Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 316, 2004 г.

С. А. Евдокимов[1], **И. Н. Пономаренко**[2]

О ВЕРШИННОЙ СВЯЗНОСТИ ОТНОШЕНИЯ АССОЦИАТИВНОЙ СХЕМЫ

1. Введение

Пусть $k \geqslant 0$ – целое число. Конечный простой граф Γ с множеством вершин V называется k-связным, если $|V| > k$ и граф $\Gamma - X$ является связным для всех множеств $X \subset V$, у которых $|X| < k$. Число

$$\kappa(\Gamma) = \max\left\{\, k: \ \Gamma \ \text{ является } k\text{-связным}\right\}$$

называется *вершинной связностью* графа Γ. Для симметричного антирефлексивного бинарного отношения R на V положим $\kappa(R) = \kappa(\Gamma)$, где Γ – граф на V с множеством рёбер R, и назовём отношение R связным, если связен граф Γ; если этот граф регулярен, положим $d(R) = d(\Gamma)$, где $d(\Gamma)$ – степень графа Γ. Если R симметричная 2-орбита транзитивной группы перестановок, то, очевидно, $\kappa(R) \leqslant d(R)$. Более того, как доказано в [7], в этом случае $\kappa(R) = d(R)$ всякий раз, когда отношение R связно. Для групп ранга 3 последнее утверждение было обобщено в [3] на случай, когда R является базисным отношением ассоциативной схемы ранга 3. (Ассоциативную схему ранга r можно представлять себе как специальное разбиение полного графа в $r-1$ регулярных подграфов; необходимые сведения из теории схем приведены в §2.) Более общо, следующая гипотеза была сформулирована А. Брауэром в статье [2].

Гипотеза. *Пусть R – связное базисное отношение ассоциативной схемы. Тогда $\kappa(R) = d(R)$.*

В этой статье мы доказываем гипотезу Брауэра в случае, когда соответствующая ассоциативная схема сильно замкнута. А именно, пусть $\mathcal{C}$ – произвольная схема на множестве V. Следуя [4, 1], для целого положительного числа m определим схему $\widehat{\mathcal{C}}^{(m)}$

---

[1] Поддержано грантом РФФИ 03-01-00349

[2] Поддержано грантами РФФИ 03-01-00349, 02-01-00093, NSH-2251.2003.1.

как наименьшую схему на множестве V^m, содержащую m-ую тензорную степень схемы $\mathcal{C}$ и рефлексивное отношение, отвечающее диагонали множества V^m. Естественная проекция схемы $\widehat{\mathcal{C}}^{(m)}$ на множество V называется *m-замыканием* схемы $\mathcal{C}$. Известно, что 1-замыкание и n-замыкание схемы $\mathcal{C}$ при $n = |V|$ совпадают соответственно с ней самой и со схемой 2-орбит её группы автоморфизмов. Схема $\mathcal{C}$ называется *m-замкнутой*, если она совпадает со своим m-замыканием. Можно доказать, что схема 2-орбит любой группы перестановок является m-замкнутой при всех m. Основной результат статьи может быть сформулирован следующим образом.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{C}$ – однородная схема и R – её связное симметричное базисное отношение. Предположим, что схема $\mathcal{C}$ является $d(R)$-замкнутой. Тогда $\kappa(R) = d(R)$.*

Замечание. В действительности из доказательства теоремы 1 следует, что её утверждение остаётся справедливым для каждого отношения $R = \bigcup_S (S \cup S^T)$, где S пробегает непустое множество сильно связных базисных отношений схемы $\mathcal{C}$ и S^T – отношение, транспонированное к S.

Для доказательства теоремы 1 мы воспользуемся одним старым результатом об атомах графа. А именно, множество $X \subset V$ называется *атомом* графа Γ, если

$$|X| = \min_{Y \subset V, |\partial Y| = k} |Y|,$$

где $\partial Y = \{x \in V \setminus Y : x$ смежна с некоторой вершиной из $Y\}$ и $k = \kappa(\Gamma)$. (Нетрудно проверить, что подграф графа Γ, индуцированный атомом, является атомом в смысле работы [7].) Обозначим через $\mathcal{A}(\Gamma)$ множество всех атомов графа Γ. Как показано в [7], различные атомы не пересекаются и потому отношение

$$E(\Gamma) = \bigcup_{X \in \mathcal{A}(\Gamma)} X \times X$$

является эквивалентностью на V (т.е. отношением эквивалентности на некотором его подмножестве). Ясно, что каждый атом индуцирует связный подграф графа Γ и $\mathcal{A}(\Gamma) \neq \emptyset$, если граф Γ связен. Отметим также, что в регулярном связном графе Γ, для которого $\kappa(\Gamma) < d(\Gamma)$, каждый атом состоит из по крайней мере двух вершин. Теорема 1 выводится из следующего утверждения, которое будет доказано в § 3. Ниже $\mathcal{C}(\Gamma)$ обозначает наименьшую схему на множестве вершин графа Γ, содержащую множество его рёбер.

Теорема 2. *Для каждого графа Γ эквивалентность $E(\Gamma)$ является объединением базисных отношений $(\kappa(\Gamma)+1)$-замыкания схемы $\mathcal{C}(\Gamma)$.*

Неизвестно, является ли эквивалентность $E(\Gamma)$ объединением базисных отношений схемы $\mathcal{C}(\Gamma)$. Однако, если это так, то гипотеза Брауэра может быть доказана с помощью приводимого ниже рассуждения.

Доказательство теоремы 1. Очевидно, $\kappa(R) \leqslant d(R)$. Предположим, что $\kappa(R) < d(R)$. Обозначим через Γ граф с множеством рёбер R. Тогда существует атом этого графа, который содержит две его смежные вершины, и потому $R \cap E(\Gamma) \neq \emptyset$. С другой стороны, из теоремы 2 следует, что множество $E(\Gamma)$ является объединением базисных отношений $(\kappa(\Gamma)+1)$-замыкания схемы $\mathcal{C}(\Gamma)$. Поскольку схема $\mathcal{C}$ является $d(R)$-замкнутой и расширяет схему $\mathcal{C}(\Gamma)$, множество $E(\Gamma)$ является объединением базисных отношений схемы $\mathcal{C}$. Так что $R \subset E(\Gamma)$. В силу связности графа Γ и однородности схемы $\mathcal{C}$, отсюда следует, что эквивалентность $E(\Gamma)$ имеет точно один класс, что противоречит определению атома. □

2. Схемы

2.1. Пусть V – конечное множество и $\mathcal{R}$ – множество непустых бинарных отношений на V. Пара $\mathcal{C} = (V, \mathcal{R})$ называется *когерентной конфигурацией* или *схемой* на V, если выполнены следующие условия:

(C1) множество $\mathcal{R}$ образует разбиение множества V^2,

(C2) диагональ $\Delta(V)$ множества V^2 является объединением элементов из $\mathcal{R}$,

(C3) множество $\mathcal{R}$ замкнуто относительно перестановки координат,

(C4) если $R, S, T \in \mathcal{R}$, то число $|\{v \in V : (u,v) \in R,\ (v,w) \in S\}|$ не зависит от выбора $(u,w) \in T$.

Элементы множества V, отношения из $\mathcal{R}$ и числа из условия (C4) называются *точками*, *базисными отношениями* и *числами пересечений* схемы $\mathcal{C}$, соответственно. Последние обозначаются через $c_{R,S}^T$. Мы также обозначаем через $\mathcal{R}^* = \mathcal{R}^*(\mathcal{C})$ множество всевозможных объединений элементов из $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathcal{C})$.

Множество всех схем на V частично упорядочено по включению: именно, $\mathcal{C} \leqslant \mathcal{C}'$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}^*(\mathcal{C}) \subset \mathcal{R}^*(\mathcal{C}')$. Для множеств $\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_s$ бинарных отношений на V мы обозначаем через $[\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_s]$ наименьшую схему $\mathcal{C}$ на V такую, что $\mathcal{R}_i \subset \mathcal{R}^*(\mathcal{C})$ для всех i; мы опускаем фигурные скобки, если $\mathcal{R}_i = \{R_i\}$ и пишем $\mathcal{C}_{v_1,\ldots,v_s}$ вместо $[\mathcal{R}(\mathcal{C}), R_1, \ldots, R_s]$ в том случае, когда $R_i = \{(v_i, v_i)\}$ для всех i, где $v_i \in V$.

2.2. Пусть $\mathcal{C} = (V, \mathcal{R})$ – схема. Положим

$$\mathrm{Cel}\,(\mathcal{C}) = \{X \subset V :\ \Delta(X) \in \mathcal{R}\}, \quad \mathrm{Cel}^*(\mathcal{C}) = \{X \subset V :\ \Delta(X) \in \mathcal{R}^*\}.$$

Каждый элемент множества $\mathrm{Cel}\,(\mathcal{C})$ (соотв. $\mathrm{Cel}^*(\mathcal{C})$) называется *клеткой* (соотв. *клеточным множеством*) схемы $\mathcal{C}$. Очевидно, множество V является дизъюнктным объединением клеток. Схема $\mathcal{C}$ называется *однородной*, если $|\mathrm{Cel}\,(\mathcal{C})| = 1$. Если при этом каждое её базисное отношение симметрично, то $\mathcal{C}$ называется *ассоциативной схемой*.

Множество всех эквивалентностей на V, принадлежащих множеству $\mathcal{R}^*$, обозначается через $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathcal{C})$, а его элементы называются *эквивалентностями* схемы $\mathcal{C}$. Ясно, что $\Delta(V), V^2 \in \mathcal{E}$. Легко проверяется, что для $R \in \mathcal{R}^*$ наименьшая эквивалентность $\langle R \rangle$ на V, содержащая R, также принадлежит $\mathcal{E}$. Положим $\mathcal{B}(\mathcal{C}) = \bigcup_{E \in \mathcal{E}} V/E$. Для каждого $U \in \mathcal{B}(\mathcal{C})$ множество $\mathcal{R}_U = \{R_U :\ R \in \mathcal{R},\ R_U \neq \emptyset\}$, где $R_U = R \cap U^2$, является множеством базисных отношений некоторой схемы на U. Мы называем эту схему *ограничением* схемы $\mathcal{C}$ на U и обозначаем её через $\mathcal{C}_U$.

Непустая эквивалентность схемы $\mathcal{C}$ называется *неразложимой*, если она не является дизъюнктным объединением двух непустых эквивалентностей этой схемы. Легко видеть, что каждую эквивалентность схемы $\mathcal{C}$ можно представить в виде дизъюнктного объединения неразложимых эквивалентностей, называемых её *неразложимыми компонентами*. Можно доказать (см. [4, лемма 2.6.2]), что носители неразложимых компонент являются попарно непересекающимися клеточными множествами схемы $\mathcal{C}$.

2.3. Схемы $\mathcal{C} = (V, \mathcal{R})$ и $\mathcal{C}' = (V', \mathcal{R}')$ называются *изоморфными*, если $\mathcal{R}^f = \mathcal{R}'$ для некоторой биекции $f : V \to V'$, называемой *изоморфизмом* схемы $\mathcal{C}$ на схему $\mathcal{C}'$. Схемы $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}'$ называются *подобными*, если

$$c_{R,S}^T = c_{R^\varphi, S^\varphi}^{T^\varphi}, \quad R, S, T \in \mathcal{R}, \tag{1}$$

для некоторой биекции $\varphi : \mathcal{R} \to \mathcal{R}'$, $R \mapsto R^\varphi$, называемой *подобием* схемы $\mathcal{C}$ на схему $\mathcal{C}'$. При этом подобие φ индуцирует биекцию из $\mathcal{R}^*$ на $(\mathcal{R}')^*$, для обозначения которой мы используем ту же букву. Можно доказать, что $\Delta(V)^\varphi = \Delta(V')$ и $(R^T)^\varphi = (R^\varphi)^T$ для всех $R \in \mathcal{R}$. Каждый изоморфизм схемы $\mathcal{C}$ на схему $\mathcal{C}'$ индуцирует естественным образом подобие этих схем.

Следующее утверждение суммирует те свойства подобий, которые будут использоваться далее (см. [4, 6]).

Лемма 2.1. *Пусть $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ – подобие схемы $\mathcal{C}$ на V на схему $\mathcal{C}'$ на V'. Тогда*

(1) $\mathcal{E}(\mathcal{C})^\varphi = \mathcal{E}(\mathcal{C}')$ *и* $|V_E| = |V'_{E^\varphi}|$, $|V/E| = |V'/E^\varphi|$ *для всех* $E \in \mathcal{E}(\mathcal{C})$,

(2) *если эквивалентность $E \in \mathcal{E}(\mathcal{C})$ неразложима, то эквивалентность $E^\varphi \in \mathcal{E}(\mathcal{C}')$ также неразложима и для каждой пары $(X, Y) \in V/E \times V'/E^\varphi$ подобие φ индуцирует подобие $\varphi_{X,Y} : \mathcal{C}_X \to \mathcal{C}_Y$ такое, что $(R_X)^{\varphi_{X,Y}} = (R^\varphi)_Y$ для всех $R \in \mathcal{R}^*(\mathcal{C})$,*

(3) $\langle R \rangle^\varphi = \langle R^\varphi \rangle$ *для всех* $R \in \mathcal{R}^*(\mathcal{C})$. □

2.4. В этом пункте V и m обозначают соответственно конечное множество и положительное целое число. Для $v \in V^m$ и $i \in \{1, \ldots, m\}$ через v_i обозначается i-ая координата точки v. Следующее утверждение доказано в [4, лемма 3.1].

Лемма 2.2. *Пусть $\mathcal{C}$ – схема на V и $\widehat{\mathcal{C}} = \widehat{\mathcal{C}}^{(m)}$. Для $v_1, \ldots, v_{m-1} \in V$ положим $U = \{u \in V^m : u_i = v_i,\ i = 1, \ldots, m-1\}$. Тогда $U \in \mathcal{B}(\widehat{\mathcal{C}})$ и*

$$\widehat{\mathcal{C}}_U \geqslant (\mathcal{C}_{v_1, \ldots, v_{m-1}})^\zeta,$$

где $\zeta : V \to U$ – биекция, переводящая v в $(v_1, \ldots, v_{m-1}, v)$. □

Следующая лемма является частным случаем леммы 6.2 из работы [5].

Лемма 2.3. *Пусть $\mathcal{C}$ – схема на V. Тогда для каждого $R \in \mathcal{R}(\widehat{\mathcal{C}}^{(m)})$ множество $\{(u_i, v_i) : (u, v) \in R\}$ является базисным отношением m-замыкания схемы $\mathcal{C}$ при всех $i = 1, \ldots, m$.* □

3. Доказательство теоремы 2

Нам понадобится следующая лемма. Ниже для конечного множества V и неотрицательного целого числа k мы полагаем $\widehat{V}=V^{k+1}$ и $\widehat{E}_k=\{(z,z')\in\widehat{V}^2:\ z_i=z'_i,\ i=1,\dots,k\}$.

Лемма 3.1. *Пусть $\mathcal{C}$ – схема на V, $R\in\mathcal{R}^*(\mathcal{C})$ и $U\in\mathrm{Cel}(\widehat{\mathcal{C}})$, где $\widehat{\mathcal{C}}=\widehat{\mathcal{C}}^{(k+1)}$. Для $x\in U$ обозначим через $\delta_R(x)$ мощность того класса эквивалентности $\langle R_{V_x}\rangle$ на множестве $V_x=V\setminus\{x_1,\dots,x_k\}$, который содержит x_{k+1}. Тогда число $\delta_R(x)$ не зависит от выбора x.*

Доказательство. Пусть $x,y\in U$. Поскольку U – клетка схемы $\widehat{\mathcal{C}}$, пары (x,x) и (y,y) принадлежат одной и той же неразложимой компоненте $\widehat{E}$ эквивалентности $\widehat{E}_k\in\mathcal{E}(\widehat{\mathcal{C}})$. Обозначим через U_x и U_y классы эквивалентности $\widehat{E}$, содержащие точки x и y соответственно. Из утверждения (2) леммы 2.1 при $\varphi=1_{\widehat{\mathcal{C}}}$ и $E=\widehat{E}$ следует, что существует подобие $\widehat{\varphi}:\widehat{\mathcal{C}}_{U_x}\to\widehat{\mathcal{C}}_{U_y}$ такое, что

$$(\widehat{S}_{U_x})^{\widehat{\varphi}}=\widehat{S}_{U_y},\quad \widehat{S}\in\mathcal{R}^*(\widehat{\mathcal{C}}).\tag{2}$$

С другой стороны, пусть $\zeta_z:V\to U_z$ – биекция, переводящая v в $(z_1,\dots,z_k,v)$, $z\in\{x,y\}$. Тогда $S^{\zeta_z}=S^{k+1}\cap\widehat{E}_{U_z}$ для всех $S\in\mathcal{R}(\mathcal{C})$. Кроме того, если $R_i=\{(z_i,z_i)\}$ и $\widehat{R}_i=\{(v,v)\in\widehat{V}^2:\ v_i=v_{k+1}\}$, то $R_i^{\zeta_z}=\widehat{R}_i\cap\widehat{E}_{U_z}$ при $i=1,\dots,k$. Так что в силу равенства $\mathcal{C}_{z_1,\dots,z_k}=[\mathcal{R}(\mathcal{C}),R_1,\dots,R_k]$ лемма 2.2 влечёт, что

$$(\mathcal{C}_{z_1,\dots,z_k})^{\zeta_z}=[S^{k+1}\cap\widehat{E}_{U_z},\widehat{R}_1\cap\widehat{E}_{U_z},\dots,\widehat{R}_k\cap\widehat{E}_{U_z}]\leqslant\widehat{\mathcal{C}}_{U_z}.\tag{3}$$

Обозначим через φ_z подобие схемы $\mathcal{C}_{z_1,\dots,z_k}$, индуцированное биекцией ζ_z, и положим $\varphi=\varphi_x\circ\widehat{\varphi}\circ\varphi_y^{-1}$. Тогда из (2) и (3) следует, что φ является подобием схемы $\mathcal{C}_{x_1,\dots,x_k}$ на схему $\mathcal{C}_{y_1,\dots,y_k}$, причём

$$S^\varphi=S,\quad \{(x_i,x_i)\}^\varphi=\{(y_i,y_i)\},\quad (U^{(x)})^\varphi=U^{(y)},$$

где $S\in\mathcal{R}(\mathcal{C})$, $i\in\{1,\dots,k\}$ и $U^{(x)}$ (соотв. $U^{(y)}$) – клетка схемы $\mathcal{C}_{x_1,\dots,x_k}$ (соотв. $\mathcal{C}_{y_1,\dots,y_k}$), содержащая точку x_{k+1} (соотв. y_{k+1}). (Это следует из того, что точки x и y принадлежат одной и той же клетке U схемы $\widehat{\mathcal{C}}$.) В силу утверждений (2) и (3) леммы 2.1 мы получаем отсюда, что $(E_x)^\varphi=E_y$, где E_x (соотв. E_y) – неразложимая компонента эквивалентности $\langle R_{V_x}\rangle$ (соотв. $\langle R_{V_y}\rangle$), содержащая пару (x_{k+1}, x_{k+1}) (соотв. (y_{k+1}, y_{k+1})). По утверждению (1) той же леммы $|X| = |Y|$, где X (соотв. Y) – класс эквивалентности E_x (соотв. E_y), содержащий точку x_{k+1} (соотв. y_{k+1}). Таким образом, $\delta_R(x) = |X| = |Y| = \delta_R(y)$, что завершает доказательство леммы. □

Доказательство теоремы 2. Пусть Γ – граф с множеством вершин V и множеством рёбер R. Тогда $R \in \mathcal{R}^*(\mathcal{C})$, где $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\Gamma)$. Из леммы 3.1 при $k = \kappa(\Gamma)$ и произвольном целом δ следует, что множество

$$X_\delta = \{x \in V^{k+1} : \ \delta_R(x) = \delta\}$$

является клеточным множеством схемы $\widehat{\mathcal{C}} = \widehat{\mathcal{C}}^{(k+1)}$. Обозначим через δ мощность атома графа Γ. Тогда $X_\delta \neq \emptyset$ и, более того, $x \in X_\delta$ тогда и только тогда, когда x_{k+1} – вершина некоторого атома A_x графа Γ, совпадающего с компонентой связности графа $\Gamma - \{x_1, \ldots, x_k\}$ (заметим, что множество Y является объединением связных компонент графа $\Gamma - Z$ тогда и только тогда, когда $\partial Y \subset Z$). Отсюда следует, что проекция каждого класса эквивалентности $(\widehat{E}_k)_{X_\delta}$ на $(k+1)$-ую координату является объединением атомов. Положим

$$\widehat{E}_\delta = \langle \widehat{R}_\delta \rangle, \quad \widehat{R}_\delta = \{(x, y) \in (\widehat{E}_k)_{X_\delta} : \ (x_{k+1}, y_{k+1}) \in R\}.$$

Из определений следует, что если $(x, y) \in \widehat{R}_\delta$, то $A_x = A_y$, и потому $(x_{k+1}, y_{k+1}) \in E(\Gamma)$. Таким образом, $E_\delta = E(\Gamma)$, где $E_\delta = \{(x_{k+1}, y_{k+1}) : \ (x, y) \in \widehat{E}_\delta\}$. С другой стороны, очевидно, $\widehat{R}_\delta \in \mathcal{R}^*(\widehat{\mathcal{C}})$, и, значит, $\widehat{E}_\delta \in \mathcal{E}(\widehat{\mathcal{C}})$. По лемме 2.3 отсюда следует, что E_δ является эквивалентностью $(k+1)$-замыкания схемы $\mathcal{C}$. Но тогда таковой же является и $E(\Gamma)$. □

Литература

1. С. Евдокимов, И. Пономаренко, *Характеризация циклотомических схем и нормальные кольца Шура над циклической группой.* — Алгебра и анализ **14** (2002), 2, 11–55.
2. A. E. Brouwer, *Spectrum and Connectivity of Graphs.* — SMC 50 jubilee (Amsterdam, 1996), CWI Quarterly **9** (1996), 37–40.
3. A. E. Brouwer, D. M. Mesner, *The connectivity of strongly regular graphs.* — European J. Combinatorics **6** (1985), 215–216.
4. S. Evdokimov, M. Karpinski, I. Ponomarenko, *On a New High Dimensional Weisfeiler-Leman Algorithm.* — Journal of Algebraic Combinatorics **10** (1999), 29–45.

5. S. Evdokimov, I. Ponomarenko, *Separability Number and Schurity Number of Coherent Configurations*. — Electronic Journal of Combinatorics **7** (2000), #R31.
6. S. Evdokimov, I. Ponomarenko, G. Tinhofer, *Forestal algebras and algebraic forests (on a new class of weakly compact graphs)*. — Discrete Mathematics **225** (2000), 149–172.
7. M. Watkins, *Connectivity of transitive graphs*. — J. Combin. Theory **8** (1970), 23–29.

Evdokimov S. A., Ponomarenko I. N. On the vertex connectivity of a relation in association scheme.

It is proved that for a sufficiently closed association scheme, the Brouwer conjecture on the coincidence of the vertex connectivity and the degree of any connected basis relation of it is true.

Санкт-Петербургский институт
информатики и автоматизации РАН
E-mail: evdokim@pdmi.ras.ru

Поступило 30 сентября 2004 г.

Санкт-Петербургское отделение
Математичекого института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: inp@pdmi.ras.ru