Г. А. Маланьина, В. И. Хлебутина, Г. С. Шевцов, Конечные минимальные не вполне факторизуемые группы,
Матем. заметки, 1972, том 12, выпуск 2, 157–162

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 12, № 2 (1972), 157—162

УДК 512.4

КОНЕЧНЫЕ МИНИМАЛЬНЫЕ НЕ ВПОЛНЕ ФАКТОРИЗУЕМЫЕ ГРУППЫ

Г. А. Маланьина, В. И. Хлебутина, Г. С. Шевцов

В заметке дано полное описание конечных минимальных не вполне факторизуемых групп. Библ. 6 назв.

Подгруппа A группы G называется дополняемой в G, если в G существует такая подгруппа B, что $AB = G$ и $A \cap B = E$. Группы, все подгруппы которых дополняемы, называют вполне факторизуемыми. Они обладают следующими характерными свойствами:

Группа G тогда и только тогда является вполне факторизуемой, когда она может быть представлена в виде такого полупрямого произведения $G = A \leftthreetimes B$ двух своих вполне факторизуемых абелевых подгрупп A и B, что все множители хотя бы одного разложения группы A в прямое произведение циклических подгрупп простых порядков инвариантны в G (см. [1], [2]).

Группа тогда и только тогда вполне факторизуема, если она разложима в полупрямое произведение циклических подгрупп простых порядков (см. [3]).

Будем называть минимальными не вполне факторизуемыми группами такие не вполне факторизуемые группы, все истинные подгруппы которых вполне факторизуемы. В настоящей заметке мы рассматриваем конечные минимальные не вполне факторизуемые группы*). При их изучении нами существенно используются следующие

*) Этот вопрос был поставлен С. Н. Черниковым в 1957 г., на одном из заседаний руководимого им алгебраического семинара при Пермском госуниверситете.

свойства сверхразрешимых и минимальных несверхразрешимых групп (последние называют H-группами).

Конечная сверхразрешимая группа с абелевыми силовскими p-подгруппами разлагается в равномерное произведение циклических p-подгрупп (см. [4]).

Пусть G есть H-группа. Тогда (см. [5]):

a) G — разрешимая группа, ее порядок делится самое большее на три различных простых числа p, q, r; G обладает силовской башней типа $\prec$ или является группой Шмидта, причем $\prec$ есть упорядочение противоположное естественному упорядочению простых чисел;

b) G обладает точно одной инвариантной силовской подгруппой, например, p-подгруппой P, причем P' имеет самое большее экспоненту p; при $p > 2$ P имеет экспоненту p, при $p = 2$ имеет самое большее экспоненту 4;

c) если T — дополнение подгруппы P в G, то

$$T \cap C_G(P/\Phi(P)) = \Phi(G) \cap \Phi(T) = T \cap \Phi(G)$$

$$\text{и } \bar{T} = T/T \cap C_G(P/\Phi(P))$$

— группа Миллера — Морено или циклическая группа порядка степени простого числа (здесь $C_G(P/\Phi(P))$ — централизатор подгруппы $P/\Phi(G)$ в группе G, $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G);

d) если G — есть H-группа порядка $p^\alpha q^\beta r^\gamma$ ($p > q > r$) с тривиальным централизатором инвариантной силовской p-подгруппы в ее дополнении в G, то G является (см. [6]) группой с образующими элементами c_0, $c_1, \ldots, c_{r-1}$, b, a и определяющими соотношениями

$$c_0^p = c_1^p = \ldots = c_{r-1}^p = b^q = a^{r^n} = [c_i, c_j] = 1 \quad (i, j = 0, 1, \ldots, r-1),$$

$$a^{-1}ca = c_1^d,\ a^{-1}c_1a = c_2^d,\ \ldots,\ a^{-1}c_{r-2}a = c_{r-1}^d,\ a^{-1}c_{r-1}a = c_0^d,$$

$$a^{-1}ba = b^s,\ b^{-1}c_ib = c_i^{h^{s^i}} \quad (i = 0, 1, \ldots, r-1),$$

где $s^r \equiv 1 \pmod q$, d — первообразный корень r^n-го порядка из единицы в простом поле $K(p)$, h — корень степени q из единицы в $K(p)$, простые числа p, q, r удовлетворяют условиям $qr^n \mid p-1$, $r \mid q-1$.

Класс конечных минимальных не вполне факторизуемых групп исчерпывается следующими группами:

ТЕОРЕМА. *Конечная группа G тогда и только тогда будет минимальной не вполне факторизуемой группой, когда она является группой одного из следующих типов:*

1) G — циклическая группа порядка p^2, p — простое число;

2) G — группа порядка p^3, $p \neq 2$, с образующими элементами a, b, c и определяющими соотношениями

$$a^p = b^p = c^p = 1,\ ab = bac,\ ca = ac,\ cb = bc;$$

3) G — группа Миллера — Морено, в которой инвариантная силовская подгруппа нециклическая, а неинвариантная силовская подгруппа — циклическая простого порядка;

4) G есть H-группа порядка $p^r qr$, $p > q > r$, с образующими элементами $c_0, c_1, \ldots, c_{r-1}, b, a$ и определяющими соотношениями

$$c_0^p = c_1^p = \ldots = c_{r-1}^p = b^q = a^r = [c_i, c_j] = 1$$
$$(i, j = 0, 1, \ldots, r-1),$$
$$a^{-1}c_0a = c_1^d,\ a^{-1}c_1a = c_2^d, \ldots, a^{-1}c_{r-2}a = c_{r-1}^d,\ a^{-1}c_{r-1}a = c_0^d,$$
$$a^{-1}ba = b^s,\ b^{-1}c_ib = c_i^{h^{s^i}}\ (i = 0, 1, \ldots, r-1),$$

где $s^r \equiv 1 \pmod q$, d — первообразный корень r-го порядка из единицы в простом поле $K(p)$, h — корень степени q из единицы в поле $K(p)$, простые числа p, q, r удовлетворяют условиям $qr | p-1$, $r | q-1$.

Доказательство. Достаточность первых трех утверждений теоремы очевидна. Установим достаточность четвертого утверждения теоремы. В этом случае рассматриваемая группа не вполне факторизуема, а каждая ее истинная подгруппа является конечной сверхразрешимой группой с элементарными абелевыми силовскими подгруппами, и, следовательно, по указанному выше свойству сверхразрешимых групп, разлагается в равномерное произведение циклических подгрупп простых порядков, которое путем перестановки множителей можно преобразовать в полупрямое произведение. Поэтому каждая истинная подгруппа рассматриваемой группы вполне факторизуема, а сама группа — минимальная не вполне факторизуемая. Достаточность условий теоремы доказана полностью.

Докажем необходимость условий теоремы. Пусть G — конечная минимальная не вполне факторизуемая группа. Любая истинная подгруппа группы G вполне факторизуема и поэтому сверхразрешима. Следовательно, сама группа G является или сверхразрешимой или H-группой. Если группа G содержит элемент a порядка p^2, p — простое число, то подгруппа $\{a\}$ уже не вполне факторизуема. Поэтому $G = \{a\}$ и $|G| = p^2$.

Пусть в группе G порядки элементов не делятся на квадраты простых чисел. Будем различать следующие случаи: G — p-группа; G — не p-группа.

Пусть G — p-группа. Тогда в ней все элементы имеют порядок p. Группа G неабелева, так как иначе она была бы вполне факторизуемой. Поэтому группа G не может быть 2-группой. Очевидно также, что любая истинная подгруппа группы G абелева. Если a и b — неперестановочные элементы группы G, то $\{a, b\}$ — неабелева группа, и поэтому $\{a, b\} = G$. В p-группе G с двумя образующими элементами фактор-группа G/G' также имеет два образующих элемента. Следовательно, порядок этой фактор-группы равен p^2, подгруппы $G' \{a\}$, $G' \{b\}$ — истинные, значит, они абелевы и $G' \subset Z(G)$. Тогда группу G можно представить в виде $G = (G' \times \{b\}) \rightthreetimes \{a\}$. Поэтому $G' = \{[a, b]\}$— циклическая группа порядка p. Учитывая теперь равенство $|G/G'| = p^2$, имеем $|G| = p^3$. Следовательно, группа G является группой, указанной во втором пункте теоремы.

Пусть теперь G — не p-группа и в ней порядки элементов не делятся на квадраты простых чисел. В группе G любая силовская подгруппа является элементарной абелевой, и группа G, очевидно, не нильпотентна.

Рассмотрим следующие случаи:

G — сверхразрешимая группа;

G — H-группа.

Пусть G — сверхразрешимая группа рассматриваемого вида. По приведенному выше свойству сверхразрешимых групп, группа G разлагается в равномерное произведение циклических подгрупп простых порядков, которое перестановкой множителей можно преобразовать в полупрямое произведение. Поэтому группа G является вполне факторизуемой. Это противоречит, однако, тому, что G — не вполне факторизуемая группа. Следовательно, первый случай невозможен.

Пусть теперь G есть H-группа с указанными выше свойствами. Предположим сначала, что порядок H-группы G делится на два различных простых числа, p и q. Как следует из приведенных свойств H-групп, в этом случае рассматриваемая группа G представима в виде $G = P \rtimes \{a\}$, где P — инвариантная силовская p-подгруппа порядка p^α, $\{a\}$ — неинвариантная силовская q-подгруппа порядка q. Очевидно, что G — не нильпотентна. Следовательно, она содержит подгруппы Шмидта. Если бы при этом все подгруппы Шмидта были с циклическими инвариантными силовскими подгруппами, то группа G была бы сверхразрешимой. Поэтому группа G содержит хотя бы одну подгруппу Шмидта с нециклической инвариантной силовской подгруппой, которая является даже группой Миллера — Морено. Тогда группа G совпадает с указанной подгруппой Миллера — Морено и является минимальной не вполне факторизуемой группой, отмеченной в третьем пункте теоремы.

Предположим теперь, что порядок H-группы G рассматриваемого вида делится на три различных простых числа p, q, r. Тогда, как следует из указанных выше свойств H-групп, группа G представима в виде полупрямого произведения $G = [PQR]$ своих силовских подгрупп P, Q, R соответственно порядков p^α, q^β, r^γ, $p > q > r$, причем подгруппы P, Q, R являются элементарными абелевыми, а подгруппа R — даже циклической подгруппой $\{a\}$ простого порядка r. Докажем, что подгруппа Q также является циклической подгруппой простого порядка q. Допустим, что Q — нециклическая подгруппа порядка q^β. Подгруппа $T = Q \rtimes \{a\}$ — неабелева вполне факторизуема. Поэтому каждая подгруппа Шмидта группы T является группой порядка qr и $q \equiv 1 \pmod r$. Кроме того, из приведенных выше свойств H-групп следует, что фактор-группа группы T по централизатору $C_T(P)$ подгруппы P в группе T является группой Миллера — Морено, причем ее порядок равен qr, так как $q \equiv 1 \pmod r$. Тогда существует такое разложение $Q = \{b_1\} \times \ldots \times \{b_\beta\}$ группы Q в прямое произведение циклических подгрупп порядка q, что все его множители $\{b_i\}$, кроме одного, например, кроме множителя $\{b_1\}$, содержатся в $C_T(P)$, а множитель $\{b_1\}$ инвариантен относительно подгруппы $\{a\}$. Поэтому $G = C_T(P)\ [P\ \{b_1\}\ \ \{a\}]$, причем $A = [P\ \{b_1\}\ \ \{a\}]$ является H-группой, так как иначе группа G была бы сверхразрешимой. Следовательно, подгруппа A совпадает со всей группой G и $Q = \{b_1\}$.

Итак, H-группа G в рассматриваемом случае представима в виде полупрямого произведения $G = [P\ \{b_1\}\{a\}]$ с элементарной абелевой силовской p-подгруппой P порядка p^α, циклической подгруппой $\{b_1\}$ порядка q и циклической подгруппой $\{a\}$ порядка r. Поэтому, учитывая приведенное выше из [6] свойство H-групп, получаем, что в рассматриваемом случае группа G является группой, указанной в четвертом пункте теоремы. Теорема доказана полностью *).

Пермский государственный
университет

Поступило
31.V.1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Черников С. Н., Группы с системами дополняемых подгрупп, Матем. сб., **35** (1954), 93—128.
[2] Черникова Н. В., Группы с дополняемыми подгруппами, Матем. сб., **39** (1956), 273—292.
[3] Сюзева В. И. (Хлебутина), Полупрямые произведения циклических групп простого порядка, Уч. зап. Пермского ун-та, Матем., **17** (1960), 69—72.
[4] Шунков В. П., О группах, разложимых в равномерное произведение своих p-подгрупп, Докл. АН СССР, **154**, № 3 (1964), 542—544.
[5] Doerk K., Minimal nicht überauflösbare endliche Gruppen, Math. Z., **91** (1966), 198—205.
[6] Шатило Е. І., Про мінімальні ненадрозві'язні групи максимального складеного порядку, П'ята наукова конференція молодых математиків України, Тези Доповідей, Київ, 1970, 39—40.

---

*) Примечание при корректуре. Теперь нами доказано, что группа с бесконечным числом образующих, все истинные подгруппы которой вполне факторизуемы, сама является вполне факторизуемой.