М. Ю. Кокурин, О регуляризации задач оптимального управления решениями некорректных вариационных неравенств монотонного типа,
Сиб. матем. журн., 1997, том 38, номер 1, 100–108

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 1997. Том 38, № 1

УДК 517.988.8

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЯМИ НЕКОРРЕКТНЫХ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ МОНОТОННОГО ТИПА*)

М. Ю. Кокурин

1. В настоящей работе рассматривается задача оптимального управления

$$\min_{u\in U} J(u), \quad J(u) = f(u) + l(z(u)), \tag{1}$$

в которой состояние системы $z = z(u) \in D$ связано с управлением $u \in U \subset W$ вариационным неравенством (ВН)

$$\langle A(u,z) - y, v - z\rangle \geqslant 0 \quad \forall v \in D. \tag{2}$$

Здесь U — выпуклое замкнутое ограниченное множество из гильбертова пространства управлений W; $f : U \to \mathbb{R}$ — ограниченный снизу и слабо полунепрерывный снизу функционал с H-свойством, согласно которому из соотношений $u_\beta \xrightarrow{w} u$ в W, $f(u_\beta) \to f(u)$ следует сходимость $u_\beta \xrightarrow{s} u$ в W. Здесь и далее через $\xrightarrow{w}$, $\xrightarrow{s}$ обозначаются слабая и сильная сходимости в соответствующих пространствах. Функционал $l : X \to \mathbb{R}$ предполагается сильно выпуклым [1, с. 24] и обладающим деминепрерывным градиентом Фреше, так что из $z_\beta \xrightarrow{s} z$ в X следует $l'(z_\beta) \xrightarrow{w} l'(z)$ в X^*. На протяжении статьи X — вещественное гильбертово пространство состояний системы, множество $D \subset X$ выпукло и замкнуто, элемент $y \in X^*$ фиксирован, X^* обозначает сопряженное к X пространство, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — каноническая билинейная форма, связывающая пространства X и X^*. Через $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_*$ обозначаются нормы пространств X и X^*. Под решением задачи (1), (2) понимается такой элемент $u_0 \in U$, что для некоторого решения $z(u_0)$ ВН (2) выполняется равенство

$$J(u_0) = f(u_0) + l(z(u_0)) = \inf_{u\in U} J(u).$$

В последнем соотношении инфимум берется по управлениям $u \in U$ и по всем решениям $z(u)$ ВН (2) при данном u.

Относительно оператора $A : U \times X \to X^*$ предполагаем, что он

A1) усиленно непрерывен по u и деминепрерывен по z, т. е. соотношение $u_\beta \xrightarrow{w} u$ в W влечет сходимость $A(u_\beta, z) \xrightarrow{s} A(u,z)$ в X^* $\forall z \in X$, из $z_\beta \xrightarrow{s} z$ в X вытекает, что $A(u, z_\beta) \xrightarrow{w} A(u,z)$ в X^* $\forall u \in U$;

A2) при всяком $u \in U$ монотонен по z, т. е.

$$\langle A(u,z) - A(u,v), z - v\rangle \geqslant 0 \quad \forall u \in U,\ z, v \in X.$$

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда (грант NMW 000).

На практике достаточно распространена ситуация, когда те или иные исходные данные в (1), (2) заданы с погрешностью. Будем считать, что элемент y известен приближенно, так что вместо него доступна некоторая аппроксимация $y^\delta \in X^*$, где

$$\|y^\delta - y\|_* \leqslant \delta. \tag{3}$$

По заданному элементу y^δ требуется построить приближенное решение задачи (1), (2), сходящееся в том или ином смысле к множеству точных решений при $\delta \to 0$.

Неоднократно отмечалось (см., например, [1–5]), что при вышеуказанных условиях ВН (2) с фиксированным $u \in U$, а также задача (1), (2) в целом являются некорректными по Адамару. В частности, при заданном управлении u не гарантируется ни разрешимость (2), ни устойчивость множества решений относительно вариаций исходных данных. Кроме того, у функционала J в общем случае отсутствуют свойства равномерной выпуклости в пространстве управлений, вследствие чего множество решений задачи (1), (2) также может быть неустойчивым к подобным вариациям. При этом единственность решения (2), т. е. однозначность связи управления и состояния в задаче (1), (2) в общем случае отсутствует. Все сказанное позволяет отнести задачу (1), (2) к классу сингулярных в смысле [5] (см. также [6]). В том случае, когда в (2) $D = X$, а ВН (2) сводится к операторному уравнению, для численной аппроксимации решений (1), (2) могут быть использованы развитые в [5, 7, 8] методы учета уравнения состояния при помощи штрафа. В случае вариационного неравенства реализация такого подхода осложняется необходимостью предварительной аппроксимации ВН (2) операторным уравнением, что увеличивает вложенность итерационных процессов на этапе численной реализации [7, 8]. Другой распространенный подход к численному решению задач оптимального управления распределенными системами основан на приближенном удовлетворении необходимым условиям минимума в рассматриваемой задаче (см. [9]). Следует отметить, что при выводе необходимых условий минимума в задачах оптимального управления решениями ВН вида (2) на оператор A, как правило, налагаются более сильные по сравнению с А2 условия типа равномерной монотонности [8, 10–12]. В то же время в многих прикладных задачах такого рода условия оказываются излишне ограничительными [13–15]. Иной подход к построению устойчивых методов решения задачи (1), (2) намечен в работах [2, 3]. В соответствии с ним (1), (2) аппроксимируется задачей приближенной минимизации функционала (1) при условии $z(u) = R_\delta(u, y^\delta)$, где семейство операторов $R_\delta(u,\cdot) : X^* \to X$, $\delta > 0$, описывает некоторый регуляризующий алгоритм (РА) для решения ВН (2) при фиксированном управлении $u \in U$. Именно, в [2, 3] в качестве $R_\delta(u,\cdot)$ предлагалось выбирать семейство, реализующее простейший вариант метода Лаврентьева — Браудера — Тихонова [1, 4, 16–18]. Однако, как показывается в п. 2 настоящей работы, такой выбор не приводит в общем случае к построению РА для исходной задачи (1), (2). В этой связи рассматривается вопрос об общих условиях, которые следует наложить на РА R_δ с тем, чтобы гарантировать сходимость решений указанных аппроксимирующих задач к решению задачи оптимального управления (1), (2). Некоторые примеры подобных РА, также использующие схему регуляризации Лаврентьева — Браудера — Тихонова, обосновываются в п. 3.

2. Введем необходимые для дальнейшего обозначения и определения. При фиксированном $u \in U$ обозначим через $Z(u)$ множество решений ВН (2), быть может, пустое. Из условий А1, А2 следует, что при каждом $u \in U$ оператор $A(u,\cdot)$ является максимально монотонным [19, с. 98], поэтому в случае $Z(u) \neq \varnothing$ множество $Z(u)$ является выпуклым и замкнутым [20, с. 116]. Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество допустимых пар управлений и состояний в задаче (1), (2):

$$\mathfrak{M} = \{(u,z) : u \in U,\ z \in Z(u)\}.$$

Как и в [8, с. 103], показывается, что при выполнении A1, A2 условие $\mathfrak{M} \neq \varnothing$ является необходимым и достаточным для существования решения задачи (1), (2). Всюду ниже это условие предполагается выполненным. Пусть U_0 — множество решений задачи (1), (2). Ниже через $I : X \to X^*$ обозначаем нормализованное дуальное отображение пространств X и X^*, определенное равенствами [19, с. 28]

$$\langle Iz, z\rangle = \|Iz\|_*^2 = \|z\|^2 \quad \forall z \in X. \tag{4}$$

Регуляризующим алгоритмом (РА) для решения ВН (2), следуя [21], называем семейство операторов $\{R_\delta(u,\cdot)\}$, $\delta > 0$, $u \in U$, $R_\delta(u,\cdot) : X^* \to X$, удовлетворяющих при каждом $u \in U$ таком, что $Z(u) \neq \varnothing$, условию

$$(\|y^\delta - y\|_* \leqslant \delta,\ \delta > 0) \Rightarrow (R_\delta(u,y^\delta) \xrightarrow{s} z,\ \delta \to 0;\ z \in Z(u)). \tag{5}$$

Разнообразные примеры РА для решения различных классов ВН можно найти в [1, 4, 20, 22].

Зафиксируем некоторый РА R_δ и сопоставим задаче (1), (2) аппроксимирующую задачу отыскания такого элемента $u_\delta \in U$, что

$$J_\delta^* = \inf_{u\in U} J_\delta(u) \leqslant J_\delta(u_\delta) \leqslant J_\delta^* + \varepsilon(\delta), \quad \varepsilon(\delta) > 0,\ \delta > 0; \quad \lim_{\delta\to 0}\varepsilon(\delta) = 0; \tag{6}$$

$$J_\delta(u) = f(u) + l(z_\delta(u)), \quad z_\delta(u) = R_\delta(u, y^\delta). \tag{7}$$

Здесь в отличие от J функционал J_δ однозначен на U. Поскольку функционалы f и l ограничены снизу на множествах U и X соответственно, элемент $u_\delta \in U$, удовлетворяющий (6), (7), заведомо существует. Будем рассматривать его как приближенное решение задачи (1), (2). Ввиду свойства (5) можно ожидать, что при $\delta \to 0$ будет иметь место сходимость в том или ином смысле регуляризованных управлений u_δ к множеству U_0. В работах [2, 3] в качестве R_δ предлагалось выбирать оператор, сопоставляющий элементу $y^\delta \in X^*$ решение $z = z_\delta(u) \in D$ вариационного неравенства

$$\langle A(u,z) + \alpha(\delta)Iz - y^\delta, v - z\rangle \geqslant 0 \quad \forall v \in D; \tag{8}$$

$$\alpha(\delta) > 0,\ \delta > 0; \quad \lim_{\delta\to 0}\alpha(\delta) = 0. \tag{9}$$

При этом в дополнение к A1, A2 оператор A предполагался ограниченным, равномерно по управлениям коэрцитивным и обладающим μ-свойством [2], вместо A1 предполагалось выполненным более слабое условие A1′: оператор A является слабо непрерывным по u и деминепрерывным по z. Ниже покажем, что в этих условиях сходимость определяемых соотношениями (6)–(9) регуляризованных решений u_δ, $\delta \to 0$, к решению исходной задачи (1), (2) может отсутствовать.

Пример. Рассмотрим задачу

$$\begin{gathered}\min_{u\in U} J(u),\\ J(u) = u^2 + k(z(u)+1)^2, \quad 1/6 < k < 1/5, \quad U = [0,1],\end{gathered} \tag{10}$$

где состояние управляемой системы $z(u) \in X = \mathbb{R}$ связано с управлением $u \in U$ уравнением

$$g(z) + u = 1, \quad g(z) \triangleq \min\{2z + 2, \max\{0, 2z - 2\}\}.$$

При этом полагаем $D = \mathbb{R}$, $y = 1$, $y^\delta = 1 + \delta$. Нетрудно видеть, что в задаче (10) выполнены все условия теоремы из [2], в том числе A1′, A2 и условие равномерной по $u \in U$ коэрцитивности оператора $A(u, \cdot) = g(\cdot) + u$. Регуляризованная задача (6)–(8) заключается в минимизации на U с точностью $\varepsilon(\delta) > 0$ функции

$$\begin{gathered} J_\delta(u) = u^2 + k(z_\delta(u) + 1)^2, \\ g(z_\delta(u)) + \alpha(\delta) z_\delta(u) + u = 1 + \delta. \end{gathered} \tag{11}$$

Положим $U_\delta = \{u \in U : J_\delta^* \leqslant J_\delta(u) \leqslant J_\delta^* + \varepsilon(\delta)\}$. Непосредственным вычислением устанавливается, что при малых $\delta > 0$ и произвольных фиксированных функциях $\alpha = \alpha(\delta)$, $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$, удовлетворяющих (6), (9), множество U_δ есть отрезок, $\lim\limits_{\delta \to 0} \operatorname{mes} U_\delta = 0$. Отрезок U_δ содержит, в частности, точное решение u_δ^* задачи минимизации функции (11) на множестве U. Здесь $u_\delta^* = [(2 + \alpha(\delta))^2 + k]^{-1} k(5 + \alpha(\delta) + \delta)$, $J_\delta(u_\delta^*) = J_\delta^*$. Поэтому при любом выборе $u_\delta \in U_\delta$ имеем

$$\lim_{\delta \to 0} u_\delta = \lim_{\delta \to 0} u_\delta^* = u^* = (4 + k)^{-1} 5k, \quad J(u^*) = (4 + k)^{-2}(25k^2 + 100k).$$

В то же время для указанных в (10) значений k решением задачи (10) является управление $u_0 = 1$, причем $\min\limits_{u \in U} J(u) = 1 < J(u^*)$. Отметим, что сделанный вывод не зависит от способа согласования параметров α, ε с погрешностью δ в рамках условий (6), (9).

Замечание 1. Результаты работы [2] останутся в силе, если дополнительно предположить, что оператор $A(u, \cdot)$ является строго монотонным, т. е. при каждом $u \in U$ неравенство из A2 для $z \neq v$ выполняется строго. В примере это условие нарушается при z, $v \in [-1, 1]$.

Нетрудно построить пример, показывающий, что при отсутствии у оператора $A(u, \cdot)$ свойств коэрцитивности и строгой монотонности, в частности, в условиях A1, A2, схема (6)–(8) не является регуляризующей для задачи (1), (2) уже в случае линейного оператора $A(u, \cdot)$, $u \in U$. В то же время вариационные неравенства с такими операторами нередко возникают в приложениях [13, 14]. Методы устойчивого решения ВН вида (2) с линейным монотонным оператором $A(u, \cdot)$ в случае $\operatorname{Ker} A(u, \cdot) \neq \{0\}$, характерном для ряда контактных задач теории упругости, строились и изучались в работах [23–25]. Актуальность исследования задач оптимального управления решениями такого рода некорректных ВН отмечалась в [5, с. 20].

Имея в виду вышеприведенный пример, выясним условия на РА R_δ, при выполнении которых определяемые в соответствии с (6), (7) приближения u_δ, $\delta \to 0$, сильно сходятся к множеству U_0 решений задачи (1), (2). Ниже через $\{\cdot\}^w$ и $\{\cdot\}^s$ будем обозначать соответственно множество слабых и сильных предельных точек сети $\{\cdot\}$ при $\delta \to 0$. Положим

$$J_0 = \min_{u \in U} J(u), \quad Z_0 = \{z(u_0) : f(u_0) + l(z(u_0)) = J_0,\ u_0 \in U_0\}.$$

Основным результатом работы является следующая

Теорема. *Пусть выполнены условия п. 1, множество $\mathfrak{M}$ непусто и РА R_δ удовлетворяет следующим условиям:*

R1) *элемент $z \in Z(u)$ в (5) обладает свойством*

$$l(z) = \min\{l(v) : v \in Z(u)\}; \tag{12}$$

R2) *справедлива импликация*

$$(u_\beta \in U,\ u_\beta \xrightarrow{w} u,\ \|y^\delta - y\|_* \leqslant \delta,\ R_\delta(u_\beta, y^\delta) \xrightarrow{w} z;\ \beta,\delta \to 0) \Rightarrow (z \in Z(u)).$$

Тогда имеют место соотношения

$$\varnothing \neq \{u_\delta\}^w = \{u_\delta\}^s \subset U_0, \quad \varnothing \neq \{z_\delta(u_\delta)\}^w = \{z_\delta(u_\delta)\}^s \subset Z_0.$$

Доказательство. Заметим, что из сильной выпуклости функционала l на D и выпуклости замкнутого множества $Z(u)$ следуют существование и единственность элемента $z \in Z(u)$, удовлетворяющего условию (12). Выберем для задачи (1), (2) некоторое минимизирующее управление $u_0 \in U_0$ и соответствующее состояние $z_0 = z(u_0) \in Z(u_0)$ так, что $J(u_0) = J_0$. Из (1) вытекает, что элемент z_0 однозначно определяется равенством

$$l(z_0) = \min\{l(v) : v \in Z(u_0)\}. \tag{13}$$

Согласно (6) выполняется неравенство

$$f(u_\delta) + l(z_\delta(u_\delta)) \leqslant f(u_0) + l(z_\delta(u_0)) + \varepsilon(\delta), \quad \delta > 0.$$

На основании R1 имеем $z_\delta(u_0) \xrightarrow{s} z_0$, $\delta \to 0$, где элемент z_0 определяется условием (13). Поскольку $J_0 = f(u_0) + l(z_0)$ и функционал l непрерывен на X, справедливо соотношение

$$\varlimsup_{\delta\to 0}(f(u_\delta) + l(z_\delta(u_\delta))) \leqslant \varlimsup_{\delta\to 0}(f(u_0) + l(z_\delta(u_0)) + \varepsilon(\delta)) = J_0. \tag{14}$$

Отсюда в силу ограниченности снизу f и сильной выпуклости l следует ограниченность величин $\|z_\delta(u_\delta)\|$ при $\delta \to 0$ (см. [1, с. 25]). Поскольку множество $U \supset \{u_\delta\}$ ограничено, из сетей $\{u_\delta\}$, $\{z_\delta(u_\delta)\}$ можно выбрать подсети (для которых сохраним прежние обозначения) такие, что при $\delta \to 0$ имеют место сходимости

$$u_\delta \xrightarrow{w} \bar{u}_0, \quad z_\delta(u_\delta) \xrightarrow{w} \bar{z}_0. \tag{15}$$

Из (15) с учетом условия R2 вытекает, что $\bar{z}_0 \in Z(\bar{u}_0)$, поэтому справедливы неравенства

$$J_0 = \min_{u\in U} J(u) \leqslant f(\bar{u}_0) + l(\bar{z}_0) \leqslant \varliminf_{\delta\to 0}(f(u_\delta) + l(z_\delta(u_\delta))).$$

Отсюда и из (14) в силу слабой полунепрерывности снизу функционалов f, l получаем $\lim\limits_{\delta\to 0} f(u_\delta) = f(\bar{u}_0)$, $\lim\limits_{\delta\to 0} l(z_\delta(u_\delta)) = l(\bar{z}_0)$. Из [1, теорема 1.2.2] вытекает, что функционал l обладает H-свойством. Поскольку f также обладает этим свойством, из последних равенств следуют сильные сходимости $u_\delta \xrightarrow{s} \bar{u}_0$, $z_\delta(u_\delta) \xrightarrow{s} \bar{z}_0$ при $\delta \to 0$, где $\bar{u}_0 \in U_0$, $\bar{z}_0 \in Z_0$. В силу произвольности выбиравшихся в (15) подсетей теорема доказана.

Отметим, что условиям п. 1 удовлетворяют, например, функционалы $f(u) = \|u\|_W^2$, $l(z) = \|z - \tilde{z}\|^2$, $\tilde{z} \in X$, где $\|\cdot\|_W$ обозначает норму пространства W.

Замечание 2. Свойство R1 характерно, в частности, для РА, основанных на технике операторной регуляризации Лаврентьева — Браудера — Тихонова [4, 16–18]. В случае, когда отображение $u \to Z(u)$ однозначно, например, если оператор $A(u, \cdot)$ является строго монотонным при каждом $u \in U$, это условие выполняется автоматически. Поскольку в условиях работы [2] свойство R2 имеет место, отсюда вытекает утверждение замечания 1. Пример показывает, что в случае многозначного отображения $u \to Z(u)$ условие R1 существенно.

Замечание 3. Утверждение теоремы сохраняет силу, если множество U не ограничено, но функционал f обладает свойством коэрцитивности, т. е. $f(u) \to \infty$ при $\|u\|_W \to \infty$, $u \in U$.

С точки зрения численной реализации схемы регуляризации (6), (7) представляют интерес случаи, когда функционал J_δ обладает теми или иными свойствами непрерывности. В этой связи введем следующее условие

R3) при всех $\delta > 0$, $y^\delta \in X^*$ оператор $R_\delta(\cdot, y^\delta) : U \to X$ усиленно непрерывен, т. е.

$$(u_\beta \in U,\ u_\beta \xrightarrow{w} u) \Rightarrow (R_\delta(u_\beta, y^\delta) \xrightarrow{s} R_\delta(u, y^\delta)).$$

Нетрудно видеть, что при выполнении условия R3 функционал J_δ в (7) является слабо полунепрерывным снизу на U, а в случае непрерывности функционала f и непрерывным в сильной топологии W. Это позволяет использовать для его минимизации методы дискретной аппроксимации, развитые в [1, 26]. Кроме того, при выполнении R3 в (6) можно полагать $\varepsilon(\delta) = 0$.

3. Приведем некоторые примеры РА, удовлетворяющие условиям R1–R3.

В качестве первого примера рассмотрим отображение $R_\delta^{(1)}(u, \cdot) : X^* \to X$, сопоставляющее при фиксированных $\delta > 0$ и $u \in U$ элементу $y^\delta \in X^*$ решение $z_\delta(u) \in D$ регуляризованного ВН

$$\langle A(u, z) + \alpha(\delta) l'(z) - y^\delta, v - z \rangle \geqslant 0 \quad \forall v \in D, \tag{16}$$

где $\alpha(\delta)$, $\delta > 0$; l' есть градиент Фреше функционала l. Известно [4, 20], что если параметр регуляризации $\alpha(\delta)$ согласован с погрешностью δ так, что

$$\lim_{\delta \to 0} \alpha(\delta)^{-1} \delta = 0, \tag{17}$$

то семейство $\{R_\delta^{(1)}(u, \cdot)\}$ определяет РА для решения ВН (2).

Предложение 1. *Пусть выполняются условия* A1, A2 *и соотношение* (17). *Тогда* РА $R_\delta^{(1)}$ *удовлетворяет условиям* R1–R3.

Доказательство. Справедливость R1 для рассматриваемого РА известна [20, с. 135]. Пусть теперь $u_\beta \xrightarrow{w} u$, $z_\delta(u_\beta) \xrightarrow{w} z$ при $\beta, \delta \to 0$. В силу максимальной монотонности оператора $A(u, \cdot)$ соотношение (16) при $u = u_\beta$ эквивалентно следующему ВН [20, с. 115]:

$$\langle A(u_\beta, v) + \alpha(\delta) l'(v) - y^\delta, v - z_\delta(u_\beta) \rangle \geqslant 0 \quad \forall v \in D. \tag{18}$$

Переходя в (18) к пределу при $\beta, \delta \to 0$ и пользуясь условием A1, получаем $\langle A(u, v) - y, v - z \rangle \geqslant 0$ $\forall v \in D$. Отсюда вытекает, что $z \in Z(u)$, тем самым свойство R2 доказано.

Докажем справедливость R3. Пусть $u_\beta \xrightarrow{w} u$, величина δ и элемент y^δ фиксированы. На основании сильной выпуклости функционала l имеем неравенство [1, с. 25]

$$\langle l'(z) - l'(v), z - v \rangle \geqslant m\|z - v\|^2 \quad \forall z, v \in X \ (m > 0). \tag{19}$$

С использованием (19), как и в [20, с. 120], получаем оценку

$$m\alpha(\delta)\|z_\delta(u_\beta) - z_\delta(u)\| \leqslant \|A(u_\beta, z_\delta(u)) - A(u, z_\delta(u))\|_*. \tag{20}$$

Из (20) с учетом условия A1 вытекает соотношение $z_\delta(u_\beta) \xrightarrow{s} z_\delta(u)$, доказывающее R3. Предложение доказано.

В случае, когда $\varepsilon(\delta) = 0$ и элемент y в (2) известен точно, т. е. $\delta = 0$, из вышеприведенных рассуждений следует сходимость оптимальных управлений и состояний возмущенной задачи

$$\min_{u \in U}(f(u) + l(z_\alpha(u))),$$
$$\langle A(u, z_\alpha(u)) + \alpha l'(z_\alpha(u)) - y, v - z_\alpha(u)\rangle \geqslant 0 \quad \forall v \in D$$

при $\alpha \to 0$, $\alpha > 0$, к оптимальным управлениям и состояниям для исходной задачи (1), (2). Данное утверждение аналогично результатам работ [27–29], в которых исследовалось асимптотическое поведение решений задач оптимального управления распределенными системами при сингулярном в смысле [30] возмущении их уравнений состояния. Отметим также, что в случае $l(z) = \|z\|^2$ задача (16) принимает вид (8).

При рассмотрении следующего примера в дополнение к вышеприведенным требованиям будем предполагать выполненными условия

$$\begin{gathered}\|A(u, z)\|_* \leqslant L(1 + \|z\|), \quad \|l'(z)\|_* \leqslant L(1 + \|z\|) \quad \forall u \in U, \ z \in X \ (L > 0); \\ (u_\beta \xrightarrow{w} u, \ z_\beta \xrightarrow{s} z) \Rightarrow (A(u_\beta, z_\beta) \xrightarrow{s} A(u, z)).\end{gathered} \tag{21}$$

Зафиксируем $z^0 \in D$ и рассмотрим отображение $R_\delta^{(2)}(u, \cdot)$, сопоставляющее при фиксированных $\delta > 0$, $u \in U$ элементу $y^\delta \in X^*$ элемент $z^{N(\delta)} \in D$, где $z^k = z^k(u)$ определены равенством

$$z^{k+1} = P_D(z^k - \rho_k I^{-1}(A(u, z^k) + \alpha_k l'(z^k) - y^\delta)), \quad k = 0, 1, \dots, N(\delta) - 1. \tag{22}$$

Здесь $P_D : X \to D$ — оператор проектирования на множество D [1, с. 72], дуальное отображение $I : X \to X^*$ определено в (4), α_k, $\rho_k > 0$. Считаем, что последовательности $\{\alpha_k\}$, $\{\rho_k\}$ удовлетворяют условиям

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k = \lim_{k\to\infty} \frac{\rho_k}{\alpha_k^3} = \lim_{k\to\infty} \frac{|\alpha_k - \alpha_{k+1}|}{\rho_k \alpha_k^3} = 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \rho_k = \infty, \tag{23}$$

номер $N(\delta)$ выбирается так, что

$$\lim_{\delta\to 0} N(\delta) = \infty, \quad \lim_{\delta\to 0} \frac{\delta}{\alpha_{N(\delta)}} = 0. \tag{24}$$

Аналогично [20, с. 137] показывается, что определенное в (22)–(24) семейство операторов $R_\delta^{(2)}(u, \cdot)$, $\delta > 0$, при каждом $u \in U$ задает РА для решения ВН (2).

Предложение 2. *Пусть выполняются условия* A1, A2, (21), (23) *и* (24). *Тогда* РА $R_\delta^{(2)}$ *удовлетворяет условиям* R1–R3.

Доказательство. Свойство R1 фактически доказано в [20, с. 137]. Пусть $u_\beta \xrightarrow{w} u$, $z_\delta(u_\beta) = z^{N(\delta)}(u_\beta) \xrightarrow{w} z$ при $\beta, \delta \to 0$. Обозначим через $\tilde{z}^k(u)$ решение ВН (16) с $\alpha(\delta) = \alpha_k$ и положим $\Delta_k(u) = \|\tilde{z}^k(u) - z^k(u)\|$. Как и в [20], с использованием оценок (21) и неравенства (3) получаем соотношение

$$\Delta_{k+1}(u) \leqslant \left\{(1 - 2m\alpha_k\rho_k + C_1\rho_k^2)\Delta_k^2(u) + C_2\alpha_k^{-2}\rho_k^2\right\}^{1/2} + C_3\left|\frac{\alpha_k - \alpha_{k+1}}{\alpha_k^2}\right| \tag{25}$$

с константами C_1–C_3, не зависящими от управления u. Из (16) с учетом A2 и (19) для произвольного элемента $v_0 \in D$ находим

$$m\alpha_k\|\tilde{z}^k(u) - v_0\| \leqslant ((L+\alpha_k)(1+\|v_0\|) + \|y^\delta\|_*).$$

Отсюда следует, что $\sup\limits_{u\in U}\|\tilde{z}^k(u)\| < \infty$, $k = 1,\ldots,N(\delta)$. Кроме того, из (21), (22) вытекает, что

$$\sup_{u\in U}\|z^k(u)\| < \infty, \quad \widetilde{\Delta}_k \triangleq \sup_{u\in U}\Delta_k(u) < \infty; \quad k = 1,\ldots,N(\delta).$$

При этом величины $\widetilde{\Delta}_k$ и $\widetilde{\Delta}_{k+1}$ связаны аналогичным (25) неравенством, из которого с учетом (23), (24) и леммы 4.5 из [20] следует равенство

$$\lim_{\delta\to 0}\widetilde{\Delta}_{N(\delta)} = 0. \tag{26}$$

Согласно (26) выполняется соотношение

$$\lim_{\beta,\delta\to 0}\|\tilde{z}^{N(\delta)}(u_\beta) - z^{N(\delta)}(u_\beta)\| = 0,$$

поэтому $\tilde{z}^{N(\delta)}(u_\beta) \xrightarrow{w} z$ при β, $\delta \to 0$. Повторяя соответствующую часть доказательства предложения 1, отсюда получаем, что $z \in Z(u)$, тем самым свойство R2 доказано.

Пусть теперь δ, y^δ фиксированы, $u_\beta \xrightarrow{w} u$. Полагая в (22) $u = u_\beta$ и переходя к пределу по β последовательно для $k = 0,1,\ldots,N(\delta)-1$, с учетом (21) получаем $z^k(u_\beta) \xrightarrow{s} \bar{z}^k$, $k = 1,\ldots,N(\delta)$, где элементы $\bar{z}^k$ связаны соотношениями $\bar{z}^0 = z^0$,

$$\bar{z}^{k+1} = P_D(\bar{z}^k - \rho_k I^{-1}(A(u,\bar{z}^k) + \alpha_k l'(\bar{z}^k) - y^\delta)), \quad k = 0,1,\ldots,N(\delta)-1.$$

Таким образом, $z_\delta(u_\beta) = z^{N(\delta)}(u_\beta) \xrightarrow{s} \bar{z}^{N(\delta)} = z_\delta(u)$, поэтому свойство R3 здесь также имеет место. Предложение доказано.

Замечание 4. В случае, когда элемент y в (2) известен точно, т. е. $\delta = 0$, полагаем $R_\delta^{(2)}(u,y^\delta) = R_N(u) \triangleq z^N(u)$, при этом условия (24) принимают вид $N \to \infty$.

Дальнейшие примеры РА, удовлетворяющих условиям R1–R3, могут быть получены на основе базового РА $R_\delta^{(1)}$ с использованием дискретной аппроксимации пространства состояний X по схеме из [31]. Другой подход к регуляризации задач оптимального управления сингулярными системами, основанный на возмущении их целевых функционалов, развивается в работах [32, 33].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильев Ф. П.* Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.
2. *Лисковец О. А.* Регуляризация задач оптимального управления на некорректных вариационных неравенствах // Докл. АН СССР. 1989. Т. 304, № 1. С. 29–32.
3. *Лисковец О. А.* Дискретная регуляризация задач оптимального управления на некорректных монотонных вариационных неравенствах // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1990. Т. 54, № 5. С. 975–989.
4. *Альбер Я. И.* О решении нелинейных уравнений с монотонными операторами в банаховом пространстве // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, № 1. С. 3–11.
5. *Лионс Ж.-Л.* Управление сингулярными распределенными системами. М.: Наука, 1987.
6. *Якубович В. А.* К абстрактной теории оптимального управления // Сиб. мат. журн. 1978. Т. 19, № 2. С. 436–460.

7. *Хлуднев А. М.* Оптимальное управление пластиной над препятствием // Сиб. мат. журн. 1990. Т. 31, № 1. С. 172–178.
8. *Иваненко В. И., Мельник В. С.* Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами. Киев: Наук. думка, 1988.
9. *Gunzburger M. D., Hou L., Svobodny T. P.* Finite element approximations of an optimal control problem associated with the scalar Ginsburg — Landau equations // Comput. Math. Appl. 1991. V. 21. N 2–3. P. 123–131.
10. *Barbu V.* Optimal control of variational inequalities. Boston: Pitman, 1984. (Res. Notes Math.; V. 100.)
11. *Shi S.* Optimal control of strongly monotone variational inequalities // SIAM J. Control Optim. 1988. V. 26, N 2. P. 274–290.
12. *Bonnans J. F., Tiba D.* Pontryagin's principle in the control of semilinear elliptic variational inequalities // Appl. Math. Optim. 1991. V. 23, N 3. P. 299–312.
13. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974.
14. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.
15. *Темам Р.* Математические задачи теории пластичности. М.: Наука, 1991.
16. *Лаврентьев М. М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.
17. *Леонов А. С.* О квазиоптимальном выборе параметра регуляризации в методе М. М. Лаврентьева // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 4. С. 117–126.
18. *Кокурин М. Ю.* Об одном классе операторных уравнений с малым параметром и регуляризации некорректных задач // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 4. С. 842–850.
19. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
20. *Бакушинский А. Б., Гончарский А. В.* Некорректные задачи. Численные методы и приложения. М.: Изд-во МГУ, 1989.
21. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
22. *Лисковец О. А.* Регуляризация некорректных монотонных вариационных неравенств на приближенно заданных множествах // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 10. С. 1830–1833.
23. *Каплан А. А.* О сходимости методов решения вариационных неравенств со слабо коэрцитивными операторами // Докл. АН СССР. 1990. Т. 310, № 1. С. 20–24.
24. *Каплан А. А., Тихачке Р.* Исследование итерационных процессов решения некорректных выпуклых вариационных задач // Докл. АН СССР. 1990. Т. 315, № 2. С. 275–278.
25. *Намм Р. В.* О некоторых алгоритмах для решения задачи Синьорини // Оптимизация. 1983. Вып. 33. С. 63–78.
26. *Лисковец О. А.* Вариационные методы решения неустойчивых задач. Минск: Наука и техника, 1981.
27. *Хлуднев А. М.* О предельных переходах в задачах оптимального управления для оператора четвертого порядка // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 8. С. 1427–1435.
28. *Khludnev A. M.* An optimal control problem for a fourth-order variational inequality // Part. Differ. Equat. Banach center publ., Inst. of Mathematics, Warsaw, 1992. P. 225–231.
29. *Haraux A., Murat F.* Influence of a singular perturbation on the infimum of some functionals // J. Differential Equations. 1985. V. 58, N 1. P. 43–75.
30. *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981.
31. *Кокурин М. Ю.* Об использовании регуляризации для коррекции монотонных вариационных неравенств, заданных приближенно // Изв. вузов. Математика. 1992. № 2. С. 49–56.
32. *Лисковец О. А.* Регуляризация задач оптимального управления на решениях стационарных вариационных неравенств // Докл. АН БССР. 1988. Т. 32, № 2. С. 101–104.
33. *Серовайский С. Я.* Метод регуляризации по А. Н. Тихонову в задаче оптимального управления нелинейной параболической системой // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 1. С. 211–215.

г. Йошкар-Ола

Статья поступила 20 июля 1995 г.