

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КЛАССА ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ В ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТИ*)

Н. С. Даирбеков

Пусть n и m — пара натуральных чисел. Для вещественного числа ε , $0 \leq \varepsilon < 1$, обозначим через $\mathcal{B}(\varepsilon) = \mathcal{B}_{n,m}(\varepsilon)$ класс решений всевозможных комплексных уравнений Бельтрами

$$f_{\bar{z}}(z) = Q(z)f_z, \quad (1)$$

где $f = (f_1, \dots, f_m) : D \rightarrow \mathbb{C}^m$ — непрерывное отображение области $D \subset \mathbb{C}^n$ класса $W_{2,\text{loc}}^1(D)$; $f_{\bar{z}}$ — вектор, составленный из обобщенных производных $\frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_k}$, $j = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, n$, отображения f ; f_z — аналогичный вектор, составленный из производных $\frac{\partial f_j}{\partial z_k}$, $j = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, n$; $Q : D \rightarrow \mathbb{C}^{nm \times nm}$ — измеримое отображение области D в пространство комплексных $(nm \times nm)$ -матриц, причем

$$\|Q\|_{\infty} = \text{ess sup}_{z \in D} \|Q(z)\| \leq \varepsilon.$$

Здесь для комплексной матрицы $L \in \mathbb{C}^{nm \times nm}$ через $\|L\|$ обозначена операторная норма матрицы, а отображение f является решением системы (1), если (1) выполняется для почти всех $z \in D$.

Для натурального $k \geq 1$ и вещественного $R > 0$ обозначим через $B_k(R)$ шар в пространстве \mathbb{C}^k с центром в нуле радиуса R ; $B_k(R) = \{z \in \mathbb{C}^k \mid |z| < R\}$. Пусть $B_k = B_k(1)$ — единичный шар пространства \mathbb{C}^k . При $k = 1$ пишем $B(R) = B_1(R)$ и $B = B_1$. Обозначим границу ∂B диска B через S , и для борелевского множества $A \subset S$ обозначим меру A относительно элемента длины на S через $|A|$.

Одна из простейших формулировок теоремы устойчивости класса голоморфных функций следующая (см. [1]).

Теорема 1. Для каждого вещественного $\rho \in]0, 1[$ и натуральных $n, m \geq 1$ существует функция $\mu(\varepsilon)$, $0 \leq \varepsilon < 1$, такая, что

1) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu(\varepsilon) = \mu(0) = 0$;

2) для каждого отображения $f : B_n \rightarrow B_m$ из класса $\mathcal{B}(\varepsilon)$, $0 \leq \varepsilon < 1$, существует такое голоморфное отображение $h : B_n \rightarrow \mathbb{C}^m$, что

$$|f(z) - h(z)| \leq \mu(\varepsilon) \quad (2)$$

для всех $z \in B_n(\rho)$.

В данном контексте задача об устойчивости класса голоморфных отображений в замкнутой области ставится следующим образом:

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01769).

Задача. Имеет ли место утверждение теоремы 1 при $\rho = 1$?

А. П. Копыловым показано, что эта задача имеет отрицательное решение при $n \geq 2$ и произвольном m . Основным результатом нашей работы является доказательство того, что данная задача имеет отрицательное решение для любых значений n и m .

Для $\rho \in]0, 1[$ и натуральных $n, m \geq 1$ обозначим через $\mu_{n,m,\rho}(\varepsilon)$ наилучшую функцию $\mu(\varepsilon)$, для которой выполнено условие (2) теоремы 1. Таким образом,

$$\mu_{n,m,\rho}(\varepsilon) = \sup_f \inf_h \sup_{z \in B_n(\rho)} |f(z) - h(z)|,$$

где первая точная верхняя граница берется по всем отображениям $f : B_n \rightarrow B_m$ из класса $\mathcal{F}_{n,m}(\varepsilon)$, а точная нижняя граница — по всем голоморфным функциям $h : B_n \rightarrow \mathbb{C}^m$. Заметим, что всегда выполняется равенство $\mu_{n,m,\rho}(0) = 0$.

В этих обозначениях теорема 1 может быть переформулирована следующим образом:

Теорема 1'. Для $\rho \in]0, 1[$ имеет место равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_{n,m,\rho}(\varepsilon) = 0. \quad (3)$$

Указанная выше задача сводится к вопросу о справедливости равенства (3) при $\rho = 1$. Следующая теорема дает отрицательный ответ на данный вопрос, причем в более сильной формулировке.

Теорема 2. Для любых натуральных чисел n, m

$$\mu_{n,m,1}(\varepsilon) \equiv 1$$

для $\varepsilon \neq 0$.

Доказательство. Заметим, что неравенство

$$\mu_{n,m,1}(\varepsilon) \leq 1 \quad (4)$$

следует непосредственно из определения функции $\mu_{n,m,1}(\varepsilon)$. Кроме того, легко проверить, что $\mu_{n,m,1}(\varepsilon)$ — монотонно неубывающая функция относительно каждого переменного. Докажем, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_{1,1,1}(\varepsilon) \geq 1. \quad (5)$$

Тогда соображения монотонности и неравенства (4) и (5) дают утверждение теоремы 2.

Далее всегда считаем, что $n = m = 1$, а функцию $\mu_{1,1,1}(\varepsilon)$ будем просто обозначать через $\mu(\varepsilon)$.

Напомним следующий результат Берлинга и Альфорса [2].

Предложение 1. Для любого $\varepsilon > 0$ существует гомеоморфизм $\psi : \text{cl } B \rightarrow \text{cl } B$ замкнутого диска на себя такой, что сужение $\psi|_B : B \rightarrow B$ принадлежит классу $\mathcal{F}(\varepsilon)$, а граничное соответствие $\psi|_S : S \rightarrow S$ чисто сингулярно.

Замечание. Формально в работе [2] речь шла о квазиконформных автоморфизмах верхней полуплоскости, однако простое применение преобразования Кэли позволяет перенести результаты [2] на случай диска.

Продолжим доказательство теоремы 2. Зафиксируем произвольную последовательность положительных чисел ε_k , $k = 1, 2, \dots$, в интервале $]0, 1[$ такую, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0$.

Для $k = 1, 2, \dots$ пусть ψ_k обозначает отображение, гарантированное предложением 1 для числа ε_k . Так как отображение ψ_k чисто сингулярно, существует борелевское множество $E_k \subset S$ такое, что $|E_k| = 2\pi$ и $|\psi(E_k)| = 0$. Положим $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$. Тогда $|E| = 2\pi$ и $|\psi_k(E)| = 0$ для всех $k = 1, 2, \dots$. Так как $|E| = 2\pi$, стандартная теория меры влечет существование возрастающей последовательности компактов $K_k \subset E$, $k = 1, 2, \dots$ такой, что $\lim_{k \rightarrow \infty} |K_k| = 2\pi$.

Положим $\tilde{K}_k = \psi_k(K_k)$. Тогда $\tilde{K}_k \subset S$ и $|\tilde{K}_k| \leq |\psi_k(E)| = 0$ для всех $k = 1, 2, \dots$.

Пусть $\varphi : S \rightarrow \text{cl } B$ — произвольная непрерывная функция. Рассмотрим последовательность непрерывных отображений $h_k = \varphi \circ \psi_k^{-1} : \tilde{K}_k \rightarrow \text{cl } B$. Каждый компакт \tilde{K}_k имеет нулевую меру на S , тем самым он является интерполяционным множеством пика (см., например, [3]) для алгебры $A(B)$ функций, непрерывных на $\text{cl } B$ и голоморфных внутри B , т. е. каждая непрерывная функция, заданная на этом компакте, продолжается до элемента алгебры $A(B)$ с сохранением максимума модуля. В частности, для каждого $k = 1, 2, \dots$ существует непрерывное отображение замкнутого диска $\text{cl } B$ в себя, голоморфное на B , сужение которого на \tilde{K}_k совпадает с h_k . Сохраним для этого продолжения прежнее обозначение h_k .

Таким образом, мы построили последовательность непрерывных отображений $h_k : \text{cl } B \rightarrow \text{cl } B$, $k = 1, 2, \dots$, таких, что сужения $h_k|_B$ голоморфны, а $h_k|_{\tilde{K}_k} \equiv \varphi \circ \psi_k^{-1}$.

Рассмотрим последовательность $f_k = h_k \circ \psi_k$. Она обладает следующими свойствами:

- (а) $f_k : \text{cl } B \rightarrow \text{cl } B$ непрерывно;
- (б) $f_k|_B \in \mathcal{A}(\varepsilon_k)$;
- (в) $f_k|_{K_k} \equiv \varphi|_{K_k}$.

Условия (а), (б) и определение функции $\mu(\varepsilon)$ влекут существование последовательности голоморфных функций $\varphi_k : B \rightarrow \mathbb{C}$, $k = 1, 2, \dots$, таких, что

$$|f_k(z) - \varphi_k(z)| \leq \mu(\varepsilon_k) + \varepsilon_k \quad (6)$$

для всех $z \in B$. Интегрируя по окружности $|z| = R$ для $0 < R < 1$, учитывая, что интеграл от φ_k равен нулю, и переходя к пределу при $R \rightarrow 1$, из (6), в частности, выводим неравенство

$$\left| \int_S f_k(z) dz \right| \leq 2\pi(\mu(\varepsilon_k) + \varepsilon_k). \quad (7)$$

Из свойства (в) и (7) получаем

$$\begin{aligned} \left| \int_S \varphi(z) dz \right| &= \left| \int_{K_k} \varphi(z) dz + \int_{S \setminus K_k} \varphi(z) dz \right| \leq \left| \int_{K_k} \varphi(z) dz \right| + |S \setminus K_k| \\ &= \left| \int_{K_k} f_k(z) dz \right| + |S \setminus K_k| \leq \left| \int_S f_k(z) dz \right| + \left| \int_{S \setminus K_k} f_k(z) dz \right| + |S \setminus K_k| \\ &\leq \left| \int_S f_k(z) dz \right| + 2|S \setminus K_k| \leq 2\pi(\mu(\varepsilon_k) + \varepsilon_k) + 2|S \setminus K_k|. \end{aligned}$$

Устремляя k к бесконечности, имеем

$$\left| \int_S \varphi(z) dz \right| \leq 2\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu(\varepsilon).$$

Ввиду произвола в выборе функции φ отсюда выводим неравенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu(\varepsilon) \geq 1.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Копылов А. П. Устойчивость в C -норме классов отображений. Новосибирск: Наука, 1990.
2. Beurling A., Ahlfors L. The boundary correspondence under quasiconformal mappings // Acta Math. 1956. V. 96. P. 125–142.
3. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984.

г. Новосибирск

Статья поступила 28 февраля 1996 г.