вполне достаточно.

Покажем прежде всего, что характер λ, определенный равенством (5), является характером величины Гекке поля K. Действительно, если η — произвольная единица поля K, то

$$\lambda(\eta\hat{\mu}) = \lambda(\hat{\mu}),$$

$$\lambda(\hat{\mu}\cdot\hat{\mu}') = \lambda(\hat{\mu})\cdot\lambda(\hat{\mu}'),$$

$$|\lambda(\hat{\mu})| = 1\,.$$

В отличие от общего характера величины Гекке, построенного в ([1]), характер (5) является вырожденным, так как в его фактическом построении участвует не вся группа единиц поля K, а только ее подгруппа, составленная из единиц подполей k_i, $1 \leqslant i \leqslant r$. Для того чтобы задачу окончательно свести к L-рядам Гекке с характерами величины, нам еще нужно рассмотреть свойства характера χ, определенного равенством (6), в поле K.

Пусть H — число классов идеальных чисел поля K и $\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \ldots, \hat{\gamma}_m$ — их базис, т. е. каждое идеальное число $\hat{\mu}$ поля K можно представить в виде

$$\hat{\mu} = \mu\cdot\hat{\gamma}_1^{a_1}\cdot\hat{\gamma}_2^{a_2}\ldots\hat{\gamma}_m^{a_m}, \tag{9}$$

где μ — целое число поля K, показатели a_ν пробегают конечные интервалы: $0 \leqslant a_\nu \leqslant H_\nu - 1, 1 \leqslant \nu \leqslant m$, причем $H = H_1 \cdot H_2 \ldots H_m$. Каждый класс идеальных чисел представим в виде (9) с некоторой закрепленной системой показателей $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$.

Пусть C_j $(1 \leqslant j \leqslant H)$ — некоторый класс идеальных чисел (9) с однозначно отнесенной ему системой показателей $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$. Рассмотрим относительные нормы этого класса в поле k_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$:

$$N_{K/k_i}(\mu \cdot \hat{\gamma}_1^{a_1} \cdot \hat{\gamma}_2^{a_2} \ldots \hat{\gamma}_m^{a_m}) = N_{K/k_i}(\mu) \cdot \prod_{\nu=1}^{m} (N_{K/k_i}\hat{\gamma}_\nu)^{a_\nu}. \tag{10}$$

Пусть h_i — число классов идеальных чисел поля k_i и $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \ldots, \hat{\beta}_{m_i}$ — их базис, т. е. каждое идеальное число $\hat{\mu}_i$ поля k_i можно представить в виде

$$\hat{\mu}_i = \mu_i \cdot \hat{\beta}_1^{b_1} \cdot \hat{\beta}_2^{b_2} \ldots \hat{b}_{m_i}^{b_{m_i}}, \tag{11}$$

где μ_i пробегает целые числа поля k_i, а показатели b_ν — интервалы $0 \leqslant b_\nu \leqslant l_\nu - 1$, $1 \leqslant \nu \leqslant m_i$, причем $h_i = l_1 \cdot l_2 \ldots l_{m_i}$. Каждый класс идеальных чисел поля k_i, для которых характер χ_i принимает одно и то же значение, представим в виде (11) с закрепленной системой индексов $(b_1, b_2, \ldots, b_{m_i})$.

Так как относительные нормы $N_{K/k_i}\hat{\gamma}_\nu$, $1 \leqslant \nu \leqslant m$, в (10) идеальных базисных чисел поля K являются идеальными числами поля k_i или их ассоциированными, то существует такое вполне определенное целое число $\mu_{i,0}$ поля k_i и такая однозначно отнесенная система показателей $(b_1, b_2, \ldots, b_{m_i})$, что

$$\prod_{\nu=1}^{m} (N_{K/k_i}\hat{\gamma}_\nu)^{a_\nu} = \mu_{i,0} \cdot \beta_1^{b_1} \cdot \beta_2^{b_2} \ldots \beta_{m_i}^{b_{m_i}}. \tag{12}$$

Следовательно, для любого идеального числа $\hat{\mu}$ поля K, принадлежащего классу C_j, имеем из (10) и (12):

$$\chi_i(N_{K/k_i}\hat{\mu}) = \chi_i(\beta_1^{b_1}\beta_2^{b_2} \ldots \beta_{m_i}^{b_{m_i}}) = \chi_i(c_{ij}), \tag{13}$$

где c_{ij} — некоторый класс идеальных чисел (11) поля k_i, однозначно отнесенный, с помощью равенства (12), классу C_j идеальных чисел поля K.

Заставляя i в равенстве (13) пробегать свою систему индексов $1 \leqslant i \leqslant r$, мы получаем следующее утверждение. Характер χ, определенный на идеальных числах поля K равенством (6), принимает одно и то же значение на всех числах $\hat{\mu}$ одного класса C_j. Это значение $\chi(\hat{\mu})$ определяется равенством

$$\chi(\hat{\mu}) = \chi(C_j) = \prod_{i=1}^{r} \chi_i(c_{ij}), \quad \hat{\mu} \in C_j.$$

На основе этого равенства L-ряд (4) можно преобразовать к виду

$$L(s, \lambda\cdot\chi, K) = \sum_{j=1}^{H} \chi(\mathrm{C}_j) \sum_{\hat{\mu}\in \mathrm{C}_j} \frac{\lambda(\hat{\mu})}{|N\hat{\mu}|^s}. \tag{14}$$

Но в правой части (14) мы получили L-ряд Гекке с вырожденным характером величины λ на классе C_j идеальных чисел поля K, который уже продолжи́м на всю плоскость и имеет функциональное уравнение. Это нетрудно проверить, повторяя почти дословно выкладки Гекке в работе ([1]). Наиболее существенный пункт проверки в § 6 работы ([1]) при установлении равенства

$$E(u, \hat{\mu}, x_1, \ldots, x_l + 1, x_{l+1}, \ldots, x_r) = F(u, \eta\hat{\mu}, x_1, \ldots, x_r),$$

которое в работе ([1]) обозначено цифрой (37). Оно выполняется и для вырожденного характера λ, так как для любой единицы η поля K

$$\lambda(\eta) = 1.$$

Отсюда следуют продолжимость (1) влево до половинной прямой и необходимые оценки модуля для арифметических приложений.

Заметим, что продолжимость (1) на всю плоскость в принципе осуществима. Для этого нужно продолжить влево за прямую $\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}$ отношение $\varphi(2s)/\varphi_1(2s)$. Это можно сделать, если соединить теорию L-рядов Артина с неабелевыми характерами с теорией L-рядов Гекке с характерами величины. В этом случае может появиться бесконечно много особых точек в полосе $0 < \mathrm{Re}\, s < \frac{1}{2}$ типа полюсов и точек ветвления.

Как уже было отмечено в начале статьи, задача нахождения асимптотики числа решений системы (A) только тогда имеет смысл, когда эта система вообще совместна, т. е. для данных форм $f_1, f_2, \ldots, f_r$, порожденных классами $\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2, \ldots, \mathrm{c}_r$ полей $k_1, k_2, \ldots, k_r$, система

$$f_1 = f_2 = \ldots = f_r \tag{15}$$

имеет асимптотику числа нетривиальных решений. Полученный аналитический аппарат должен отличать случай совместности и несовместности системы (15). Покажем, как это происходит. Предположим, что выполняется равенство $\varphi(2s) = \varphi_1(2s)$. Во всяком случае его опровержение только технически затруднит, но не опровергнет следующую иллюстрацию. С помощью известного приема получаем:

$$\sum_{f_1=f_2=\ldots=f_r} \frac{1}{f_1^s} = \left(\prod_{i=1}^{r} h_i\right)^{-1} \sum_{\chi_1} \ldots \sum_{\chi_r} \bar{\chi}_1(\mathrm{c}_1) \ldots \bar{\chi}_r(\mathrm{c}_r) \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{H} \chi(\mathrm{C}_j)\, \zeta_k(s, \mathrm{C}_j) = \frac{\omega_k w_k}{s-1} + R(s), \tag{16}$$

где $R(s)$ регулярна во всей плоскости,

$$w_K = \sum_{j=1}^{H} \prod_{i=1}^{r} \left\{ \frac{1}{h_i} \sum_{\chi_i} \frac{\chi_i(\mathfrak{c}_{ij})}{\chi_i(\mathfrak{c}_i)} \right\},$$

$\omega_K > 0$ — вычет $\zeta_K(s, \mathfrak{C}_j)$ в точке $s = 1$, причем w_K будет отлично от нуля в том случае, когда хотя бы для одного j и для всех i

$$\mathfrak{c}_i = \mathfrak{c}_{ij}, \quad 1 \leqslant i \leqslant r.$$

Представляет арифметический интерес применить вышеизложенные соображения к нахождению асимптотической формулы для представления нуля неопределенной квадратичной формой, составленной из разности двух бинарных квадратичных форм.

Пусть

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = f_1(x_1, x_2) - f_2(x_3, x_4),$$

где

$$f_1(x_1, x_2) = a_1 x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + a_2 x_2^2,$$

$$f_2(x_3, x_4) = a_3 x_3^2 + a_{34} x_3 x_4 + a_4 x_4^2,$$

причем из двух бинарных форм f_1 и f_2 хотя бы одна должна быть положительно определенной. Пусть этим свойством обладает первая форма:

$$d_1 = a_{12}^2 - 4a_1 a_2 < 0.$$

Дискриминант второй формы может иметь любой знак:

$$d_2 = a_{34}^2 - 4a_3 \cdot a_4 \gtrless 0.$$

Спрашивается, сколько существует решений уравнения

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

при условии $f_1(x_1, x_2) \leqslant N$?

Используя (16), получим:

$$\sum_{\substack{F(x_1, x_2, x_3, x_4)=0 \\ f_1(x_1, x_2) \leqslant N}} 1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-iN^2}^{2+iN^2} \frac{N^s}{s} \left(\sum_{f_1 = f_2 \neq 0} \frac{1}{f_1^s(x_1, x_2)} \right) ds + O(1) =$$

$$= \frac{1}{h_1 \cdot h_2} \sum_{\chi_1, \chi_2} \sum_{j=1}^{H} \frac{\chi_1(\mathfrak{c}_{1j}) \cdot \chi_2(\mathfrak{c}_{2j})}{\chi_1(\mathfrak{c}_1) \cdot \chi_2(\mathfrak{c}_2)} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{2-iN^2}^{2+iN^2} \frac{N^s}{s} \zeta_K(s, \mathfrak{C}_j)\, ds + O(1).$$

Здесь $\mathfrak{c}_1$ и $\mathfrak{c}_2$ — классы идеальных чисел в квадратичных полях k_1 и k_2, которые соответствуют формам f_1 и f_2 соответственно. Перенесем контур интеграла влево на половинную прямую. При этом пройдем полюс в точке $s = 1$ с вычетом $\omega_K \cdot N$:

$$\sum_{\substack{F(x_1, x_2, x_3, x_4)=0 \\ f_1(x_1, x_2) \leqslant N}} 1 = \omega_k \cdot w_k N + \frac{1}{h_1 \cdot h_2} \sum_{\chi_1, \chi_2} \sum_{j=1}^{H} \frac{\chi_1(\mathfrak{c}_{1j}) \cdot \chi_2(\mathfrak{c}_{2j})}{\chi_1(\mathfrak{c}_1) \cdot \chi_2(\mathfrak{c}_2)} \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi i} \int_{1/2-iN^2}^{1/2+iN^2} \frac{N^s}{s} \zeta_K(s, \mathfrak{C}_j)\, ds + O(1).$$

Композит полей K — поле четвертой степени, поэтому для $\zeta_K(s, \mathrm{C}_j)$ на половинной прямой можно получить приближенное функциональное уравнение с отрезками соответствующих рядов длины $|t|^2$, где $s = \sigma + it$. Это как раз предельная длина для получения на половинной прямой оценки

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1/2-iN^2}^{1/2+iN^2} \frac{N^s}{s}\zeta_K(s, \mathrm{C}_j)\,ds \ll \sqrt{N}\cdot\ln^{C_4} N.$$

Следовательно,

$$\sum_{\substack{F(x_1, x_2, x_3, x_4)=0\\ f_1(x_1, x_2)\leqslant N}} 1 = \omega_K\cdot w_K\cdot N + O(\sqrt{N}\cdot\ln^{C_4} N).$$

Таким образом, для неопределенных форм такого вида получается предельный остаток в формуле для числа представлений нуля. В случае несовместности форм f_1 и f_2 $w_k = 0$.

Использование приближенного функционального уравнения для произвольного K приводит к следующей общей асимптотической формуле для системы форм:

$$\sum_{\substack{|f_1|=\ldots=|f_r|\\ |f_1|\leqslant N}} 1 = \omega_k\cdot w_k\cdot N + O(N^{1-\frac{r}{n}}\ln^{C_n} N),$$

где n — степень композита полей.

Заметим, что справедливость гипотезы Римана для всех дзета-функций и L-рядов всех полей привела бы к предельному остатку и в общем случае:

$$\sum_{\substack{|f_1|=\ldots=|f_r|\\ |f_1|\leqslant N}} 1 = \omega_k\cdot w_k\cdot N + O(N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$

При переходе к подсчету числа решений системы форм с условием, что соответствующие точки $(\hat{\mu}_1, \ldots, \hat{\mu}_{n_i}) \in v_i$, как это было сформулировано в начале работы, мы естественно приходим к ухудшению остатков в соответствующих асимптотических формулах. И, наконец, в самом общем случае, когда еще накладывается требование простоты, т. е.

$$p = |f_1| = \ldots = |f_r| \quad \text{и} \quad (\hat{\mu}_1, \ldots, \hat{\mu}_{n_i}) \in v_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant r,$$

остаток в асимптотических формулах имеет порядок

$$N\cdot e^{-a\sqrt{\ln N}},$$

так как в настоящее время можно только показать, что граница нулей L-рядов Гекке композита полей K с характером величины λ подчинена условию

$$\sigma > 1 - \frac{c_n}{\ln|D| + \ln(|t|+1)}, \qquad s = \sigma + it,$$

где D — дискриминант поля K.

Ленинградское отделение
Матем. института АН СССР

Поступило
10. XI.1964

ЛИТЕРАТУРА

1 Hekke E., Eine neue Art von Zetafunctionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen zweite Mitteilung, Math. Zeitschr., 6 (1920), 11—51.

Технический редактор *Т. Н. Смолянникова*

Подписано к печати 24/III 1965 г. Тираж 2260 экз. Зак. 1708
Формат бумаги $70\times108^1/_{16}$. Печ. л. 21,7 Бум. л. $7^3/_4$ Уч.-изд. листов 18,8

2-я типография издательства «Наука». Москва, Шубинский пер., 10