



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Изобов, Е. Н. Крупчик, Построение системы Пфаффа с произвольными кусочно-непрерывными характеристическими степенными функциями,
Дифференц. уравнения, 2005, том 41, номер 2, 177–185

<https://www.mathnet.ru/de11222>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.82

29 апреля 2025 г., 07:53:59



ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.936

ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМЫ ПФАФФА С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМИ СТЕПЕННЫМИ ФУНКЦИЯМИ

© 2005 г. Н. А. Изобов, Е. Н. Крупчик

Рассматриваем линейную систему Пфаффа

$$\partial x / \partial t_i = A_i(t)x, \quad x \in R^n, \quad t = (t_1, t_2) \in R_{>1}^2, \quad i = 1, 2, \quad n \in N, \quad (1_n)$$

с ограниченными непрерывно дифференцируемыми матрицами $A_i(t)$, удовлетворяющими условию полной интегрируемости [1, с. 43–44; 2, с. 21–24]

$$\partial A_1(t) / \partial t_2 + A_1(t)A_2(t) = \partial A_2(t) / \partial t_1 + A_2(t)A_1(t), \quad t \in R_{>1}^2.$$

Пусть $p = p[x] \in R^2$ и $\lambda = \lambda[x] \in R^2$ – соответственно нижний характеристический [3] и характеристический [4] векторы нетривиального решения $x : R_{>1}^2 \rightarrow R^n \setminus \{0\}$ системы (1_n) , а $P_x = \{p[x]\}$ и $\Lambda_x = \{\lambda[x]\}$ – нижнее характеристическое и характеристическое множества этого решения, являющиеся ограниченными, замкнутыми и представимыми [3, 4] монотонно убывающими соответственно выпуклой вверх и выпуклой вниз кривыми $p_2 = \varphi(p_1) : [\alpha_1, \alpha_2] \rightarrow [\beta_1, \beta_2]$ и $\lambda_2 = f(\lambda_1) : [a_1, a_2] \rightarrow [b_1, b_2]$ плоскости R^2 .

Введем в рассмотрение аналоги характеристической степени Б.П. Демидовича [5] функции одной переменной – нижние [6] $\underline{d} = \underline{d}_x(p) \in R^2$ и верхние [7] $\bar{d} = \bar{d}_x(\lambda) \in R^2$ характеристические степени рассматриваемого решения $x \neq 0$, определяемые условиями

$$\underline{ln}_x(p, \underline{d}) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|x(t)\| - (p, t) - (\underline{d}, \ln t)}{\|\ln t\|} = 0, \quad \underline{ln}_x(p, \underline{d} + \varepsilon e_i) < 0, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad i = 1, 2,$$

$$\bar{ln}_x(\lambda, \bar{d}) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|x(t)\| - (\lambda, t) - (\bar{d}, \ln t)}{\|\ln t\|} = 0, \quad \bar{ln}_x(\lambda, \bar{d} - \varepsilon e_i) > 0, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad i = 1, 2,$$

в которых $e_i = (2 - i, i - 1)$ и $\ln t \equiv (\ln t_1, \ln t_2) \in R_+^2$, а также нижнее $\underline{D}_x(p) = \{\underline{d}_x(p)\}$ и верхнее $\bar{D}_x(\lambda) = \{\bar{d}_x(\lambda)\}$ степенные множества.

Известно [6], что если для внутренней точки $p = (p_1, \varphi(p_1)) \in P_x$, $p_1 \in (\alpha_1, \alpha_2)$, и внутренней точки $\lambda = (\lambda_1, f(\lambda_1)) \in \Lambda_x$, $\lambda_1 \in (a_1, a_2)$, существуют соответственно конечные пределы $\underline{c}_x(p_1) \equiv \sqrt{2} \underline{ln}_x((p_1, \varphi(p_1)), 0)$ и $\bar{c}_x(\lambda_1) \equiv \sqrt{2} \bar{ln}_x((\lambda_1, f(\lambda_1)), 0)$, то индивидуальные внутренние нижнее $\underline{D}_x(p)$ и верхнее $\bar{D}_x(\lambda)$ степенные множества решения $x \neq 0$ есть соответственно прямые $\underline{d}_1 + \underline{d}_2 = \underline{c}_x(p_1)$ и $\bar{d}_1 + \bar{d}_2 = \bar{c}_x(\lambda_1)$ плоскости R^2 .

В работе [8] установлено, что левое $\underline{D}_x(p')$, $p' = (\alpha_1, \beta_2)$, и правое $\underline{D}_x(p'')$, $p'' = (\alpha_2, \beta_1)$, граничные нижние, и левое $\bar{D}_x(\lambda')$, $\lambda' = (a_1, b_2)$, и правое $\bar{D}_x(\lambda'')$, $\lambda'' = (a_2, b_1)$, граничные верхние степенные множества решения $x \neq 0$ системы (1_n) могут не совпадать ни с какой прямой двумерной плоскости и даже не содержать отрезка прямой.

Поэтому естественно ввести в рассмотрение нижнюю $\underline{c}_x(p_1)$ и верхнюю $\bar{c}_x(\lambda_1)$ характеристические степенные функции решения $x \neq 0$ системы (1_n) , определенные на интервалах (α_1, α_2) и (a_1, a_2) соответственно.

В работе [6] начато исследование этих функций, а именно для некоторых кусочно-постоянных и некоторых непрерывных функций построены такие вполне интегрируемые системы Пфаффа (1_n) с бесконечно дифференцируемыми и ограниченными коэффициентами, что характеристические степенные функции $\underline{c}_x(p_1)$ и $\bar{c}_x(\lambda_1)$ нетривиальных решений этих систем

совпадают с заданными функциями. Следующим шагом к описанию функций $\underline{c}_x(p_1)$ и $\bar{c}_x(\lambda_1)$ является реализация произвольно заданной кусочно-непрерывной функции характеристическими степенными функциями какого-то нетривиального решения некоторой системы (1_n) .

Под кусочно-непрерывной на отрезке функцией, согласно [9, с. 106], будем понимать функцию, непрерывную всюду на этом отрезке, за исключением конечного числа точек разрыва первого рода.

Справедлива

Теорема 1. Для произвольных натурального числа n и кусочно-непрерывной функции $g : [\alpha_1, \alpha_2] \rightarrow R$ существует такая вполне интегрируемая система Пфаффа (1_n) с бесконечно дифференцируемыми и ограниченными коэффициентами, что для всякого ее нетривиального решения $x : R_{>1}^2 \rightarrow R^n \setminus \{0\}$ область определения кривой P_x совпадает с отрезком $[\alpha_1, \alpha_2]$ и выполнено равенство

$$\underline{c}_x(p_1) = g(p_1), \quad \forall p_1 \in (\alpha_1, \alpha_2). \quad (2)$$

Доказательство. Заметим, что ее доказательство достаточно провести для случая $n = 1$. Действительно, построив одномерное вполне интегрируемое уравнение Пфаффа

$$\partial x / \partial t_i = a_i(t)x, \quad x \in R, \quad t \in R_{>1}^2, \quad i = 1, 2, \quad (1_1)$$

с бесконечно дифференцируемыми ограниченными коэффициентами и нижней характеристической степенной функцией $\underline{c}_x(p_1[x_1])$ своего нетривиального решения $x_1 : R_{>1}^2 \rightarrow R \setminus \{0\}$, совпадающей с функцией $g(p_1[x_1])$ для всех $p_1[x_1] \in (\alpha_1, \alpha_2)$, требуемую n -мерную систему (1_n) можно взять диагональной с матрицей коэффициентов $A_i(t) = \text{diag}[a_i(t), \dots, a_i(t)]$, $i = 1, 2$, n -го порядка. Тогда матрица $X(t) = x_1(t)E_n$, где E_n - единичная матрица n -го порядка, является фундаментальной матрицей построенной системы (1_n) и всякое ее нетривиальное решение $x : R_{>1}^2 \rightarrow R^n \setminus \{0\}$ представимо в виде $x(t) = X(t)c = x_1(t)c$ с некоторым $c \in R^n \setminus \{0\}$. Поэтому у этого решения и решения x_1 уравнения (1_1) совпадают нижние характеристические векторы $p[x] = p[x_1]$, а тем самым и нижние характеристические степенные функции $\underline{c}_x(p_1[x]) = \underline{c}_{x_1}(p_1[x_1])$.

Рассмотрим вначале случай отрезка $[\alpha_1, \alpha_2]$, расположенного на прямой R так, что справедливы неравенства $\alpha_1 < \alpha_2 < 0$.

1. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Решение x уравнения Пфаффа (1_1) будем строить в виде

$$\ln x(t) = \ln \phi(t) + \nu(t) \ln \psi(t), \quad t \in R_{>1}^2. \quad (3)$$

Функцию ϕ будем определять таким образом, чтобы область определения кривой P_ϕ ее нижнего характеристического множества совпадала с отрезком $[\alpha_1, \alpha_2]$ и все точки $p[\phi]$ нижнего характеристического множества P_ϕ реализовывались по разным направлениям $\theta_t \equiv t_2/t_1$, зависящим от $p[\phi]$. Функцию ν будем задавать на основе функции $g(-\sqrt{\theta_t})$ так, чтобы для решения x выполнялось равенство (2), функция $\ln x$ была бесконечно дифференцируема и ее производные $\partial \ln x(t) / \partial t_i$, $i = 1, 2$, были ограничены.

С помощью бесконечно дифференцируемой стандартной функции [10, с. 54]

$$e_{01}(\tau; \tau_1, \tau_2) = \begin{cases} \exp\{-(\tau - \tau_1)^{-2} \exp[-(\tau_2 - \tau)^{-2}]\}, & \tau \in (\tau_1, \tau_2), \\ [1 + \text{sgn}(\tau - 2^{-1}(\tau_1 + \tau_2))]/2, & \tau \notin (\tau_1, \tau_2), \end{cases}$$

$-\infty < \tau_1 < \tau_2 < +\infty$, определим также бесконечно дифференцируемые функции ϕ и ψ соответственно равенствами

$$\ln \phi(t) = -2\sqrt{t_1 t_2} + (2\sqrt{t_1 t_2} + t_2/\alpha_1) e_{01}(\theta_t/(2\alpha_1^2); 1/2, 1) + (2\sqrt{t_1 t_2} + \alpha_2 t_1) [1 - e_{01}(\theta_t/\alpha_2^2; 1/2, 1)], \quad (4)$$

$$\ln \psi(t) = e_{01}(\theta_t/\alpha_2^2; 1/2, 1) [1 - e_{01}(\theta_t/(2\alpha_1^2); 1/2, 1)] \ln t_1, \quad t \in R_{>1}^2. \quad (5)$$

Пусть функция g на интервале (α_1, α_2) имеет k точек разрыва $\alpha_1 < \Delta_1 < \Delta_2 < \dots < \Delta_k < \alpha_2$. Обозначим для удобства записи $\Delta_0 = \alpha_1$, $\Delta_{k+1} = \alpha_2$ и $\tau_j = \Delta_j - \Delta_{j-1}$, $j = \overline{1, k+1}$. По функции g введем в рассмотрение новые функции $g_j : [\Delta_{j-1}, \Delta_j] \rightarrow R$, $j = \overline{1, k+1}$, заданные равенствами $g_j(\Delta) = g(\Delta)$, $\Delta \in (\Delta_{j-1}, \Delta_j)$, $g_j(\Delta_{j-1}) = g(\Delta_{j-1} + 0)$, $g_j(\Delta_j) = g(\Delta_j - 0)$. Очевидно, что каждая функция g_j является непрерывной на отрезке $[\Delta_{j-1}, \Delta_j]$, $j = \overline{1, k+1}$. По теореме Вейерштрасса о приближении функций для каждой функции $g_j(\Delta)$ существует последовательность алгебраических многочленов $\{P_l^{(j)}(\Delta)\}_{l \in N}$, равномерно сходящаяся на $[\Delta_{j-1}, \Delta_j]$ к функции $g_j(\Delta)$. В силу теоремы Вейерштрасса о непрерывных на отрезке функциях корректны следующие обозначения:

$$\mu_l = \max_{j=\overline{1, k+1}} (\max_{\Delta \in [\Delta_{j-1}, \Delta_j]} |P_l^{(j)}(\Delta)|) < +\infty, \quad \rho_l = \max_{j=\overline{1, k+1}} (\max_{\Delta \in [\Delta_{j-1}, \Delta_j]} |dP_l^{(j)}(\Delta)/d\Delta|) < +\infty.$$

Исходя из некоторого значения $\delta_0 > (\max_{j=\overline{0, k+1}} |g(\Delta_j)|)^4 (1 + 2\alpha_1^2) + 1$, введем в рассмотрение числа $\gamma_l = (\delta_{l-1} + (1 + \rho_l^2 + \mu_l^4)(1 + \alpha_1^2))l^2$ и $\delta_l = \gamma_l e^2$, $l \in N$. Разобьем квадрант $R_{>1}^2$ - область определения строящегося решения x - на непересекающиеся "основные" $\Pi(l) = \{t \in R_{>1}^2 : \delta_l \leq t_1 + t_2 \equiv \zeta(t) \leq \gamma_{l+1}\}$ и "переходные" $\tilde{\Pi}(l) = \{t \in R_{>1}^2 : \gamma_l < \zeta(t) < \delta_l\}$, $l \in N$, полосы и треугольник $T = \{t \in R_{>1}^2 : \zeta(t) \leq \gamma_1\}$.

Перейдем теперь к построению функции ν . Определим вначале вспомогательные функции ν_l , $l \in N$, по следующему правилу:

$$\nu_l(t) = P_l^{(j)}(-\sqrt{\theta_t}), \quad \theta_t \in [(\Delta_j - \tau_j/(2\sqrt{l}))^2, (\Delta_{j-1} + \tau_j/(2\sqrt{l}))^2], \quad j = \overline{1, k+1}, \quad (6_1)$$

$$\nu_l(t) = g(\Delta_j), \quad \theta_t \in [(\Delta_j + \tau_{j+1}/(4\sqrt{l}))^2, (\Delta_j - \tau_j/(4\sqrt{l}))^2], \quad j = \overline{1, k}, \quad (6_2)$$

$$\nu_l(t) = P_l^{(j)}(-\sqrt{\theta_t}) + [g(\Delta_j) - P_l^{(j)}(-\sqrt{\theta_t})][1 - e_{01}(2\sqrt{l}(\Delta_j + \sqrt{\theta_t})/\tau_j; 1/2, 1)], \quad (6_3)$$

$$\theta_t \in ((\Delta_j - \tau_j/(4\sqrt{l}))^2, (\Delta_j - \tau_j/(2\sqrt{l}))^2), \quad j = \overline{1, k+1},$$

$$\nu_l(t) = g(\Delta_j) + [P_l^{(j+1)}(-\sqrt{\theta_t}) - g(\Delta_j)][1 - e_{01}(2\sqrt{l}(\Delta_j + \sqrt{\theta_t})/\tau_{j+1}; -1, -1/2)], \quad (6_4)$$

$$\theta_t \in ((\Delta_j + \tau_{j+1}/(2\sqrt{l}))^2, (\Delta_j + \tau_{j+1}/(4\sqrt{l}))^2), \quad j = \overline{0, k},$$

$$\nu_l(t) = g(\alpha_1), \quad \theta_t \geq (\alpha_1 + \tau_1/(4\sqrt{l}))^2, \quad (6_5)$$

$$\nu_l(t) = g(\alpha_2), \quad \theta_t \leq (\alpha_2 - \tau_{k+1}/(4\sqrt{l}))^2. \quad (6_6)$$

Равенствами (6₁) – (6₆) функция ν_l задана во всем квадранте $R_{>1}^2$. Требуемую функцию ν в "основных" полосах $\Pi(l)$ положим равной функции ν_l , т.е.

$$\nu(t) = \nu_l(t), \quad t \in \Pi(l), \quad l \in N. \quad (7_1)$$

В "переходных" полосах осуществим переход от функции ν_{l-1} к функции ν_l :

$$\nu(t) = \nu_{l-1}(t) + [\nu_l(t) - \nu_{l-1}(t)]e_{01}(\ln \zeta(t); \ln \gamma_l, \ln \delta_l), \quad t \in \tilde{\Pi}(l), \quad l = 2, 3, \dots \quad (7_2)$$

Наконец, положим

$$\nu(t) = \nu_1(t)e_{01}(\ln \zeta(t); \ln \gamma_1, \ln \delta_1), \quad t \in T \cup \tilde{\Pi}(1). \quad (7_3)$$

2. ПОСТРОЕНИЕ НИЖНЕГО ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЯ x

2.1. Построение нижнего характеристического множества функции ϕ . Покажем, что множество $P \equiv \{p \in R_-^2 : p_1 p_2 = 1, \alpha_1 \leq p_1 \leq \alpha_2\}$ является нижним характеристическим множеством функции ϕ . Очевидно, что при $\alpha_2^2/2 \leq \theta_t \leq 2\alpha_1^2$ выполнены неравенства

$$2\sqrt{t_1 t_2} + t_2/\alpha_1 \geq -\sqrt{2}t_2/\alpha_1 + t_2/\alpha_1 = -(\sqrt{2} - 1)t_2/\alpha_1 \geq 0,$$

$$2\sqrt{t_1 t_2} + \alpha_2 t_1 \geq -\sqrt{2}\alpha_2 t_1 + \alpha_2 t_1 = -\alpha_2(\sqrt{2} - 1)t_1 \geq 0.$$

Возьмем произвольный вектор $p \in P$ и обозначим $R_\phi(p, t) \equiv \ln \phi(t) - (p, t)$, оценим снизу величину $R_\phi(p, t)$. При $\alpha_2^2/2 \leq \theta_t \leq 2\alpha_1^2$ получим неравенство

$$R_\phi(p, t) \geq -2\sqrt{t_1 t_2} - p_1 t_1 - t_2/p_1 = -t_1(p_1 + \sqrt{\theta_t})^2/p_1 \geq 0. \tag{8_1}$$

Из равенства (4) при $\theta_t \geq 2\alpha_1^2$ вытекает оценка

$$R_\phi(p, t) = t_2/\alpha_1 - p_1 t_1 - t_2/p_1 \geq (1/\alpha_1 - 1/p_1)t_2 - p_1 t_1 \geq -p_1 t_1 > 0. \tag{8_2}$$

Наконец при $\theta_t \leq \alpha_2^2/2$, используя (4), имеем неравенство

$$R_\phi(p, t) = \alpha_2 t_1 - p_1 t_1 - t_2/p_1 \geq (\alpha_2 - p_1)t_1 \geq 0. \tag{8_3}$$

Из оценок (8₁)–(8₃) вытекает неравенство $\underline{L}_\phi(p) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} R_\phi(p, t)/\|t\| \geq 0$. Равенство $\underline{L}_\phi(p) = 0$, а также второе условие $\underline{L}_\phi(p + \varepsilon e_i) < 0, \forall \varepsilon > 0, i = 1, 2$, определения [3] нижнего характеристического вектора устанавливаются по направлению $t_2 = p_1^2 t_1, t_1 \rightarrow +\infty$. Следовательно, показано включение $P \subset P_\phi$. С другой стороны, для произвольного нижнего характеристического вектора $p = (p_1, p_2) \in P_\phi$ по направлениям $t_2 = e, t_1 \rightarrow +\infty$ и $t_1 = e, t_2 \rightarrow +\infty$, получаем соответственно неравенства $p_1 \leq \alpha_2$ и $p_2 \leq 1/\alpha_1$. А поскольку множество P_ϕ представимо [3] строго монотонно убывающей кривой, то оно необходимо совпадает со множеством P .

2.2. Доказательство совпадения нижнего характеристического множества решения x со множеством P . Покажем, что нижнее характеристическое множество P_x решения x совпадает с нижним характеристическим множеством P_ϕ функции ϕ . Для этого установим существование предела

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|t\|^{-1} \nu(t) \ln \psi(t) = 0. \tag{9}$$

Обозначая $\Pi L(l) = \tilde{\Pi}(l) \cup \Pi(l) \cup \tilde{\Pi}(l + 1), l \in N$, и фиксируя $l \in N$, оцениваем функцию ν_l в полосе $\Pi L(l)$. Отметим вначале, что из принадлежности θ_t отрезку $[(\Delta_j - \tau_j/(2\sqrt{l}))^2, (\Delta_{j-1} + \tau_j/(2\sqrt{l}))^2]$ следуют неравенства $\Delta_{j-1} < \Delta_{j-1} + \tau_j/(2\sqrt{l}) \leq -\sqrt{\theta_t} \leq \Delta_j - \tau_j/(2\sqrt{l}) < \Delta_j$, дающие оценку $|P_l^{(j)}(-\sqrt{\theta_t})| \leq \mu_l$. Так как в полосе $\Pi L(l)$ выполнено неравенство $\zeta(t) \geq \mu_l^4(1 + \alpha_1^2)$, то в силу (6₁) справедлива оценка

$$|\nu_l(t)| = |P_l^{(j)}(-\sqrt{\theta_t})| \leq \mu_l \leq \sqrt[4]{t_1}, \quad \theta_t \in [(\Delta_j - \tau_j/(2\sqrt{l}))^2, (\Delta_{j-1} + \tau_j/(2\sqrt{l}))^2], \tag{10_1}$$

$$j = \overline{1, k+1}, \quad t \in \Pi l(l).$$

С помощью неравенства $\zeta(t) \geq (\max_{j=0, k+1} |g(\Delta_j)|)^4(1 + 2\alpha_1^2)$, справедливого в каждой полосе $\Pi L(l), l \in N$, из равенства (6₂) получаем оценки

$$|\nu_l(t)| = |g(\Delta_j)| \leq \sqrt[4]{t_1}, \quad \theta_t \in [(\Delta_j + \tau_{j+1}/(4\sqrt{l}))^2, (\Delta_j - \tau_j/(4\sqrt{l}))^2], \tag{10_2}$$

$$j = \overline{1, k}, \quad t \in \Pi L(l).$$

В силу (6₅) и (6₆) выполнены соответственно неравенства

$$|\nu_l(t)| = |g(\alpha_1)| \leq \sqrt[4]{t_1}, \quad 2\alpha_1^2 \geq \theta_t \geq (\alpha_1 + \tau_1/(4\sqrt{l}))^2, \quad t \in \Pi L(l), \quad (10_3)$$

$$|\nu_l(t)| = |g(\alpha_2)| \leq \sqrt[4]{t_1}, \quad \theta_t \leq (\alpha_2 - \tau_{k+1}/(4\sqrt{l}))^2, \quad t \in \Pi L(l). \quad (10_4)$$

Пусть теперь справедливо включение $\theta_t \in ((\Delta_j - \tau_j/(4\sqrt{l}))^2, (\Delta_j - \tau_j/(2\sqrt{l}))^2)$ с некоторым $j \in \{1, \dots, k+1\}$ и $t \in \Pi L(l)$. Если выполнено неравенство $g(\Delta_j) - P_l^{(j)}(-\sqrt{\theta_t}) \geq 0$, то из (6₃) получаем оценки

$$\nu_l(t) \geq P_l^{(j)}(-\sqrt{\theta_t}) \geq -|P_l^{(j)}(-\sqrt{\theta_t})| \geq -\sqrt[4]{t_1},$$

$$\nu_l(t) \leq P_l^{(j)}(-\sqrt{\theta_t}) + g(\Delta_j) - P_l^{(j)}(-\sqrt{\theta_t}) \leq |g(\Delta_j)| \leq \sqrt[4]{t_1}.$$

Если же $g(\Delta_j) - P_l^{(j)}(-\sqrt{\theta_t}) < 0$, то имеем неравенства

$$\nu_l(t) \leq P_l^{(j)}(-\sqrt{\theta_t}) \leq \sqrt[4]{t_1}, \quad \nu_l(t) \geq P_l^{(j)}(-\sqrt{\theta_t}) + g(\Delta_j) - P_l^{(j)}(-\sqrt{\theta_t}) \geq -|g(\Delta_j)| \geq -\sqrt[4]{t_1}.$$

Тем самым доказана оценка

$$|\nu_l(t)| \leq \sqrt[4]{t_1}, \quad \theta_t \in ((\Delta_j - \tau_j/(4\sqrt{l}))^2, (\Delta_j - \tau_j/(2\sqrt{l}))^2), \quad j = \overline{1, k+1}, \quad t \in \Pi L(l). \quad (10_5)$$

Аналогично можно показать справедливость неравенства

$$|\nu_l(t)| \leq \sqrt[4]{t_1}, \quad \theta_t \in ((\Delta_j + \tau_{j+1}/(2\sqrt{l}))^2, (\Delta_j + \tau_{j+1}/(4\sqrt{l}))^2), \quad j = \overline{0, k}, \quad t \in \Pi L(l). \quad (10_6)$$

Таким образом, для каждого $l \in N$ из оценок (10₁)–(10₆) устанавливается неравенство

$$|\nu_l(t)| \leq \sqrt[4]{t_1}, \quad t \in \Pi L(l), \quad \theta_t \leq 2\alpha_1^2. \quad (11)$$

В силу определений (7₁)–(7₃) функции $\nu(t)$ и неравенства (11) имеет место оценка

$$|\nu(t)| \leq \sqrt[4]{t_1}, \quad t \in R_{>1}^2, \quad \theta_t \leq 2\alpha_1^2. \quad (12)$$

С помощью равенства (5) и оценки (12) получаем неравенство

$$|\nu(t) \ln \psi(t)| \leq \sqrt[4]{t_1} \ln t_1, \quad t \in R_{>1}^2, \quad (13)$$

дающее равенство (9). Тем самым установлено совпадение нижнего характеристического множества P_x решения x уравнения (1₁) со множеством P .

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО РАВЕНСТВА (2) ДЛЯ ПОСТРОЕННОГО РЕШЕНИЯ x

Возьмем произвольную внутреннюю точку $p = (p_1, \varphi(p_1))$, $\alpha_1 < p_1 < \alpha_2$, нижнего характеристического множества P_x . Пусть предел $\underline{ln}_x(p, 0)$ реализуется по последовательности $\{t(m)\}$ [6], для которой существует конечный предел $\lim_{m \rightarrow \infty} \theta_{t(m)} = \theta > 0$. Возможны лишь два случая: $\theta \neq p_1^2$; $\theta = p_1^2$.

Пусть $\theta \neq p_1^2$. Поскольку справедливо равенство $\lim_{m \rightarrow \infty} (p_1 + \sqrt{\theta_{t(m)}})^2 = (p_1 + \sqrt{\theta})^2 > 0$, то последовательность $\{t(m)\}$ в этом случае без нарушения общности можно считать удовлетворяющей неравенству $(p_1 + \sqrt{\theta_{t(m)}})^2 \geq (p_1 + \sqrt{\theta})^2/2 > 0$, $m \in N$. Из оценок (8₁)–(8₃) следует неравенство $R_\varphi(p, t) \geq Mt_1(m)$, $M = \min\{-(p_1 + \sqrt{\theta})^2/(2p_1); -p_1; \alpha_2 - p_1\} > 0$. Тогда с помощью (13) получаем оценку $\underline{ln}_x(p, 0) \geq \lim_{m \rightarrow \infty} (Mt_1(m) - \sqrt[4]{t_1(m)} \ln t_1(m)) / \|\ln t(m)\| = +\infty$.

Предположим теперь, что выполнено равенство $\theta = p_1^2$. Без ограничения общности будем считать, что все члены $t(m)$ последовательности, реализующей нижний предел $\ln_x(p, 0)$, принадлежат полосам $\tilde{\Pi}(l_m) \cup \Pi(l_m)$ с разными номерами $l_m > 1$, $l_{m+1} > l_m \rightarrow +\infty$ при $m \rightarrow +\infty$. Возможны два случая: p_1 не совпадает ни с какой точкой разрыва функции $g(\Delta)$, т.е. $p_1 \in (\Delta_{j_0-1}, \Delta_{j_0})$, $j_0 \in \{1, \dots, k+1\}$; p_1 совпадает с некоторой точкой разрыва Δ_{j_0} , $j_0 \in \{1, \dots, k\}$, функции $g(\Delta)$.

В первом случае в силу справедливости включения $\lim_{m \rightarrow \infty} \theta_{t(m)} = p_1^2 \in ((\Delta_{j_0} - \tau_{j_0}/(2\sqrt{l_0}))^2, (\Delta_{j_0-1} + \tau_{j_0}/(2\sqrt{l_0}))^2)$ с некоторым $l_0 \in N$ последовательность $\{t(m)\}$ без ограничения общности будем считать такой, что выполнены неравенства $(\Delta_{j_0} - \tau_{j_0}/(2\sqrt{l_0}))^2 < \theta_{t(m)} < (\Delta_{j_0-1} + \tau_{j_0}/(2\sqrt{l_0}))^2$, $\forall m \in N$. Снова, не нарушая общности, будем предполагать, что $l_m - 1 \geq l_0$, $\forall m \in N$. Следовательно, имеют место неравенства

$$(\Delta_{j_0} - \tau_{j_0}/(2\sqrt{l_m - 1}))^2 < \theta_{t(m)} < (\Delta_{j_0-1} + \tau_{j_0}/(2\sqrt{l_m - 1}))^2, \quad \forall m \in N. \quad (14)$$

Без нарушения общности можно рассматривать лишь две возможности: 1) $t(m) \in \Pi(l_m)$ при всех $m \in N$; 2) $t(m) \in \tilde{\Pi}(l_m)$ также при всех $m \in N$. В случае первой возможности с помощью формул (7₁), (6₁) и неравенства (14) получаем равенство $\nu(t(m)) = P_{l_m}^{(j_0)}(-\sqrt{\theta_{t(m)}})$, а (5) и (14) – равенство $\ln \phi(t(m)) = \ln t_1(m)$. Отсюда в силу (8₁)–(8₃) и равномерной сходимости многочленов $P_{l_m}^{(j_0)}(\Delta)$ к функции $g_{j_0}(\Delta)$ при $m \rightarrow \infty$ на отрезке $[\Delta_{j_0-1}, \Delta_{j_0}]$, а также неравенств $\Delta_{j_0-1} < -\sqrt{\theta_{t(m)}} < \Delta_{j_0}$, $\forall m \in N$, и непрерывности функции g_{j_0} на отрезке $[\Delta_{j_0-1}, \Delta_{j_0}]$ имеем оценки

$$\ln_x(p, 0) \geq \lim_{m \rightarrow \infty} (P_{l_m}^{(j_0)}(-\sqrt{\theta_{t(m)}}) \ln t_1(m)) / \|\ln t(m)\| = \lim_{m \rightarrow \infty} P_{l_m}^{(j_0)}(-\sqrt{\theta_{t(m)}}) / \sqrt{2} = g(p_1) / \sqrt{2}.$$

Если же имеет место вторая возможность, то снова без нарушения общности будем рассматривать лишь два случая: справедливо неравенство $\nu_{l_m}(t(m)) \leq \nu_{l_m-1}(t(m))$ при всех $m \in N$ и противоположное неравенство $\nu_{l_m}(t(m)) > \nu_{l_m-1}(t(m))$ также при всех $m \in N$. В первом случае из (7₂) следует оценка $\nu(t(m)) \geq \nu_{l_m}(t(m))$, дающая неравенство $\ln_x(p, 0) \geq g(p_1) / \sqrt{2}$. Во втором же случае из (7₂) и (14) имеем неравенство $\nu(t(m)) \geq \nu_{l_m-1}(t(m)) = P_{l_m-1}^{(j_0)}(-\sqrt{\theta_{t(m)}})$. Тем самым снова получаем оценки

$$\ln_x(p, 0) \geq \lim_{m \rightarrow \infty} (P_{l_m-1}^{(j_0)}(-\sqrt{\theta_{t(m)}}) \ln t_1(m)) / \|\ln t(m)\| = g(p_1) / \sqrt{2}.$$

По некоторой последовательности $\{\tau(m)\}$, $\tau(m) \in \Pi(m)$, $\theta_{\tau(m)} = p_1^2$, $m \geq l_0$, $m \in N$, в силу выполнения неравенств $(\Delta_{j_0} - \tau_{j_0}/(2\sqrt{m}))^2 < \theta_{\tau(m)} < (\Delta_{j_0-1} + \tau_{j_0}/(2\sqrt{m}))^2$, $m \geq l_0$, $m \in N$, из (7₁) и (6₁) вытекают равенства $\nu(\tau(m)) = \nu_m(\tau(m)) = P_m^{(j_0)}(-\sqrt{\theta_{\tau(m)}})$, а следовательно, и равенства

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (R_\phi(p, \tau(m)) + P_m^{(j_0)}(-\sqrt{\theta_{\tau(m)}}) \ln \tau_1(m)) / \|\ln \tau(m)\| = \lim_{m \rightarrow \infty} P_m^{(j_0)}(-\sqrt{\theta_{\tau(m)}}) / \sqrt{2} = g(p_1) / \sqrt{2}.$$

Таким образом, необходимое равенство (2) доказано для всех точек p_1 непрерывности функции g .

Пусть теперь p_1 совпадает с некоторой точкой разрыва Δ_{j_0} , $j_0 \in \{1, \dots, k\}$, функции g . Без нарушения общности будем рассматривать лишь три возможности:

- 1) $(\Delta_{j_0} + \tau_{j_0+1}/(4\sqrt{l_m}))^2 \leq \theta_{t(m)} \leq (\Delta_{j_0} - \tau_{j_0}/(4\sqrt{l_m}))^2$ при всех $m \in N$;
- 2) $\alpha_1^2 > \theta_{t(m)} > (\Delta_{j_0} - \tau_{j_0}/(4\sqrt{l_m}))^2$ при всех $m \in N$;
- 3) $\alpha_2^2 < \theta_{t(m)} < (\Delta_{j_0} + \tau_{j_0+1}/(4\sqrt{l_m}))^2$ при всех $m \in N$.

В случае первой возможности справедливо равенство $\nu_{l_m}(t(m)) = g(\Delta_{j_0})$, $m \in N$, а из неравенств $(\Delta_{j_0} + \tau_{j_0+1}/(4\sqrt{l_m - 1}))^2 \leq \theta_{t(m)} \leq (\Delta_{j_0} - \tau_{j_0}/(4\sqrt{l_m - 1}))^2$, $m \in N$, и (6₂) следует

равенство $\nu_{l_m-1}(t(m)) = g(\Delta_{j_0})$, $m \in N$. Из (7₁) и (7₂) имеем $\nu(t(m)) = g(\Delta_{j_0})$, $m \in N$. Таким образом, получаем оценки

$$\underline{\ln}_x(p, 0) \geq \lim_{m \rightarrow \infty} (g(\Delta_{j_0}) \ln t_1(m)) / \|\ln t(m)\| = g(\Delta_{j_0}) / \sqrt{2}.$$

Если имеет место вторая возможность, то выполнено неравенство $\sqrt{\theta_{t(m)}} > -\Delta_{j_0} + \tau_{j_0} / (4\sqrt{l_m})$, $m \in N$. Из принадлежности $t(m) \in \tilde{\Pi}(l_m) \cup \Pi(l_m)$ и построения полос вытекает оценка $\zeta(t(m)) \geq l_m^2(1 + \alpha_1^2)$, $m \in N$, дающая неравенство $\sqrt{t_1(m)} \geq l_m$. С помощью (8₁) устанавливаются оценки

$$R_\phi(p, t(m)) \geq -t_1(m)(\Delta_{j_0} + \sqrt{\theta_{t(m)}})^2 / \Delta_{j_0} \geq -t_1(m)\tau_{j_0}^2 / (16l_m\Delta_{j_0}) \geq -\sqrt{t_1(m)}\tau_{j_0}^2 / (16\Delta_{j_0}).$$

Следовательно, в силу (13) имеет место неравенство

$$\underline{\ln}_x(p, 0) \geq \lim_{m \rightarrow \infty} (-\sqrt{t_1(m)}\tau_{j_0}^2 / (16\Delta_{j_0}) - \sqrt[4]{t_1(m)} \ln t_1(m)) / \|\ln t(m)\| = +\infty.$$

В случае же третьей возможности выполнено соотношение $\sqrt{\theta_{t(m)}} < -(\Delta_{j_0} + \tau_{j_0+1}) / (4\sqrt{l_m})$, $m \in N$. Из принадлежности $t(m) \in \tilde{\Pi}(l_m) \cup \Pi(l_m)$ снова имеем неравенство $\sqrt{t_1(m)} \geq l_m$. Используя неравенство (8₁), получаем оценки

$$R_\phi(p, t(m)) \geq -t_1(m)(\Delta_{j_0} + \sqrt{\theta_{t(m)}})^2 / \Delta_{j_0} \geq -t_1(m)\tau_{j_0+1}^2 / (16l_m\Delta_{j_0}) \geq -\sqrt{t_1(m)}\tau_{j_0+1}^2 / (16\Delta_{j_0}),$$

дающие неравенство

$$\underline{\ln}_x(p, 0) \geq \lim_{m \rightarrow \infty} (-\sqrt{t_1(m)}\tau_{j_0+1}^2 / (16\Delta_{j_0}) - \sqrt[4]{t_1(m)} \ln t_1(m)) / \|\ln t(m)\| = +\infty.$$

Кроме того, по некоторой последовательности $\{\tau(m)\}$, $\tau(m) \in \Pi(m)$, $\theta_{\tau(m)} = \Delta_{j_0}^2$, $m \in N$, выполняется равенство $\nu(\tau(m)) = g(\Delta_{j_0})$, а следовательно,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (R_\phi(p, \tau(m)) + g(\Delta_{j_0}) \ln \tau_1(m)) / \|\ln \tau(m)\| = g(\Delta_{j_0}) / \sqrt{2}.$$

Таким образом, равенство (2) установлено и для точек разрыва Δ_j , $j = \overline{1, k}$, функции g .

4. ПОСТРОЕНИЕ УРАВНЕНИЯ. ОГРАНИЧЕННОСТЬ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Функция $x > 0$, заданная равенством (3), является решением уравнения (1₁) с коэффициентами $a_i(t) = \partial \ln x(t) / \partial t_i$, $t \in R_{>1}^2$, $i = 1, 2$, удовлетворяющими условию полной интегрируемости в силу бесконечной в $R_{>1}^2$ дифференцируемости $\ln x$.

Используя неравенство

$$0 \leq \frac{de_{01}(\tau; \tau_1, \tau_2)}{d\tau} \leq \begin{cases} 2 \exp[2(\tau_2 - \tau_1)^{-2}], & \tau_2 - \tau_1 \leq 1/2, \\ 4, & \tau_2 - \tau_1 \geq 2, \end{cases} \quad (15)$$

из леммы работы [11], покажем ограниченность этих коэффициентов.

Вначале докажем ограниченность производных $\partial \ln \phi(t) / \partial t_i$, $i = 1, 2$. При $\alpha_2^2/2 \leq \theta_t \leq 2\alpha_1^2$ имеем оценки

$$|\partial \ln \phi(t) / \partial t_1| \leq 3\sqrt{\theta_t} - \alpha_2 + e^8(2\theta_t^{3/2} - \theta_t^2/\alpha_1) / \alpha_1^2 + 2e^8(2\theta_t^{3/2} - \alpha_2\theta_t) / \alpha_2^2 \leq \sigma_1,$$

$$|\partial \ln \phi(t) / \partial t_2| \leq 3\sqrt{\theta_t^{-1}} - 1/\alpha_1 + e^8(2\sqrt{\theta_t} - \theta_t/\alpha_1) / \alpha_1^2 + 2e^8(2\sqrt{\theta_t} - \alpha_2) / \alpha_2^2 \leq \sigma_1$$

с некоторой постоянной $\sigma_1 > 0$. Ограниченность же этих производных при $\theta_t < \alpha_2^2/2$ и $\theta_t > 2\alpha_1^2$ очевидна.

Перейдем теперь к доказательству ограниченности частных производных от произведения $\nu(t) \ln \psi(t)$. В силу (5) справедливо равенство

$$\nu(t) \ln \psi(t) = 0, \quad t \in R_{>1}^2, \quad \theta_t \in (0, \alpha_2^2/2] \cup [2\alpha_1^2, +\infty), \quad (16)$$

из которого следует, что ограниченность производных $\partial(\nu(t) \ln \psi(t))/\partial t_i, i = 1, 2$, необходимо показать лишь при $\theta_t \in (\alpha_2^2/2, 2\alpha_1^2)$. С помощью (12) и (5) имеем неравенства

$$|\nu(t) \partial \ln \psi(t) / \partial t_1| \leq \sqrt[4]{t_1} (2e^8 (2\alpha_1^2 / \alpha_2^2 + 1) (\ln t_1) / t_1 + 1 / t_1) \leq \sigma_2, \quad t \in R_{>1}^2, \quad \theta_t \in (\alpha_2^2/2, 2\alpha_1^2),$$

$$|\nu(t) \partial \ln \psi(t) / \partial t_2| \leq \sqrt[4]{t_1} (2e^8 / (t_1 \alpha_2^2) + e^8 / (t_1 \alpha_1^2)) \ln t_1 \leq \sigma_2, \quad t \in R_{>1}^2, \quad \theta_t \in (\alpha_2^2/2, 2\alpha_1^2),$$

с некоторой постоянной $\sigma_2 > 0$.

Зафиксируем $l \in N$ и оценим производные функции ν_l в полосе $PL(l)$. Пусть $\theta_t \in [(\Delta_j - \tau_j / (2\sqrt{l}))^2, (\Delta_{j-1} + \tau_j / (2\sqrt{l}))^2]$ с некоторым $j \in \{1, \dots, k+1\}$, $t \in PL(l)$. Тогда из (6₁) и выполнения неравенства $\zeta(t) \geq \rho_l^2 (1 + \alpha_1^2)$, $t \in PL(l)$, вытекают оценки

$$|\partial \nu_l(t) / \partial t_1| = |dP_l^{(j)}(\Delta) / d\Delta|_{\Delta = -\sqrt{\theta_t} \sqrt{\theta_t} / (2t_1)} \leq -\rho_l \alpha_1 / (2t_1) \leq -\alpha_1 / (2\sqrt{t_1}), \quad (17_1)$$

$$|\partial \nu_l(t) / \partial t_2| \leq \rho_l / (2\sqrt{\theta_t} t_1) \leq -1 / (2\alpha_2 \sqrt{t_1}). \quad (17_2)$$

Если же $\theta_t \in [(\Delta_j + \tau_{j+1} / (4\sqrt{l}))^2, (\Delta_j - \tau_j / (4\sqrt{l}))^2]$, $j \in \{1, \dots, k\}$, либо $\theta_t \geq (\alpha_1 + \tau_1 / (4\sqrt{l}))^2$, либо $\theta_t \leq (\alpha_2 - \tau_{k+1} / (4\sqrt{l}))^2$, то имеет место равенство

$$\partial \nu_l(t) / \partial t_i = 0, \quad i = 1, 2. \quad (17_3)$$

В случае справедливости включения $\theta_t \in ((\Delta_j - \tau_j / (4\sqrt{l}))^2, (\Delta_j - \tau_j / (2\sqrt{l}))^2)$, $j \in \{1, \dots, k+1\}$, $t \in PL(l)$, из (6₃) и неравенств $t_1 \geq \mu_l^4 l^2$, $t_1 \geq |g(\Delta_j)|^4 l^2$ по аналогии с (17₁), (17₂) получаем оценки

$$|\partial \nu_l(t) / \partial t_1| \leq -\alpha_1 / \sqrt{t_1} + 2e^8 (|g(\Delta_j)| + \mu_l) \sqrt{l} \sqrt{\theta_t} / (t_1 \tau_j) \leq -\alpha_1 / \sqrt{t_1} - 4e^8 \alpha_1 / (\sqrt[4]{t_1^3} \tau_j), \quad (17_4)$$

$$|\partial \nu_l(t) / \partial t_2| \leq -1 / (\alpha_2 \sqrt{t_1}) + 2e^8 (|g(\Delta_j)| + \mu_l) \sqrt{l} / (\sqrt{\theta_t} t_1 \tau_j) \leq -1 / (\alpha_2 \sqrt{t_1}) - 4e^8 / (\alpha_2 \sqrt[4]{t_1^3} \tau_j). \quad (17_5)$$

Наконец, если имеет место включение $\theta_t \in ((\Delta_j + \tau_{j+1} / (2\sqrt{l}))^2, (\Delta_j + \tau_{j+1} / (4\sqrt{l}))^2)$, $j \in \{0, \dots, k\}$, $t \in PL(l)$, то из (6₄) аналогичным образом следуют неравенства

$$\begin{aligned} |\partial \nu_l(t) / \partial t_1| &\leq -\alpha_1 / (2\sqrt{t_1}) + 2e^8 (\mu_l + |g(\Delta_j)|) \sqrt{l} \sqrt{\theta_t} / (t_1 \tau_{j+1}) \leq \\ &\leq -\alpha_1 / (2\sqrt{t_1}) - 4e^8 \alpha_1 / (\sqrt[4]{t_1^3} \tau_{j+1}), \end{aligned} \quad (17_6)$$

$$\begin{aligned} |\partial \nu_l(t) / \partial t_2| &\leq -1 / (2\alpha_2 \sqrt{t_1}) + 2e^8 (\mu_l + |g(\Delta_j)|) \sqrt{l} / (\sqrt{\theta_t} t_1 \tau_{j+1}) \leq \\ &\leq -1 / (2\alpha_2 \sqrt{t_1}) - 4e^8 / (\alpha_2 \sqrt[4]{t_1^3} \tau_{j+1}). \end{aligned} \quad (17_7)$$

Оценки (17₁)–(17₇) устанавливают неравенство

$$|\partial \nu_l(t) / \partial t_i| \leq \sigma_3 / \sqrt{t_1}, \quad t \in PL(l), \quad i = 1, 2, \quad (18)$$

с некоторой постоянной $\sigma_3 > 0$.

Из определения (7₁) функции $\nu(t)$ в “основных” полосах $\Pi(l)$ и (18) получаем оценки

$$|\partial \nu(t) / \partial t_i| \leq \sigma_3 / \sqrt{t_1}, \quad t \in \Pi(l), \quad l \in N, \quad i = 1, 2. \quad (19_1)$$

В силу (7₂), (7₃), (18) и (11), применяя второе неравенство из (15), имеем оценки

$$|\partial \nu(t) / \partial t_i| \leq \sigma_3 / \sqrt{t_1} + 8 \sqrt[4]{t_1} / \zeta(t) \leq \sigma_3 / \sqrt{t_1} + 8 / \sqrt[4]{t_1^3}, \quad t \in \bar{\Pi}(l), \quad l \in N, \quad \theta_t \leq 2\alpha_1^2, \quad i = 1, 2. \quad (19_2)$$

Таким образом, из неравенств (19₁), (19₂), равенства $\nu(t) = 0$, $t \in T$, и оценки $|\ln \psi(t)| \leq \ln t_1$, $t \in R_{>1}^2$, а также (16) вытекает ограниченность произведений $(\partial \nu(t)/\partial t_i) \ln \psi(t)$, $t \in R_{>1}^2$, $i = 1, 2$. Тем самым установлена ограниченность коэффициентов построенной системы (1₁). Теорема 1 в случае $\alpha_1 < \alpha_2 < 0$ полностью доказана.

В случае же $\alpha_2 \geq 0$ на основе функции g определим новую функцию $g_1 : [\alpha_1 - \alpha_2 - 1, -1] \rightarrow R$, $g_1(\Delta) = g(\Delta + \alpha_2 + 1)$. Тогда, как и выше, для функции g_1 построим бесконечно дифференцируемую функцию $x_1 > 0$, имеющую ограниченные производные $\partial \ln x_1(t)/\partial t_i$, $i = 1, 2$, область определения кривой нижнего характеристического множества P_{x_1} которой совпадает с отрезком $[\alpha_1 - \alpha_2 - 1, -1]$ и для которой справедливо равенство $\underline{c}_{x_1}(p_1[x_1]) = g_1(p_1[x_1])$, $\forall p_1[x_1] \in (\alpha_1 - \alpha_2 - 1, -1)$. Нижние характеристические векторы $(p_1[x], \varphi(p_1[x])) \in P_x$ и $(p_1[x_1], \varphi_1(p_1[x_1])) \in P_{x_1}$ соответственно функций $x(t) = x_1(t) \exp[(\alpha_2 + 1)t_1]$ и $x_1(t)$ связаны условиями $p_1[x] = p_1[x_1] + \alpha_2 + 1 \in [\alpha_1, \alpha_2]$, $\varphi(p_1[x]) = \varphi_1(p_1[x] - \alpha_2 - 1)$, а нижние характеристические степенные функции – равенствами $\underline{c}_x(p_1[x]) = \underline{c}_{x_1}(p_1[x_1]) = g_1(p_1[x_1]) = g(p_1[x])$. Очевидно, функция x является решением вполне интегрируемого уравнения Пфаффа (1₁) с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, что полностью доказывает теорему 1.

Теорема 2. Для произвольных натурального числа n и кусочно-непрерывной функции $g : [a_1, a_2] \rightarrow R$ существует такая вполне интегрируемая система Пфаффа (1_n) с бесконечно дифференцируемыми и ограниченными коэффициентами, что для всякого ее нетривиального решения $x : R_{>1}^n \rightarrow R^n \setminus \{0\}$ область определения кривой Λ_x совпадает с отрезком $[a_1, a_2]$ и выполнено равенство $\bar{c}_x(\lambda_1) = g(\lambda_1)$, $\forall \lambda_1 \in (a_1, a_2)$.

Доказательство. С помощью функции g введем новую кусочно-непрерывную функцию $g_1 : [-a_2, -a_1] \rightarrow R$, $g_1(\Delta) = -g(-\Delta)$. Как в теореме 1, построим бесконечно дифференцируемую функцию $x_1 > 0$, имеющую ограниченные производные $\partial \ln x_1(t)/\partial t_i$, $i = 1, 2$, область определения кривой P_{x_1} которой совпадает с отрезком $[-a_2, -a_1]$ и для которой справедливо равенство $\underline{c}_{x_1}(p_1[x_1]) = g_1(p_1[x_1])$, $\forall p_1[x_1] \in (-a_2, -a_1)$. С помощью функции x_1 определим решение $x = x_1^{-1}$ вполне интегрируемого уравнения Пфаффа (1₁) с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами $a_i(t) = \partial \ln x(t)/\partial t_i$, $t \in R_{>1}^2$, $i = 1, 2$. Отметим, что характеристический вектор $\lambda[x]$ решения x равен нижнему характеристическому вектору $p[x_1]$ функции x_1 , взятому с противоположным знаком, т.е. $\lambda[x] = -p[x_1]$. Тем самым выполнены равенства

$$\begin{aligned} \bar{c}_x(\lambda_1[x]) &= \sqrt{2} \bar{l}_{n_x}(\lambda[x], 0) = -\sqrt{2} \underline{l}_{n_{x_1}}(p[x_1], 0) = -\underline{c}_{x_1}(p_1[x_1]) = \\ &= -g_1(p_1[x_1]) = g(-p_1[x_1]) = g(\lambda_1[x]) \end{aligned}$$

для всех $\lambda_1[x] \in (a_1, a_2)$, доказывающие теорему 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гайшун И.В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. Минск, 1983.
2. Гайшун И.В. Линейные уравнения в полных производных. Минск, 1989.
3. Изобов Н.А. // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 12. С. 1623–1630.
4. Грудо Э.И. // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12. № 12. С. 2115–2128.
5. Демидович Б.П. // Мат. сб. 1965. Т. 66. № 3. С. 344–353.
6. Крупчик Е.Н. // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 7. С. 899–908.
7. Ласый П.Г. К теории характеристических вектор-степеней решений линейных систем Пфаффа. Минск, 1982 (Препринт / Ин-т математики АН БССР: 14).
8. Изобов Н.А., Крупчик Е.Н. // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 5. С. 616–627.
9. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., 1978.
10. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. М., 1967.
11. Изобов Н.А., Крупчик Е.Н. // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 3. С. 308–319.

Институт математики НАН Беларуси, г. Минск,
Белорусский государственный университет, г. Минск

Поступила в редакцию
24.03.2004 г.