



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. S. Markus, V. I. Matsaev, Basis property of subsystems of eigen- and associated vectors of a self-adjoint operator pencil, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 1987, Volume 21, Issue 1, 82–83

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.172

March 19, 2025, 11:59:02



УДК 513.83

БАЗИСНОСТЬ ПОДСИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ВЕКТОРОВ САМОСOPЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРНОГО ПУЧКА

А. С. Маркус, В. И. Мацаев

1. В различных задачах математической физики возникает необходимость рассмотрения разложений по некоторой подсистеме собственных и присоединенных векторов (с.п.в.) квадратичного операторного пучка

$$L(\lambda) = A + \lambda I + \lambda^2 B \quad (A^* = A, B^* = B) \quad (1)$$

или голоморфной оператор-функции

$$L(\lambda) = A + \lambda I + \lambda^2 B(\lambda) \quad (A^* = A, (B(\lambda))^* = \overline{B(\lambda)}) \quad (2)$$

Этим вопросам посвящено большое число работ, из которых мы укажем [1—14]. В предположении, что оператор A компактен и выполнено некоторое дополнительное ограничение (например, $4 \|A\| \|B\| < 1$ для пучка (1)), можно утверждать, что собственные векторы (с.в.) $L(\lambda)$, отвечающие собственным значениям (с.з.), расположенным на определенном интервале $(-r, r)$, образуют безусловный базис рассматриваемого гильбертова пространства. В настоящей работе устанавливается, что при отказе от дополнительных ограничений система с.в. оператор-функции (2), отвечающих с.з., расположенным на интервале $(-e, e)$, образует безусловный базис в некотором подпространстве с конечным дефектом. Для пучка (1) получены более полные результаты. В частности, с помощью методов работы [15] указывается, какие с.п.в. пучка надо добавить к указанной выше системе, чтобы получить базис всего пространства.

Авторы благодарны Н. Д. Копачевскому, привлекая его внимание к рассмотренным здесь задачам.

2. Пусть \mathfrak{H} — сепарабельное гильбертово пространство и $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ — множество всех линейных ограниченных операторов, действующих в \mathfrak{H} . Будем писать $H \geq 0$, если $H \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ и $H \geq \delta I$ при некотором $\delta > 0$. Для оператора $H = H^* \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ положим $|H| = (H^2)^{1/2}$, $H_{\pm} = (|H| \pm H)/2$.

Если $M(\lambda)$ — оператор-функция со значениями в $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$, голоморфная в некоторой области U , то кратностью ее с.з. $\lambda_0 \in U$ называется количество векторов в канонической системе с.п.в., отвечающей λ_0 [16]. Предположим, что область U симметрична относительно вещественной оси, а оператор-функция $M(\lambda)$ является самосопряженной, т.е. $(M(\lambda))^* = M(\bar{\lambda})$ ($\lambda \in U$). Пусть существует отрезок $[a, b] \subset U \cap \mathbb{R}$ такой, что $M'(\lambda) \geq 0$ при $a \leq \lambda \leq b$, и для некоторого $c \in (a, b)$ оператор $M(c)$ компактен. Нетрудно показать, что при этих условиях $M(\lambda)$ имеет в некоторой меньшей окрестности U_0 отрезка $[a, b]$ только вещественный спектр, который либо конечен (если $\dim M(c) < \infty$), либо представляет из себя последовательность, сходящуюся к c (если $\dim M(c) = \infty$). Каждая точка спектра $\lambda \in U_0$ ($\lambda \neq c$) является с.з. конечной кратности, причем с.з. из U_0 не отвечают присоединенные векторы.

Теорема 1. Система с.в. $M(\lambda)$, отвечающих с.з., расположенным на отрезке $[a, b]$, образует безусловный базис в некотором подпространстве \mathfrak{N} с конечным дефектом. Если операторы $M(a)$ и $M(b)$ обратимы, то $\dim(\mathfrak{N} \ominus \mathfrak{N}) = \dim M(a)_+ + \dim M(b)_-$.

Поясним, что указанная в теореме 1 система получается объединением ортонормированных базисов всех собственных подпространств $\text{Ker } M(\lambda_k)$ ($\lambda_k \in [a, b]$).

Для случая $M(a)_+ = M(b)_- = 0$ (т.е. $M(a) < 0$, $M(b) > 0$) теорема 1 содержится в [9; 14].

Следствие 1. Пусть $M(\lambda)$ — голоморфная в окрестности нуля самосопряженная оператор-функция. Если $M'(0) \geq 0$ и оператор $M(0)$ компактен, то при достаточно малом $\varepsilon > 0$ система с.в. $M(\lambda)$, отвечающих с.з., расположенным на интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$, образует безусловный базис в некотором подпространстве с конечным дефектом.

Очевидно, условия следствия 1 выполнены для оператор-функции (2) с компактным оператором A .

3. Далее приводятся дополнения к результатам п. 2, которые можно получить для пучка (1) с компактными операторами A и B . С.в. h пучка $L(\lambda)$, отвечающий вещественному с.з. λ_0 , назовем *позитивным* (негативным), если $(L'(\lambda_0)h, h) > 0$ (< 0). Вещественное с.з. называется *позитивным* (негативным), если таковыми являются все с.в., ему отвечающие. Если с.з. $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ не является ни позитивным, ни негативным, то оно называется *нейтральным*. (Эта терминология несколько отличается от принятой в [4; 17].)

Как известно (см., например, [5]), при указанных условиях спектр $L(\lambda)$ не более чем счетен и может иметь лишь две предельные точки 0 и ∞ . Точка 0 (∞) является пре-

дельной тогда и только тогда, когда $\dim A = \infty$ ($\dim B = \infty$). Все точки спектра $\neq 0$ являются с.з. конечной кратности. Пучок $L(\lambda)$ может иметь лишь конечное число не вещественных и нейтральных с.з., и все они лежат в кольце $(2\|B\|)^{-1} \leq |\lambda| \leq 2\|A\|$. Все с.з., удовлетворяющие условию $|\lambda| < (2\|B\|)^{-1}$ ($|\lambda| > 2\|A\|$), являются положительными (негативными). Присоединенные векторы могут отвечать лишь не вещественным и нейтральным с.з.

Т е о р е м а 2. Пусть пучок $L(\lambda)$ не имеет нейтральных с.з. Если не вещественный спектр $L(\lambda)$ произвольным образом разбит на две симметричные относительно вещественной оси части Λ и Λ^* , то пучок $L(\lambda)$ допускает факторизацию $L(\lambda) = (\lambda B + I + BZ)(\lambda I - Z)$, где спектр оператора $Z (\in \mathcal{L}(\mathfrak{H}))$ состоит из 0, положительных с.з. $L(\lambda)$ и множества Λ , а спектр пучка $\lambda B + I + BZ$ — из негативных с.з. $L(\lambda)$ и множества Λ^* .

4. Рассмотрим теперь общий случай, когда у пучка $L(\lambda)$ имеются и нейтральные с.з. Каждому такому с.з. отвечает нормальная каноническая система с.п.в. в смысле Костюченко — Шкаликова [15] $y_j^0, y_j^1, \dots, y_j^{p_j}$ ($j = 1, \dots, N$). Следуя [15, с. 52], составим из нее две подсистемы:

$$y_j^0, y_j^1, \dots, y_j^{x_j^+} \quad (j = 1, \dots, N), \quad (3)$$

$$y_j^0, y_j^1, \dots, y_j^{x_j^-} \quad (j = 1, \dots, N). \quad (4)$$

Разобьем как-либо не вещественный спектр $L(\lambda)$ на две симметричные относительно вещественной оси части Λ и Λ^* . Назовем первой (второй) подсистемой с.п.в. пучка $L(\lambda)$ последовательность, полученную объединением положительных (негативных) с.з., канонических систем с.п.в., отвечающих числам из Λ (Λ^*), и систем (3) (4), отвечающих нейтральным с.з. Поясним, что в число негативных с.з. мы включаем ортонормированный базис Керв.

Т е о р е м а 3. Первая (вторая) подсистема с.п.в. пучка $L(\lambda)$ является безусловным базисом пространства \mathfrak{H} .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shinbrot M. // Proc. Amer. Math. Soc.—1963.— V. 14.— P. 552—559.
2. Аскеров Н. Г., Крейн С. Г., Лантес Г. И. // ДАН СССР.—1964. Т. 155, № 3.— С. 499—502.
3. Крейн С. Г. // ДАН СССР.—1964. Т. 159, № 2.— С. 262—265.
4. Крейн М. Г., Лангер Г. К. // Труды межд. симп. по прил. теории функций в механике сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1965. С. 283—322.
5. Аскеров Н. К., Крейн С. Г., Лантес Г. И. // Функцион. анализ и его прил.—1968. Т. 2, вып. 2.— С. 21—31.
6. Turner R. E. L. // J. Funct. Anal.—1968. V. 2.— P. 297—322.
7. Маркус А. С. // Функцион. анализ и его прил.—1971.— Т. 5, вып. 4.— С. 78—79.
8. Маркус А. С., Мацаев В. И., Руссу Г. И. // Acta sci. math.—1973. V. 34.— P. 245—271.
9. Langer H. // Acta sci. math.—1973. V. 35.— P. 73—86.
10. Радзиевский Г. В. // Мат. сб.—1973. Т. 91, № 3.— С. 310—335.
11. Вирозуб А. И., Мацаев В. И. // Функцион. анализ и его прил.—1974. Т. 8, вып. 1.— С. 1—10.
12. Копачевский Н. Д. Малые движения и нормальные колебания системы тяжелых вязких вращающихся жидкостей. Препринт ФТИНТ АН УССР 33—77. Харьков: ФТИНТ, 1978.
13. Копачевский Н. Д. Малые движения и собственные колебания идеальной вращающейся жидкости. Препринт ФТИНТ АН УССР 38—77. Харьков: ФТИНТ, 1978.
14. Копачевский Н. Д. // Функцион. анализ и его прил.—1981, Т. 15, вып. 2.— С. 77—78.
15. Костюченко А. Г., Шкаликов А. А. // Функцион. анализ и его прил.—1983, Т. 17, вып. 2.— С. 38—61.
16. Келдыш М. В. // УМН.—1971. Т. 26, вып. 4.— С. 15—41.
17. Костюченко А. Г., Оразов М. Б. // Функцион. анализ и его прил.—1975. Т. 9, вып. 4.— С. 28—40.

Институт математики с ВЦ АН МССР
Отделение института химической
физики АН СССР

Поступило в редакцию
3 июня 1985 г.