B. M. Darinskii, A. V. Loboda, D. S. Saiko, On some topological characteristics of harmonic polynomials,
Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 2021, Number 5, 23–32

Известия вузов. Математика
2021, № 5, с. 23–32
https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Посвящается памяти Юрия Григорьевича Борисовича

Б.М. ДАРИНСКИЙ, А.В. ЛОБОДА, Д.С. САЙКО

О НЕКОТОРЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

Аннотация. В работе изучаются геометрические и топологические свойства гармонических однородных полиномов. На основе исследования линий нулевого уровня таких многочленов на единичной сфере вводится понятие их топологического типа. Описаны топологические типы гармонических многочленов до третьей степени включительно.

В случае комплекснозначных гармонических многочленов изучены распределения их критических точек в областях знакопостоянства их вещественных и мнимых частей на сфере. Показано, что при переходе от вещественных к комплексным полиномам увеличивается число таких областей и уменьшаются значения максимумов квадрата модуля гармонического полинома. С применением формулы Эйлера делаются выводы о количестве критических точек изучаемых функций.

Ключевые слова: гармоническая функция, однородный многочлен, критическая точка, линия уровня, формула Эйлера.

УДК: 515.162: 512.816

DOI: 10.26907/0021-3446-2021-5-23-32

Введение

В настоящей работе изучаются некоторые свойства гармонических полиномов в пространстве трех вещественных переменных. Более точно, речь идет об однородных полиномах (формах) второй и третьей степеней, являющихся решениями уравнения Лапласа.

К изучению именно таких полиномов приводит, например, ряд задач физики сплошных сред [1]–[4] и квантовой механики [5]. Это связано с тем, что однородные многочлены являются собственными функциями оператора квадрата момента импульса l^2, определяемого известной [5] формулой

$$l^2 = -\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}x_j\nabla_k x_l\nabla_m,$$

где ε_{ijk} — тензор Леви–Чивита, x_j — декартовы координаты в $\mathbb{R}^3$ (и по повторяющимся индексам производится суммирование от единицы до трех). Последнее утверждение получается с использованием представления оператора квадрата момента импульса через оператор Эйлера $Eu = x_i\nabla_i$ в следующем виде [6]:

$$l^2 = Eu^2 + Eu - r^2\triangle,$$

где $\triangle$ — оператор Лапласа.

Поступила в редакцию 26.01.2021, после доработки 26.01.2021. Принята к публикации 30.03.2021.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований 20-01-00497.

Отметим также, что необходимость изучения и классификации гармонических однородных многочленов третьей степени возникает в связи с задачами описания голоморфно однородных вещественных гиперповерхностей многомерных комплексных пространств. Большой класс таких поверхностей представляют, как известно, трубчатые гиперповерхности с аффинно однородными основаниями.

При этом (в отличие от 2-мерного и 3-мерного случаев) к настоящему времени описаны лишь большие семейства аффинно однородных гиперповерхностей пространства $\mathbb{R}^4$ (см. [7]), но нет их полной классификации. В то же время естественным средством для их изучения является техника нормальных аффинных уравнений. В случае строго выпуклой поверхности в $\mathbb{R}^4$ такое уравнение имеет вид

$$x_4 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + F_3(x_1, x_2, x_3) + F_4(x_1, x_2, x_3) + \dots, \tag{1}$$

где F_3 — кубическая форма от трех переменных, которую можно считать гармоническим многочленом. В первую очередь от вида слагаемого F_3 существенно зависят свойства поверхностей (1) и, в частности, их возможная аффинная однородность.

Естественным является вопрос классификации таких форм 3-й степени с точностью до ортогональных преобразований. При этом количество ортогонально неэквивалентных гармонических многочленов третьей степени является достаточно большим. Поэтому представляет интерес и более грубая, топологическая классификация таких многочленов.

Топологический подход к исследованию различных систем оказался плодотворным в классификации их возможных структур. В качестве примера сошлемся на прикладные работы [8], [9], в которых успешно построена полная классификация кристаллов по их акустическим свойствам.

Целью работы является исследование геометрических и топологических свойств гармонических полиномов от трех переменных за счет изучения их линий нулевого уровня на единичной сфере. Описаны вытекающие из таких рассмотрений топологические типы однородных гармонических многочленов второй и третьей степеней (теоремы 1, 2).

Изучены также распределения критических точек таких многочленов в компонентах их знакопостоянства на сфере. Обсуждаются важные для приложений максимальные и минимальные значения, принимаемые на сфере плотностями волновых функций, определяемых гармоническими полиномами (как вещественными, так и комплекснозначными).

1. Понятие топологического типа гармонического многочлена

Основой обсуждений настоящей статьи является общеизвестная теорема о среднем значении гармонических функций. Рассматривая интеграл

$$\int_{S^2} u dS \tag{2}$$

от любой такой функции по единичной сфере $S^2 = \{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ трехмерного пространства, мы получаем (с точностью до умножения на площадь сферы) значение обсуждаемой функции в начале координат.

Так как однородные многочлены (формы) любой положительной степени обращаются в нуль в этой точке, то интеграл (2) для любого однородного гармонического полинома равен нулю. На сфере такой полином не может тождественно равняться нулю, поэтому мы получаем разбиение сферы на области положительности и отрицательности обсуждаемого полинома, разделенные линией (множеством) его нулевого уровня.

Именно структура таких разбиений является интересующей нас топологической характеристикой исходного гармонического полинома. В упомянутых приложениях наших обсуждений к задачам квантовой механики также представляют интерес наличие и количество критических точек гармонического полинома на отдельных компонентах сферы, получаемых при таком разбиении.

Рассмотрим, например, простейший ненулевой гармонический полином первой степени, т. е. любую линейную форму

$$P_1(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3,\ (a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0).$$

Линией нулевого уровня этого многочлена является окружность, разделяющая сферу на *две полусферы* плоскостью, перпендикулярной вектору (a_1, a_2, a_3).

Не уменьшая общности можно рассматривать эту плоскость (после поворота осей) как плоскость $x_3 = 0$.

Семейство гармонических многочленов (форм) второй степени от трех вещественных переменных образует 5-мерное линейное пространство. Любой такой многочлен можно представить, например, в виде следующей комбинации пяти базисных полиномов:

$$P_2(x) = a_1x_1x_2 + a_2x_1x_3 + a_3x_1x_3 + a_4(x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2) + a_5(x_1^2 - x_2^2). \tag{3}$$

Рассмотрим два примера, связанных с разбиениями сферы представителями этого семейства.

Пример 1. $P_2^{(1)}(x) = x_1x_2$.

На сфере S^2 множество нулевого уровня этого полинома второго порядка распадается на две пересекающиеся окружности $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$, которые делят сферу на *четыре части.*

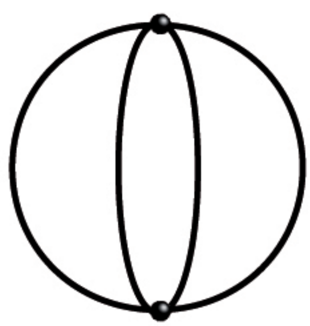

Рис. 1. Разбиение сферы на четыре части, порождаемое многочленом $P_2^{(1)}$

Пример 2. $P_2^{(2)}(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2$.

Этот полином выделяет на сфере две окружности, лежащие в параллельных плоскостях на расстояниях $1/\sqrt{3}$ от координатной плоскости $x_3 = 0$. Эти окружности делят сферу на *три области.*

Количество областей, на которые сфера S^2 разбивается линиями нулевого уровня гармонического (ненулевого) полинома P, будем называть в этой статье *топологическим типом* этого полинома. В отличие от единственного типа, одинакового для всех простейших гармонических многочленов первой степени, в случае второй степени имеются, как показывают примеры 1, 2, многочлены разных типов.

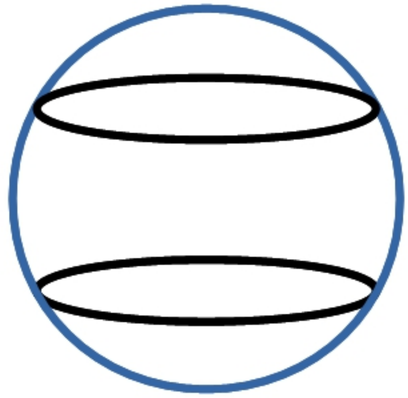

Рис. 2. Разбиение сферы на три части, порождаемое многочленом $P_2^{(2)}$

Ответ на вопрос о количестве таких типов для гармонических многочленов второй степени дается следующим утверждением.

Теорема 1. *Для произвольного ненулевого гармонического полинома второй степени разбиение сферы S^2 на области знакопостоянства этого полинома имеет в точности один из двух возможных топологических типов, описанных в примерах* 1, 2.

Доказательство. Любая квадратичная форма от трех переменных, в том числе форма вида (6), может быть приведена ортогональным преобразованием (сохраняющим сферу S^2) к диагональному виду

$$Q(x) = \alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \gamma x_3^2, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Ортогональные преобразования сохраняют как сферу S^2, так и условие гармоничности. Поэтому среди тройки коэффициентов (α, β, γ), отвечающей многочлену (3), обязательно имеются коэффициенты разных знаков.

При этом, если все они ненулевые, без ограничения общности можно считать два из них положительными, а третий — отрицательным. Тогда уравнение (4) задает в пространстве двустороннюю коническую (эллиптическую) поверхность с вершиной в начале координат. Такая поверхность пересекает сферу S^2 по двум замкнутым линиям, диффеоморфным окружностям и не имеющим общих точек. В этом случае исходный гармонический многочлен имеет топологический тип из примера 2.

Возможен еще случай, при котором один из тройки коэффициентов (α, β, γ) равен нулю, а два оставшихся имеют разные знаки. Тогда уравнение (4) описывает пару пересекающихся плоскостей, а при пересечении этих плоскостей со сферой происходит ее разбиение на четыре части, как в примере 1. □

Рассмотрим теперь более сложный вопрос о количестве топологических типов гармонических полиномов третьей степени. Любой такой многочлен является элементом 7-мерного пространства и может быть записан в виде

$$P_3 = a_1 x_1 \left(x_2^2 - x_3^2\right) + a_2 x_2 \left(x_3^2 - x_1^2\right) + a_3 x_3 \left(x_2^2 - x_1^2\right) + \tag{5}$$

$$+ b_1 x_1 \left(x_2^2 + x_3^2 - \frac{2}{3} x_1^2\right) + b_2 x_2 \left(x_1^2 + x_3^2 - \frac{2}{3} x_2^2\right) + b_3 x_3 \left(x_1^2 + x_2^2 - \frac{2}{3} x_3^2\right) + c x_1 x_2 x_3.$$

На множествах нулевого уровня на S^2 у таких многочленов естественно предполагать наличие точек, через которые проходят, например, три линии. В качестве примера полинома, для которого складывается такая ситуация, приведем гармоническую функцию

$$P_3^{(1)} = x_1(x_1^2 - 3x_2^2). \tag{6}$$

В точке $x_3 = 1, x_1 = 0, x_2 = 0$ пересекаются три линии нулевого уровня.

Добавление к P_3 других гармонических слагаемых мономов приводит к расщеплению этой точки и изменению формы линий. Нетрудно увидеть три варианта расщепления. В первом из них происходит распад на три не пересекающиеся линии, во втором имеются две, в третьем — три точки пересечения.

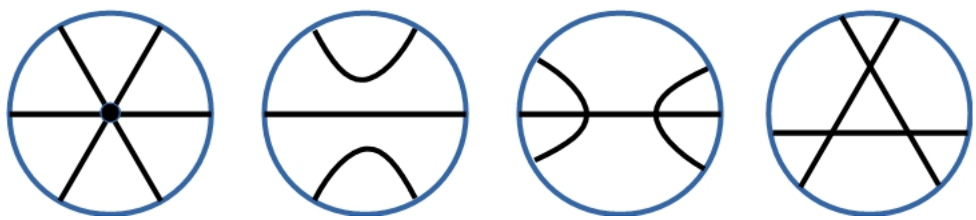

Рис. 3. Варианты «распада» точки пересечения трех линий на сфере

Для топологических типов многочленов третьей степени справедлива

Теорема 2. *Для гармонических полиномов третьей степени имеются разбиения сферы линиями нулевого уровня на четыре, шесть, восемь областей знакопостоянства таких полиномов.*

Доказательство. Приведем примеры гармонических многочленов, разбивающих S^2 именно на указанные количества областей.

Для приводимого многочлена

$$P_3^{(2)} = x_3(x_1^2 + x_2^2 - 2/3x_3^2)$$

линия нулевого уровня на сфере S^2 распадается на три компоненты. Одна из них представляет собой экваториальную окружность $x_3 = 0$, а две другие получаются за счет пересечения сферы двусторонней конической поверхностью $x_1^2 + x_2^2 - 2/3x_3^2 = 0$. Эти окружности радиуса $\sqrt{3/5}$ вместе с упомянутым экватором разбивают сферу на четыре связных компоненты.

Для упомянутого выше многочлена (6) три большие окружности на S^2, проходящие через ее северный и южный полюса, делят ее на шесть частей.

Наконец, многочлен $P_3^{(3)} = x_1x_2x_3$ имеет на сфере также три большие окружности, составляющие в совокупности множество его нулевого уровня. Каждая из двух полусфер, высекаемых плоскостью $x_3 = 0$, делится на четыре части парой плоскостей $x_1 = 0, x_2 = 0$. $\square$

Замечание. Исследование гармонических неприводимых многочленов третьей степени с точки зрения их множеств нулевого уровня на сфере представляет достаточно сложную задачу. Укажем здесь лишь, что из девяти типов кубических форм от трех переменных, получаемых в результате их линейной классификации и представленных в ([10], сс. 48, 49), четыре типа не допускают гармонических представителей. Вместе с тем, большое количество свободных параметров в формуле (5) (а также в линейной классификации [10]) пока не позволило получить полные описания всех возможных топологических типов гармонических кубических форм.

При этом представляется правдоподобной (пока не доказанная строго) гипотеза о разбиении сферы на две части гармоническим многочленом P_3 общего положения.

2. Плотность вероятности

В квантово-химических исследованиях рассматриваемые гармонические полиномы (как вещественные, так и комплекснозначные) формируют волновую функцию электрона. Квадрат модуля этой функции является плотностью вероятности нахождения частицы в некоторой точке на единичной сфере, на нее накладывается условие нормировки

$$\int |P_k(x)|^2 dS = 1,$$

где интегрирование проводится по сфере S^2 единичного радиуса.

В случае тривиального многочлена (5) первой степени для такого интеграла несложно получить (с учетом соотношения

$$\int x_j x_k dS = \frac{4\pi}{3}\delta_{jk}, \text{ где } \delta_{jk} - \text{символ Кронекера)}$$

следующее ограничение на его коэффициенты a_k:

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\frac{4\pi}{3} = 1.$$

В частном случае, когда вектор $a = (a_1, a_2, a_3)$ направлен вдоль оси OZ, получаем

$$a_1 = a_2 = 0, \ a_3 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}.$$

Максимальное значение нормированного таким условием полинома P_1, равное $\sqrt{3/4\pi}$, достигается в точке сферы, на которую указывает вектор a.

Еще одной важной характеристикой квантовой системы является плотность вероятности ρ нахождения частицы в некоторой точке на сфере, которая определяется выражением

$$\rho = |P|^2 = P \cdot \bar{P},$$

где $\bar{P}$ — комплексно сопряженная функция. Для вещественного полинома P_1, рассмотренного выше, максимальное значение ρ_1 равно $3/4\pi$.

Далее рассмотрим вопрос о влиянии мнимой компоненты гармонического многочлена на эту характеристику. Без ограничения общности можно положить

$$P_1^{(2)} = ax_1 + ibx_2,$$

где a, b — вещественные положительные числа. С учетом условия нормировки для плотности получается выражение

$$\rho_1 = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{a^2 x_1^2 + b^2 x_2^2}{a^2 + b^2}.$$

Экстремальные значения этой функции достигаются на плоскости $x_3 = 0$, максимальное значение (при $a > b$) достигается в точках $x_1 = \pm 1$ и равно

$$\frac{3}{4\pi} \cdot \frac{a^2}{a^2 + b^2}.$$

Отметим, что поскольку второй сомножитель здесь меньше единицы, добавление мнимой компоненты привело к понижению максимального значения плотности вероятности.

Второе экстремальное значение плотности ρ_1 достигается в точках $x_2 = \pm 1$. Соответствующие точки на сфере являются седловыми критическими точками.

Наличие ненулевых мнимой и вещественной компонент у гармонического полинома приводит, таким образом, к радикальной перестройке топологической структуры функции ρ_1 по сравнению со случаем вещественного полинома. В простейшем случае вещественного P_1 эта структура может быть представлена как сумма двух соприкасающихся сфер (общую границу полусфер можно склеить в точку), на каждой из которых функция ρ_1 имеет только две критические точки.

А после добавления мнимого слагаемого получается одна сфера с шестью указанными выше особыми точками. Отметим, что нулевые значения плотности вероятности достигаются на пересечении линий нулевого уровня для вещественной и мнимой компонент полинома. В рассмотренном примере это плоскости $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$, а третьи координаты точек их пересечения на сфере $x_3 = \pm 1$. Отметим, что для совокупности критических точек на сфере функции ρ_1, а именно, двух минимумов, двух максимумов и двух седловых точек, выполняется формула Эйлера.

3. Критические точки плотности вероятности

После нахождения нормировочных коэффициентов для многочленов $P_2^{(1)}$ и $P_2^{(2)}$ из примеров 1, 2 получим полиномы вида

$$P_2^{(1)} = \sqrt{\frac{15}{4\pi}} x_1 x_2, \quad P_2^{(2)} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}(r^2 - 3x_3^2),\ r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Формулы для соответствующих плотностей вероятностей имеют вид

$$\rho_1 = \frac{15}{4\pi} x_1^2 x_2^2, \quad \rho_2 = \frac{5}{16\pi}(r^2 - 3x_3^2)^2.$$

Максимальное значение плотности вероятности ρ_1 достигается при $x_1 = x_2 = 1/\sqrt{2}$ и равно $15/16\pi$. Для плотности ρ_2 наибольшее значение достигается при $x_3 = 1, r = 1$ и равно $5\pi/4$. Эта величина является наибольшей для класса гармонических полиномов второй степени.

Напомним, что топологический тип многочлена $P_1^{(2)}$ (с функцией плотности ρ_1) разбивает сферу S^2 на четыре секториальные области, каждая из которых ограничена двумя отрезками нулевой линии уровня $P_1^{(2)}$. Проводя операцию стягивания таких границ в точку, преобразуем каждую область в сферу, на которой функциональная зависимость ρ_1 имеет один минимум и один максимум.

Функция $P_2^{(2)}$ порождает на сфере три области, две из них ограничены одной линией нулевого уровня и поэтому топологически эквивалентны сфере с одной точкой минимума плотности вероятности. Третья область ограничена двумя линиями нулевого уровня, поэтому она эквивалентна сфере с двумя минимумами, что свидетельствует о наличии двух максимумов и седловых точек.

Отметим, что точка пересечения линий нулевого уровня является неустойчивой в том плане, что добавление полинома, имеющего ненулевую величину в этой точке, приводит к распаду пересечения и перестройке системы пересекающихся кривых на совокупность линий, изолированных друг от друга.

Рассмотрим влияние мнимой компоненты полинома на топологические характеристики плотности вероятности. Рассмотрим полином вида

$$P_2(3) = a(r^2 - 3x_1^2) + ib(r^2 - 3x_2^2).$$

Вещественная компонента рассекает сферу двумя окружностями, перпендикулярными оси x_1, мнимая компонента — аналогичными окружностями, перпендикулярными оси x_2. В результате сфера рассекается на десять областей, ограниченных дугами окружностей. Пересечение этих линий происходит в восьми точках. В этих точках квадрат модуля $P_2^{(3)}$ принимает минимальные нулевые значения.

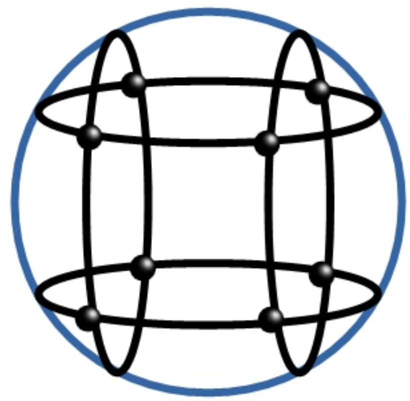

Рис. 4. Разбиение сферы на десять частей, порождаемое многочленом $P_2^{(3)}$

Для выполнения формулы Эйлера об особых точках на сфере необходимо наличие десяти максимумов и шестнадцати седловых точек. На картине пересечений линий нулевого уровня точкам максимумов соответствуют площадки, а седловым точкам — отрезки этих линий. На рис.4 представлена картина пересечений линий нулевого уровня в этом случае. Здесь дуги на сфере отвечают седловым точкам зависимости ρ, точки пересечения — минимальным значениям этой функции, ограниченные площадки — ее максимумам.

Рассмотрим полином

$$P_2^{(4)} = a(x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2) + ibx_1x_2,$$

у которого вещественная компонента имеет две пересекающиеся линии нулевого уровня, а мнимая — две линии в параллельных плоскостях.

Плотность вероятности в этом случае описывается формулой

$$\rho_2 = a^2(x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2)^2 + b^2x_1^2x_2^2.$$

Пересечения линий нулевого уровня действительной и мнимой частей полинома образуют множество из восьми точек на сфере. Нетрудно проверить, что в точке $x_3 = 1$ достигается максимум функции ρ_2. Поэтому плотность вероятности имеет восемь минимумов, шесть максимумов и двенадцать седловых особых точек, что соответствует структуре куба.

Наименьшее число минимумов имеют полиномы типа

$$P_2^{(5)} = iax_3x_1 + b(x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2)$$

с условием нормировки

$$1 = \frac{4\pi}{15(a^2 + 12b^2)}.$$

Соответственно здесь $\rho_2 = a^2x_3^2x_1^2 + b^2(x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2)^2$.

В этом случае две окружности, которые лежат в плоскости, перпендикулярной x_3, пересекаются координатной плоскостью $x_1 = 0$ в четырех точках $x_2 = \pm\sqrt{2/3},\ x_3 = \pm\sqrt{1/3}$.

Максимальные значения плотности вероятности сохраняются, появляются две седловые точки с координатами

$$x_1 = \sqrt{\frac{12b^2 - a^2}{2(9b^2 - a^2)}},\ x_2 = 0,\ x_3 = \sqrt{\frac{6b^2 - a^2}{2(9b^2 - a^2)}}.$$

В завершение этого раздела и статьи в целом укажем, что для гармонических полиномов третьей степени количество максимумов плотности вероятности может изменяться от шести до восьми.

Для гармонических полиномов более высоких степеней описания, подобные приведенным выше, существенно усложняются.

Литература

[1] Работнов Ю.Н. *Механика деформируемого твердого тела* (Наука, М., 1988).
[2] Лотов К.В. *Физика сплошных сред* (М.-Ижевск: Ин-т компьют. исследов., 2002).
[3] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. *Фейнмановские лекции по физике.* Т. 7 *Физика сплошных сред* (Мир, М., 1967).
[4] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика.* Т. VIII. *Электродинамика сплошных сред* (Наука, М., 1982).
[5] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика.* Т. III. *Квантовая механика* (Физматлит, 2008).
[6] Борисович Ю.Г., Даринский Б.М., Кунаковская О.В. *Применение топологических методов для оценки числа продольных упругих волн в кристаллах*, Теор. и матем. физика. **94** (1), 146–152 (1993).
[7] Eastwood M., Ezhov V. *Homogeneous Hypersurfaces with Isotropy in Affine Four-Space*, Тр. МИАН **235**, 57–70 (2001).
[8] Воротников Д.А., Даринский Б.М., Звягин В.Г. *Топологический подход к исследованию акустических осей в кристаллах*, Кристаллография, **51** (1), 112–117 (2006).
[9] Даринский Б.М., Ефанова Н.Д., Кандрашин В.Ю. *Теория атома водорода в декартовой системе координат* (Воронеж, ВГУ, 2015).
[10] Крафт Х. *Геометрические методы в теории инвариантов* (Мир, М., 1987).

Борис Михайлович Даринский

Воронежский государственный университет,
Университетская пл., д. 1, г. Воронеж, 394018, Россия,

e-mail: darinskii@mail.ru

Александр Васильевич Лобода

Воронежский государственный технический университет,
ул. 20 лет Октября, д. 84, г. Воронеж, 394006, Россия,

e-mail: lobvgasu@yandex.ru

Дмитрий Сергеевич Сайко

Воронежский государственный университет инженерных технологий,
пр. Революции, д. 19, г. Воронеж, 394018, Россия,

e-mail: dmsajko@mail.ru

B.M. Darinskii, A.V. Loboda, and D.S. Saiko

On some topological characteristics of harmonic polynomials

Abstract. The paper studies the geometric and topological properties of harmonic homogeneous polynomials. Based on the study of the zero-level lines of polynomials on the unit sphere, the concept of topological type for such polynomials is introduced. Topological types are described for harmonic polynomials up to the third degree inclusive.

In the case of complex-valued harmonic polynomials, the distributions are investigated of their critical points in regions on the sphere in which their real and imaginary parts have constant sign. It is shown that when passing from real to complex polynomials, the number of such regions increases and the maximal values of the square of the modulus of the harmonic polynomial decrease. Using the Euler formula, conclusions are drawn about the number of critical points of the functions under study.

Keywords: harmonic function, homogeneous polynomial, critical point, level line, Euler's formula.

Boris Mikhailovich Darinskii

Voronezh State University,
1 Universitetskaya sq., Voronezh, 394018 Russia,

`e-mail:` darinskii@mail.ru

Alexander Vasil'evich Loboda

Voronezh State Technical University,
84 20-letya Oktyabrya str., Voronezh, 394006 Russia,

`e-mail:` lobvgasu@yandex.ru

Dmitry Sergeevich Saiko

Voronezh State University of Engineering Technologies,
19 Revolutsii Ave., Voronezh, 394018 Russia,

`e-mail:` dmsajko@mail.ru