Н.Н.Ляшенко

# СТАТИСТИКА СЛУЧАЙНЫХ КОМПАКТОВ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Настоящая работа посвящена некоторым вопросам статистики случайных множеств. Мы ограничимся лишь компактными случайными подмножествами евклидова пространства размерности $m$.

Обозначим через $\mathcal{K}_m$ множество непустых компактов в $R^m$, а через $\mathcal{C}_m$ – множество непустых выпуклых компактов в $R^m$. Рассмотрим операцию сложения подмножеств $R^m$, определяемую по правилу:

$$A + B = \{ x+y \mid x \in A \,\&\, y \in B \},$$

а также операцию умножения произвольного подмножества $R^m$ на действительное число:

$$\alpha A = \{ \alpha x \mid x \in A \}.$$

Очевидно, $\mathcal{K}_m$ и $\mathcal{C}_m$ замкнуты относительно этих операций.

Пусть $S$ – единичный шар в $R^m$, а $\varepsilon$ – положительное число. Тогда $A + \varepsilon S$ – представляет собой $\varepsilon$-окрестность множества $A$. С помощью окрестностей можно определить на $\mathcal{K}_m$ метрику

$$\rho(A, B) = \inf \{ \varepsilon \mid A \subset B + \varepsilon S \,\&\, B \subset A + \varepsilon S \},$$

называемую метрикой Хаусдорфа. Эта метрика определяет некоторую топологию на $\mathcal{K}_m$. Соответствующую борелевскую $\sigma$-алгебру мы обозначим через $\mathcal{B}_m$. Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ – произвольное вероятностное пространство, а $A$ – отображение из $\Omega$ в $\mathcal{K}_m$, измеримое по Борелю (в смысле $\mathcal{B}_m$) относительно $\mathcal{A}$. Тогда $A$ называется компактным случайным множеством. Если с вероятностью 1 реализации $A$ лежат в $\mathcal{C}_m$, то говорят о выпуклом компактном случайном множестве.

Любая функция $\xi : \Omega \to R^m$, обладающая свойством

$$\forall \omega \subset \Omega (\xi(\omega) \in A(\omega)),$$

называется селектором случайного множества $A$. Семейство селекторов $A$, измеримых относительно $\mathcal{A}$, обозначим через $\Gamma_A$. Математическим ожиданием случайного множества $A$ называется множество

$$EA = \{ E\xi \mid \xi \in \Gamma_A \}.$$

Математическое ожидание существует тогда и только тогда, когда существует $E\|A\|$ (здесь $\|A\| = \rho(A, \{0\})$ ). Математическое ожидание выпуклого случайного множества выпукло. Если $\sigma$-алгебра событий $\mathcal{A}$ не имеет атомов положительной вероятности, математическое ожидание выпукло независимо от выпуклости исходного случайного множества.

Нетрудно показать, что $E(A+B) = EA + EB$ ; $E(\lambda A) = \lambda \cdot EA$.

Пусть $r$ - некоторая метрика на $\mathcal{K}_m$. Дисперсией случайного множества $A$ относительно метрики $r$ естественно называть число

$$D_r A = E r^2(A, EA).$$

Величину $D_\rho A$ будем обозначать просто $DA$ и называть дисперсией $A$. $DA$ существует тогда и только тогда, когда существует $E\|A\|^2$. Легко видеть, что $DA = 0$ в том и только в том случае, если $A$ вырождено. Кроме того, $D(\lambda A) = \lambda^2 DA$. Эти свойства аналогичны свойствам классической дисперсии. С другой стороны, дисперсия $D$ не является аддитивной, т.е. дисперсия суммы независимых случайных множеств не обязательно равна сумме их дисперсий. В дальнейшем у нас появится метрика, порождающая аддитивную дисперсию.

Через $\mathcal{S}$ обозначим единичную сферу в $R^m$. Для каждого $\alpha \in \mathcal{S}$ рассмотрим проекционный функционал

$$\pi_\alpha(M) = \sup_{x \in M} \alpha x ,$$

заданный на $\mathcal{E}_m$. Значения всех проекционных функционалов полностью определяют выпуклое множество. Для каждого выпуклого компактного случайного множества $A$ семейство случайных величин $\pi_\alpha(A)$ представляет собой случайную функцию на сфере $\mathcal{S}$ с непрерывными реализациями. Пусть для любых $A$ и $B$ из $\mathcal{E}_m$ число $\nu(A, B)$ совпадает с расстоянием между $\pi_\alpha(A)$ и $\pi_\alpha(B)$ в смысле $L_2(\mathcal{S})$. Тогда $\nu$ - метрика на $\mathcal{E}_m$. Соответствующая дисперсия $D_\nu$ (определенная для выпуклых компактных случайных множеств со свойством $E\|A\|^2 < \infty$ ) аддитивна.

Любая задача о выпуклых компактных случайных множествах мо-

жет быть сформулирована на языке случайных функций $\pi_\alpha(A)$. Ряд свойств проекционных функционалов делает выгодным такой переход. Отметим некоторые из них

$$\pi_\alpha(A+B)=\pi_\alpha(A)+\pi_\alpha(B);$$

$$\pi_\alpha(\lambda A)=\lambda\pi_\alpha(A) \quad (\lambda\geqslant 0);$$

$$\pi_\alpha(-A)=\pi_{-\alpha}(A).$$

Сумма случайных множеств переходит в сумму случайных функций. Нормированные суммы переходят в соответствующие нормированные суммы случайных функций.

Ряд важных геометрических характеристик выпуклых множеств просто выражается через $\pi_\alpha$. Так,

$$\rho(A,B)=\sup_{\alpha\in\mathfrak{S}}|\pi_\alpha(A)-\pi_\alpha(B)|;$$

$$\|A\|=\sup_{\alpha\in\mathfrak{S}}\pi_\alpha(A);$$

$$\vartheta(A,B)=\Big(\int_{\mathfrak{S}}(\pi_\alpha(A)-\pi_\alpha(B))^2\,d\alpha\Big)^{1/2};$$

$$\|A\|_\vartheta=\Big(\int_{\mathfrak{S}}\pi_\alpha^2(A)\,d\alpha\Big)^{1/2}.$$

Здесь $\|A\|_\vartheta=\vartheta(A,\{0\})$. Далее, $\pi_\alpha(A)+\pi_{-\alpha}(A)$ – поперечник $A$ в направлении $\alpha$;

$$\operatorname{diam}A=\sup_{\alpha\in\mathfrak{S}}(\pi_\alpha(A)+\pi_{-\alpha}(A));$$

$$\operatorname{br}A=\inf_{\alpha\in\mathfrak{S}}(\pi_\alpha(A)+\pi_{-\alpha}(A))$$ – ширина $A$;

Условие $\operatorname{br}A=0$ равносильно утверждению, что $A$ лежит в некоторой гиперплоскости.

Рассмотрим асимметрию $A$ относительно точки $x$:

$$\operatorname{asym}_x A=\rho(A,(-A)+2\{x\}).$$

Тогда $\operatorname{asym}_x A=\sup_{\alpha\in\mathfrak{S}}(\pi_\alpha(A)-\pi_{-\alpha}(A)-2\alpha x)$.

В частности, асимметрия относительно начала координат (или просто асимметрия множества $A$) равна

$$asym_0 A = \sup_{\alpha \in \mathfrak{S}} (\pi_\alpha(A) - \pi_{-\alpha}(A)).$$

Средний радиус множества

$$rad\, A = \frac{1}{mes\, \mathfrak{S}} \int_{\mathfrak{S}} \pi_\alpha(A)\, d\alpha .$$

Наконец, отметим, что $\pi_\alpha(EA) = E\pi_\alpha(A)$.

Как было показано в [I], перевод постановок задач о случайных множествах на язык случайных функций оказывается полезным для получения аналогов классического закона больших чисел, а также различных вариантов центральной предельной теоремы. При этом в качестве аналогов нормальных случайных величин выступают гауссовы случайные множества, определяемые следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Компактное случайное множество называется гауссовым, если оно почти наверное выпукло и случайная функция $\pi_\alpha(A)$ гауссова (т.е. являются гауссовыми ее конечномерные распределения).

Для гауссовых случайных множеств справедлива следующая характеризационная теорема.

ТЕОРЕМА I. Для того, чтобы $A$ было гауссовым случайным множеством, необходимо и достаточно, чтобы $A$ допускало представление

$$A = M + \{\xi\},$$

где $M$ - (неслучайное) выпуклое множество, а $\xi$ - гауссовский случайный вектор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. п.I. Достаточность условия в формулировке теоремы очевидна. Докажем его необходимость.

п.2. Рассмотрим опорную функцию множества $A$, отображающую $\alpha \in R^m$ в $R$ и задаваемую соотношением:

$$\pi_\alpha(A) = \sup_{x \in A} \alpha x .$$

Она является выпуклой (см. [2]). Кроме того, для любого набора $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in R^m$ случайный вектор $(\pi_{\alpha_1}(A), \ldots, \pi_{\alpha_n}(A))$ по условию является гауссовым. Действительно, он представим в виде

$$(a_1 \pi_{\beta_1}(A), \ldots, a_n \pi_{\beta_n}(A)),$$

где $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathfrak{S}$ ; $a_1, \ldots, a_n \geqslant 0$ .

п.3. Рассмотрим $\theta_1, \ldots, \theta_n \geqslant 0$, $\theta_1 + \ldots + \theta_n = 1$. В силу выпуклости $\pi_\alpha(A)$ на $R^m$ имеем:

$$\pi_\sigma(A) \leqslant \theta_1 \pi_{\alpha_1}(A) + \ldots + \theta_n \pi_{\alpha_n}(A),$$

где $\sigma = \theta_1 \alpha_1 + \ldots + \theta_n \alpha_n$ .

Отсюда $\theta_1 \pi_{\alpha_1}(A) + \ldots + \theta_n \pi_{\alpha_n}(A) - \pi_\sigma(A) \geqslant 0$ . С другой стороны, случайный вектор $(\theta_1 \pi_{\alpha_1}(A), \ldots, \theta_n \pi_{\alpha_n}(A), -\pi_\sigma(A))$ гауссов, поэтому

$$\theta_1 \pi_{\alpha_1}(A) + \ldots + \theta_n \pi_{\alpha_n}(A) - \pi_\sigma(A) = g_n(\overline{\theta}, \overline{\alpha}),$$

где $\overline{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$, $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ . Иными словами, левая часть последнего равенства имеет вырожденное распределение.

п.4. Пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ – ортонормированный базис пространства $R^m$ . Положим

$$\lambda_j = \begin{cases} \gamma_j, & 1 \leqslant j \leqslant m; \\ -\gamma_{j-m}, & m+1 \leqslant j \leqslant 2m; \end{cases}$$

т.е. $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{2m}) = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m, -\gamma_1, \ldots, -\gamma_m)$.

Для любого $\beta \in \mathfrak{S}$ найдется единственный набор $\theta_1, \ldots, \theta_{2m} \geqslant 0$. , такой, что

$$\beta = \theta_1 \lambda_1 + \ldots + \theta_{2m} \lambda_{2m}, \quad \theta_j \theta_{j+m} = 0 .$$

Очевидно,

$$\theta_j(\beta) = \begin{cases} \beta \lambda_j, & \beta \lambda_j \geqslant 0; \\ 0, & \beta \lambda_j < 0; \end{cases}$$

т.е. $\theta_j(\beta) = (\beta \lambda_j)^+$ .

Далее, $\theta_1 + \ldots + \theta_{2m} = u > 0$ . Положим $\theta_j^* = \theta_j u^{-1}$ $(1 \leqslant j \leqslant 2m)$.

Тогда $\theta_j^* \geqslant 0$; $\theta_1^* + \ldots + \theta_{2m}^* = 1$ ;

$$u^{-1}\beta = \theta_1^* \lambda_1 + \ldots + \theta_{2m}^* \lambda_{2m} .$$

Наконец, $\theta_1^* \pi_{\lambda_1}(A) + \ldots + \theta_{2m}^* \pi_{\lambda_{2m}}(A) - u^{-1}\pi_\beta(A) =$

$$= g_{2m}(\overline{\theta}^*, \overline{\lambda}),$$

где $\overline{\theta}^* = (\theta_1^*, \ldots, \theta_{2m}^*)$, $\overline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{2m})$.

Таким образом,

$$\pi_\beta(A) = \sum_{j=1}^{2m} \theta_j \pi_{\lambda_j}(A) - u g_{2m}(\overline{\theta}^*, \overline{\lambda}).$$

$\theta_j$ зависят от выбора базиса и от вектора $\beta$, но не от $A$.

п.5. Положим $M = EA$ и рассмотрим функцию $h(\alpha) = E\pi_\alpha(A)$. Для всякого $\alpha$

$$h(\alpha) = \pi_\alpha(M).$$

Имеет место представление

$$\pi_\beta(A) = h(\beta) + s(\beta),$$

где $s$ - случайная функция со свойством $Es(\beta) = 0$.

Далее,

$$h(\beta) + s(\beta) = \sum_{j=1}^{2m} \theta_j(\beta) \pi_{\lambda_j}(A) - u(\beta) g_{2m}(\overline{\theta}^*(\beta), \overline{\lambda}).$$

Вычисляя математическое ожидание от левой и правой частей, получим:

$$h(\beta) = \sum_{j=1}^{2m} \theta_j(\beta) h(\lambda_j) - u(\beta) g_{2m}(\overline{\theta}^*(\beta), \overline{\lambda}).$$

Отсюда

$$u(\beta) g_{2m}(\overline{\theta}^*, \overline{\lambda}) = \sum_{j=1}^{2m} \theta_j(\beta) h(\lambda_j) - h(\beta).$$

Таким образом, $g_{2m}$ зависит только от среднего, т.е.от $M$.

п.6. Из п.5 следует, что

$$s(\beta)=\sum_{j=1}^{2m}\theta_j(\beta)(h(\lambda_j)+s(\lambda_j))-\sum_{j=1}^{2m}\theta_j(\beta)h(\lambda_j)+h(\beta)-h(\beta)=$$

$$=\sum_{j=1}^{2m}\theta_j(\beta)s(\lambda_j).$$

Таким образом,

$$s(\beta)=\sum_{j=1}^{2m}\theta_j(\beta)s(\lambda_j).$$

п.7. Очевидно, $\pi_\beta(A)+\pi_{-\beta}(A)=g_2(\overline{\theta}_1^*,\overline{\beta}.)$ , где $\overline{\theta}_1=$ $=(1,1)$ (и, следовательно $\overline{\theta}_1^*=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$), $\overline{\beta}=(\beta,-\beta)$. Значит,

$$\pi_{\lambda_j}(A)+\pi_{-\lambda_j}(A)=g_2(\overline{\theta}_1^*,\overline{\lambda}_j),$$

причем $\overline{\lambda}_j=(\lambda_j,-\lambda_j)$.

Так как $\pi_{\lambda_j}(A)=h(\lambda_j)+s(\lambda_j)$ и $\pi_{-\lambda_j}(A)=h(-\lambda_j)+$ $+s(-\lambda_j)$ , то

$$h(\lambda_j)+h(-\lambda_j)+s(\lambda_j)+s(-\lambda_j)=g_2(\overline{\theta}_1^*,\overline{\lambda}_j).$$

Приравниваем математические ожидания левой и правой частей:

$$h(\lambda_j)+h(-\lambda_j)=g_2(\overline{\theta}_1^*,\overline{\lambda}_j).$$

Отсюда $s(-\lambda_j)=-s(\lambda_j)$ . Далее,

$$\theta_j(\beta)s(\lambda_j)+\theta_{j+m}(\beta)s(\lambda_{j+m})=$$
$$=(\beta\lambda_j)^+s(\lambda_j)+(\beta\lambda_{j+m})^+s(\lambda_{j+m})=(\beta\lambda_j)^+s(\lambda_j)+$$
$$+(-\beta\lambda_j)^+s(-\lambda_j)=(\beta\lambda_j)^+s(\lambda_j)-(-\beta\lambda_j)^+s(\lambda_j)=$$
$$=s(\lambda_j)((\beta\lambda_j)^+-(-\beta\lambda_j)^+)=(\beta\lambda_j)s(\lambda_j).$$

$s(\beta)$ можно записать в виде:

$$s(\beta) = \sum_{j=1}^{m} (\theta_j(\beta) s(\lambda_j) + \theta_{j+m}(\beta) s(\lambda_{j+m})),$$

поэтому $s(\beta) = \sum_{j=1}^{m} (\beta \lambda_j) s(\lambda_j) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j s(\lambda_j) = \beta \cdot \xi$, где

$\beta_j = (\beta \lambda_j)$ – координата $\beta$ в базисе $(\gamma_1, \ldots, \gamma_m) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$; $\xi$ – точка с координатами $(s(\lambda_1), \ldots, s(\lambda_m))$.

Но $\beta \xi = \pi_\beta(\{\xi\})$, откуда получаем:

$$\pi_\beta(A) = \pi_\beta(M) + \pi_\beta(\{\xi\}).$$

Это означает, что $A = M + \{\xi\}$, $\xi \in R^m$. Так как $\pi_\beta(A)$ – гауссова случайная функция, а $\pi_\beta(M)$ – обычная функция (детерминированная), то $\pi_\beta(\{\xi\})$ – гауссова функция, откуда вектор

$$(\pi_{\lambda_1}(\{\xi\}), \ldots, \pi_{\lambda_m}(\{\xi\}))$$

является гауссовым. Но $\pi_{\lambda_j}(\{\xi\}) = \lambda_j \xi$, поэтому

$$(\pi_{\lambda_1}(\{\xi\}), \ldots, \pi_{\lambda_m}(\{\xi\})) = \xi .$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. $E\xi = 0$, $M = EA$. Очевидно, что можно было выбрать $M$ иначе, а именно, в виде $M = EA + \{x\}$, тогда в представлении, о котором идет речь в теореме, $E\xi = -x$.

Интересен смысл теоремы I с точки зрения предельных теорем, рассмотренных в [I]. Если выполнены условия указанных предельных теорем и существует предельное распределение, то оно является гауссовым. Но по теореме I последнее представляет собой результат случайного сдвига некоторого постоянного множества. Таким образом, происходит вырождение формы нормированной суммы независимых случайных множеств и с ростом числа слагаемых случайность суммы становится все больше связанной с положением ее в пространстве, а не с формой.

Статистические последствия теоремы I мы обсудим позднее.

Займемся теперь статистическими задачами теории случайных множеств. Специфической особенностью по сравнению с классической статистикой здесь является то обстоятельство, что конечное число измерений, как правило, не характеризует полностью рассматриваемую реализацию.

Пока что ограничимся выпуклыми компактными случайными множествами и рассмотрим семейство функционалов $\{f_\alpha \mid \alpha \in Q\}$, $f_\alpha : \mathcal{C}_m \to R$. В прикладных схемах каждому функционалу соответствует измерение некоторой характеристики множества. Два множества $A$, $B \in \mathcal{C}_m$ естественно считать физически различимыми, если их отличие проявляется в некоторых измерениях.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $A$, $B \in \mathcal{C}_m$. Элементы $A, B$ (пространства $\mathcal{C}_m$) называются неразличимыми относительно множества индексов $I \subset Q$ (относительно семейства функционалов $\{f_\alpha \mid \alpha \in I\}$), если

$$\forall \alpha \in I \, (f_\alpha(A) = f_\alpha(B)).$$

Будем использовать обозначение $A \underset{I}{\sim} B$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидно, отношение $\underset{I}{\sim}$ является отношением эквивалентности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Семейство функционалов $\{f_\alpha \mid \alpha \in B\}$, $B \subset Q$, называется полным, если отношение $\underset{B}{\sim}$ является равенством, т.е.

$$\forall \alpha \in B \, (f_\alpha(A) = f_\alpha(L)) \Longrightarrow A = L.$$

Иногда мы будем говорить о полноте семейства индексов $B$ вместо того, чтобы говорить о полноте семейства функционалов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Функционал $f$ называется монотонным, если

$$A \subset B \Longrightarrow f(A) \leqslant f(B).$$

Измерения несут в себе некоторую информацию об измеряемом объекте. Нас будет интересовать положение и форма множества, в частности, - возможность локализовать множество с помощью измерений. Будем говорить, что $A$ локализует $L$, если $A \supset L$. Что можно сказать с точки зрения локализации об измеряемом множестве, если известно, что $f(A) = a$? Очевидно, самое большее, что

$$A \subset \bigcup_{f(L)=a} L.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Множество $\mathcal{T}_\alpha(a) = \bigcup_{f_\alpha(L)=a} L$ называется областью локализации функционала $f_\alpha$, соответствующей значению $a$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Функционал $f_\alpha$ называется регулярно (монотонно) локализующим, если

$$a \leq b \Longleftrightarrow \mathcal{T}_\alpha(a) \subset \mathcal{T}_\alpha(b).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Функционал $f_\alpha$ называется выпуклым, если для всякого $A \in \mathcal{C}_m$

$$conv(\mathcal{T}_\alpha(f_\alpha(A))) = \mathcal{T}_\alpha(f_\alpha(A)).$$

(Здесь $conv\ M$ – выпуклая оболочка множества $M$. Таким образом, выпуклость функционала – это выпуклость его областей локализации).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Функционал $f_\alpha$ называется замкнутым, если $\mathcal{T}_\alpha(a)$ замкнуты.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Функционал $f_\alpha$ называется несмещенным, если из условий $f_\alpha(K) \geq a$, $K \cap \mathcal{T}_\alpha(a) \neq \emptyset$ следуют

$K \cap \mathcal{T}_\alpha(a) \in \mathcal{C}_m$ и $f_\alpha(K \cap \mathcal{T}_\alpha(a)) = a$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие $K \cap \mathcal{T}_\alpha(a) \in \mathcal{C}_m$ заведомо выполняется, если $f_\alpha$ – выпуклый замкнутый функционал.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Для любых $A, B \in \mathcal{C}_m$ положим

$$max(A, B) = conv(A \cup B).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Функционал $f$ называется сильно монотонным, если $f_\alpha(max(A,B)) = max(f_\alpha(A), f_\alpha(B))$.

ЛЕММА 1. Из сильной монотонности следует монотонность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A \subset B$. Тогда $max(A,B) = conv(A \cup B) = conv\, B = B$, так как $B \in \mathcal{C}_m$. Поэтому

$$f_\alpha(B) = f_\alpha(max(A,B)) = max(f_\alpha(A), f_\alpha(B)) \geq f_\alpha(A).$$

Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Функционал называется регулярным, если он несмещен, сильно монотонен, выпукл и замкнут.

ЛЕММА 2. Регулярный функционал является регулярно локализующим. Точнее: если функционал $f_\alpha$ сильно монотонен, то

$$a \leq b \Longrightarrow \mathcal{T}_\alpha(a) \subset \mathcal{T}_\alpha(b);$$

если $f_\alpha$ регулярен, то

$$\mathcal{T}_\alpha(a) \subset \mathcal{T}_\alpha(b) \Longrightarrow a \leqslant b.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f_\alpha$ сильно монотонен и $a \leqslant b$. Если $x \in \mathcal{T}_\alpha(a)$, то $x \in M \in f_\alpha^{-1}(a)$. Рассмотрим $K \in f_\alpha^{-1}(b)$. Из-за сильной монотонности $f_\alpha$ имеет место соотношение $C = max\,(M, K) \in f_\alpha^{-1}(b)$. Кроме того, $C \supset M \ni x$. Значит, $x \in C \subset \mathcal{T}_\alpha(b)$. Таким образом, $\mathcal{T}_\alpha(a) \subset \mathcal{T}_\alpha(b)$.

Пусть теперь $f_\alpha$ регулярен и $\mathcal{T}_\alpha(a) \subset \mathcal{T}_\alpha(b)$. Рассмотрим

$$A \in f_\alpha^{-1}(a), \quad B \in f_\alpha^{-1}(b).$$

Если $K = max(A, B)$, то $K \supset A$, $K \supset B$. Из-за регулярности

$$f_\alpha(K) = max\,(a, b),$$

значит, $f_\alpha(K) \geqslant a$, $f_\alpha(K) \geqslant b$. По условию $K \cap \mathcal{T}_\alpha(a) \subset \subset K \cap \mathcal{T}_\alpha(b)$. В силу регулярности функционал $f_\alpha$ сильно монотонен и, значит, по лемме I монотонен, откуда

$$f_\alpha(K \cap \mathcal{T}_\alpha(a)) \leqslant f_\alpha(K \cap \mathcal{T}_\alpha(b)).$$

В силу несмешенности левая часть равна $a$, а правая – равна $b$, т.е. $a \leqslant b$. Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I3. Через $T_I(A)$ обозначим $\bigcap\limits_{\alpha \in I} \mathcal{T}_\alpha(f_\alpha(A))$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если для всех $\alpha \in I$ функционалы $f_\alpha$ выпуклы и замкнуты, то $T_I(A)$ – выпуклое замкнутое множество.

ЛЕММА 3. Если $L \underset{I}{\sim} A$, то $L \subset T_I(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $L \underset{I}{\sim} A$, то $f_\alpha(L) = f_\alpha(A)$ для всех $\alpha \in I$. Значит, $L \subset \mathcal{T}_\alpha(f_\alpha(A))$, а следовательно, $L \subset T_I(A)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I4. Функционал $f$ называется слабо регулярным, если он несмещен, монотонен, выпукл и замкнут.

ЗАМЕЧАНИЕ. В силу леммы I из регулярности следует слабая регулярность.

ЛЕММА 4. Пусть для всех $\alpha \in I$ функционалы $f_\alpha$ выпуклы. Если $T_I(A)$ – компакт, $\alpha \in I$ и $f_\alpha$ слабо регулярен, то

$$f_\alpha(T_I(A)) = f_\alpha(A).$$

Если слабая регулярность имеет место для всех $\alpha \in I$, то

$$T_I(A) \underset{I}{\sim} A.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $f_\alpha$ – выпуклые функционалы, то $T_I(A) \in \mathcal{E}_m$. По лемме 3 $A \subset T_I(A)$. В силу монотонности $f_\alpha(A) \leqslant f_\alpha(T_I(A))$. Рассмотрим $B \in \mathcal{E}_m$, $B \supset T_I(A)$. Тогда

$$f_\alpha(T_I(A)) = f_\alpha(B \cap (\bigcap_{\beta \in I} \mathcal{T}_\beta(f_\beta(A)))) \leqslant f_\alpha(B \cap \mathcal{T}_\alpha(f_\alpha(A))),$$

так как $f_\alpha$ монотонен и $B \cap \mathcal{T}_\alpha(f_\alpha(A)) \in \mathcal{E}_m$ (использованы выпуклость и замкнутость $f_\alpha$). В силу несмещенности $f_\alpha$ и соотношения

$$f_\alpha(B) \geqslant f_\alpha(T_I(A)) \geqslant f_\alpha(A)$$

имеет место равенство

$$f_\alpha(B \cap \mathcal{T}_\alpha(f_\alpha(A))) = f_\alpha(A).$$

Первая часть леммы доказана. Вторая очевидным образом следует из первой.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $T_I(A)$ – компакт и для всякого $\alpha \in I$ функционал $f_\alpha$ слабо регулярен, то $T_I(A) = \bigcup_{L \underset{I}{\sim} A} L$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I5. Отображение $H_I$ из $\mathcal{E}_m$ в $\mathcal{E}_m$ называется оператором оценивания по $I$, если его значения определяются лишь измерениями из $I$, т.е. $L \underset{I}{\sim} A \Rightarrow H_I(L) = H_I(A)$. Множество $H_I(A)$ называется оценкой $A$ по $I$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I6. Оценка $H_I(A)$ называется интерполяционной, если $H_I(A) \underset{I}{\sim} A$ (интерполяционное условие). Оператор оценивания называется интерполяционным, если все его значения являются интерполяционными оценками.

ЗАМЕЧАНИЕ. Построение интерполяционной оценки – это построение множества, которое "совпадает" с $A$ в отношении измерений $f_\alpha$, $\alpha \in I$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I7. Индекс $\beta \in Q$ называется примитивным для

$H_I$ , если

$$\forall A \in \mathcal{E}_m (\mathcal{T}_\beta(f_\beta(A)) \subset \mathcal{T}_\beta(f_\beta(H_I(A)))),$$

т.е. если измерение $f_\beta$ хуже локализует $H_I(A)$ , чем $A$ . Множество примитивных индексов обозначим $\mathcal{P}(H_I)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I8. Оператор $H_I$ называется простым, если семейство $\{f_\beta \mid \beta \in \mathcal{P}(H_I)\}$ полно.

Наша задача на данном этапе заключается в изучении свойств простых интерполяционных операторов и соответствующих оценок.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\{f_\beta \mid \beta \in Q\}$ - полное семейство регулярных функционалов. Для того, чтобы существовал простой интерполяционный оператор, $H_I$ , необходимо и достаточно, чтобы для всякого $A \in \mathcal{E}_m$ множество $T_I(A)$ было компактом. При этом $H_I(A) = T_I(A)$ , т.е. $T_I$ - единственный простой интерполяционный оператор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $T_I(A)$ - компакт. Тогда по лемме 4

$$T_I(A) \underset{I}{\sim} A.$$

Докажем простоту $T_I$ . Если $\beta \in Q$ , то в силу включения $A \subset T_I(A)$ и монотонности $f_\beta$ имеет место неравенство

$$f_\beta(A) \leqslant f_\beta(T_I(A)),$$

а поскольку $f_\beta$ сильно монотонен, то по лемме 2

$$\mathcal{T}_\beta(f_\beta(A)) \subset \mathcal{T}_\beta(f_\beta(T_I(A))),$$

и, значит, $\beta$ - примитивный индекс. $\mathcal{P}(T_I) = Q$ . В силу предположения о полноте исходного семейства функционалов $T_I$ - простой оператор. Таким образом, существует простой интерполяционный оператор.

Обратно. Пусть существует простой интерполяционный оператор $H_I$ . По определению I5 из $L \underset{I}{\sim} A$ следует $H_I(L) = H_I(A)$. В силу интерполяционного условия $H_I(A) \underset{I}{\sim} A$ и по лемме 3 $H_I(A) \subset T_I(A)$ . В силу простоты оператора оценивания множество индексов $\mathcal{P}(H_I)$ порождает полное семейство функционалов. Для любого $\beta \in \mathcal{P}(H_I)$

$$\mathcal{T}_\beta(f_\beta(A)) \subset \mathcal{T}_\beta(f_\beta(H_I(A))).$$

По п.2 правая часть – компакт, а следовательно, и левая – компакт. Учитывая слабую регулярность и полноту, по п.3 получаем включение

$$A \subset H_I(A).$$

5. По п.2 $T_{I_n}(A) \supset T_{I_{n+1}}(A)$. Очевидно, что $\lim_n T_{I_n}(A) = T_B(A)$. Правая часть в силу п.3 равна $A$, т.е. $\lim_n T_{I_n}(A) = A$. Теорема доказана.

Теперь в качестве основного семейства функционалов мы будем рассматривать семейство проекционных функционалов $\{\pi_\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{S}\}$.

ТЕОРЕМА 4. I. Если $\mathfrak{D}$ плотно в $\mathfrak{S}$, то семейство $\{\pi_\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{D}\}$ полно.

2. $\pi_\alpha$ регулярны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. Для любого компакта $K \subset R^m$ и $A \subset R^m$ условие

$$\forall \alpha \in \mathfrak{D}\ (\pi_\alpha(K) = \pi_\alpha(A))$$

влечет за собой равенство $conv(K) = conv(A)$. Если $K$ и $A \in \mathcal{E}_m$, то отсюда следует $K = A$.

2. $\mathcal{T}_\alpha(a)$ являются полупространствами, определяемыми неравенствами вида $\alpha x \leq a$. Отсюда следуют выпуклость и замкнутость $\pi_\alpha$. Пусть $K \in \mathcal{E}_m$, $\mathcal{T}_\alpha(a) \cap K \neq \emptyset$ и $\pi_\alpha(K) \geqslant a$. Тогда, очевидно,

$$\mathcal{T}_\alpha(a) \cap K \in \mathcal{E}_m.$$

Если $K \subset \mathcal{T}_\alpha(a)$, то $\pi_\alpha(K) = a$ и существует точка $x$, такая, что $x \in K$ и $\alpha x = a$. Отсюда $\pi_\alpha(\mathcal{T}_\alpha(a) \cap K) = a$. Если же $K \not\subset \mathcal{T}_\alpha(a)$, то $K \cap \mathcal{T}_\alpha^c(a) \neq \emptyset$. Точка $x \in K \cap \mathcal{T}_\alpha^c(a)$ обладает свойством $\alpha x > a$. В силу выпуклости $K$ существует $y \in K$ со свойством $\alpha y = a$ откуда $\pi_\alpha(\mathcal{T}_\alpha(a) \cap K) = a$. Таким образом, функционалы $\pi_\alpha$ являются несмещенными. Докажем сильную монотонность $\pi_\alpha$. Пусть $A, B \in \mathcal{E}_m$, $K = max(A, B)$. Тогда $\pi_\alpha(K) = \sup_{x \in K} \alpha x = \sup_{x \in A \cup B} \alpha x =$

$$= max(\sup_{x \in A} \alpha x, \sup_{x \in B} \alpha x) = max(\pi_\alpha(A), \pi_\alpha(B)).$$

Теорема доказана.

Предположим, что производятся независимые наблюдения над

Из регулярности вытекает, что $f_\beta(A) \leqslant f_\beta(H_I(A))$. Пусть $K \in \mathscr{C}_m$. Рассмотрим $T_I(A) \cap K$. Это элемент $\mathscr{C}_m$. Покажем, что для всякого $\alpha \in I$

$$f_\alpha(T_I(A) \cap K) \leqslant f_\alpha(A).$$

Действительно, если $f_\alpha(K) \leqslant f_\alpha(A)$, то в силу монотонности

$$f_\alpha(T_I(A) \cap K) \leqslant f_\alpha(K) \leqslant f_\alpha(A).$$

Если же $f_\alpha(K) > f_\alpha(A)$, то, используя несмещенность, получаем:

$$f_\alpha(T_I(A) \cap K) \leqslant f_\alpha(\mathcal{T}_\alpha(f_\alpha(A)) \cap K) = f_\alpha(A).$$

Если $K \supset A$, то в силу соотношения $A \subset T_I(A)$ получаем включение $T_I(A) \cap K \supset A$, откуда

$$f_\alpha(T_I(A) \cap K) = f_\alpha(A),$$

то есть $T_I(A) \cap K \underset{I}{\sim} A$. Это означает, что

$$H_I(T_I(A) \cap K) = H_I(A).$$

В силу простоты для любого $\beta \in \mathscr{B}(H_I)$

$$\mathcal{T}_\beta(f_\beta(T_I(A) \cap K)) \subset \mathcal{T}_\beta(f_\beta(H_I(A))).$$

Если $K \supset H_I(A)$, то поскольку $T_I(A) \supset H_I(A)$, то

$$T_I(A) \cap K \supset H_I(A)$$

и, кроме того,

$$f_\beta(T_I(A) \cap K) \geqslant f_\beta(H_I(A)),$$

откуда

$$\mathcal{T}_\beta(f_\beta(T_I(A) \cap K)) \supset \mathcal{T}_\beta(f_\beta(H_I(A))).$$

Мы видим, что для $K \supset max(A, H_I(A))$ и любого $\beta \in \mathscr{B}(H_I)$

$$\mathcal{T}_\beta(f_\beta(T_I(A) \cap K)) = \mathcal{T}_\beta(f_\beta(H_I(A))).$$

Так как $\mathfrak{P}(H_I)$ порождает полное семейство функционалов, то

$$T_I(A) \cap K = H_I(A).$$

Рассмотрим $K_n \in \mathcal{C}_m$, $K_n \supset max(A, H_I(A))$, $\bigcup_n K_n = R^m$. Очевидно, $\bigcup_n T_I(A) \cap K_n = T_I(A)$. С другой стороны,

$$\bigcup_n H_I(A) = H_I(A),$$

откуда $T_I(A) = H_I(A)$ и $T_I(A) \in \mathcal{C}_m$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. I. Интерполяционный оператор оценивания идемпотентен. 2. Если $J \supset I$, то $T_J(A) \subset T_I(A)$. При этом если $T_I(A)$ - компакт и для всякого $\alpha \in J$ функционал $f_\alpha$ замкнут, то $T_J(A)$ - компакт. 3. Пусть а) $\{f_\beta | \beta \in B\}$ полно, б) $I \subset B$, в) $T_I(A)$ - компакт, г) $f_\beta$ слабо регулярны. Тогда $T_B(A) = A$. 4. Пусть а) $H_I$ - простой оператор оценивания, б) существует $J \subset \mathfrak{P}(H_I)$, для которого $T_J(H_I(A))$ - компакт, в) функционалы $f_\beta$ слабо регулярны. Тогда $A \subset H_I(A)$. 5. Если а) $I_n \subset I_{n+1}$, б) $\lim_n I_n = B$, в) $\{f_\beta | \beta \in B\}$ - полное семейство слабо регулярных функционалов, г) $T_J(A)$ - компакт для некоторого $J \subset B$. Тогда $\lim_n T_{I_n}(A) = A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. Пусть $H_I$ - интерполяционный оператор оценивания. Тогда $H_I(A) \underset{I}{\sim} A$. По определению I5

$$H_I(H_I(A)) = H_I(A),$$

то есть $H_I \circ H_I = H_I$.

2. Второе утверждение теоремы очевидным образом следует из определения $T_I$.

3. Так как $T_I(A)$ - компакт, то по п.2 $T_B(A)$ - компакт. Из слабой регулярности по лемме 4 следует, что $T_B(A) \underset{B}{\sim} A$ а из полноты вытекает равенство $T_B(A) = A$.

4. Если $H_I$ - простой оператор, то $\mathfrak{P}(H_I)$ порождает полное семейство функционалов. По определению I7 для всякого $\beta \in \mathfrak{P}(H_I)$

$$\mathcal{T}_\beta(f_\beta(A)) \subset \mathcal{T}_\beta(f_\beta(H_I(A))).$$

Очевидно, что

$$T_{\mathfrak{P}(H_I)}(A) \subset T_{\mathfrak{P}(H_I)}(H_I(A)).$$

случайным выпуклым компактным множеством $A$ (т.е. имеется выборка $A_1, \ldots, A_n$ с независимыми компонентами) и нас интересует распределение некоторого функционала $f(A)$. Если мы в состоянии вычислить (или измерить) $f(A_j)$, то задача сводится к обычной числовой статистике. Если мы не в состоянии (как это обычно бывает) полностью описать фигуру $A_j$, а следовательно, и вычислить $f(A_j)$, то возникает вопрос о подходящей аппроксимации $A_j$ множествами, которые могут быть построены по известным наблюдениям и использование которых для вычисления $f(A_j)$ приводит к ошибкам, не выходящим за пределы заранее обусловленного уровня.

Из изложенной выше теории следует, что естественно рассмотреть аппроксимации вида $T_I(A)$. Для проекционных функционалов это многогранники, описанные около множества $A$. Теоремы 2 и 4 показывают, что такие многогранники являются единственными простыми интерполяционными оценками, соответствующими семейству проекционных функционалов.

Аппроксимации указанного вида в принципе могут быть использованы для вычисления функционалов, не являющихся проекционными. В связи с этим возникает вопрос о погрешности при вычислении различных функционалов, обусловленной заменой $A$ на $T_I(A)$. Оценками погрешностей мы теперь и займемся.

Пусть $0 < \varepsilon < 1$, $V_\varepsilon$ - подмножество $\mathfrak{S}$, являющееся для $\mathfrak{S}$ $\varepsilon$-сетью и содержащее ортонормированный базис пространства $R^m$. Положим $I_\varepsilon = V_\varepsilon \cup (-V_\varepsilon)$. Через $\hat{A}_\varepsilon$ обозначим множество $T_{I_\varepsilon}(A)$ (строго говоря, в обозначении нужно было бы отразить зависимость от $I_\varepsilon$, а не только от $\varepsilon$, однако в дальнейшем мы исследуем свойства, зависящие лишь от $\varepsilon$, но не от конкретного вида множества индексов $I_\varepsilon$). Очевидно, что $A \subset \hat{A}_\varepsilon$.

ЛЕММА 5. $p(A, \hat{A}_\varepsilon) \leq c_m \varepsilon \, diam\, A$;

$$p(A, \hat{A}_\varepsilon) \leq c_m \varepsilon \, diam\, \hat{A}_\varepsilon ;$$

где $c_m = \sqrt{3}\,(1+\sqrt{m})$.

Утверждение этой леммы с точностью до обозначений совпадает с утверждением теоремы 7 из работы [I], стр.II6.

Сформулируем теорему об оценках погрешностей при вычислении различных геометрических характеристик выпуклых компактов по $\hat{A}_\varepsilon$. Здесь важную роль будут играть функционалы Минковского, определение которых можно найти в [3], стр.II0. Отметим, что если $W_k$ -функционал Минковского размерности $k$ (в пространстве

$R^m$ ), то $W_0$ – объем ( $m$-мерная мера Лебега), $W_1(K) = \frac{1}{m} s(K)$ , где $s$ – площадь поверхности выпуклого компакта $K$, $W_2(K) = \frac{1}{m} M(K)$ , где $M$ – интеграл от средней кривизны (в предположении достаточной гладкости поверхности), $W_{m-1}(K) = \frac{b_m}{2} \bar{b}(K)$ , где $b_m$ – объем $m$-мерного единичного шара, $\bar{b}$ – средняя ширина множества.

<u>ТЕОРЕМА 5.</u> I. $0 \leq W_k(\hat{A}_\varepsilon) - W_k(A) \leq d_{k,m} (diam\, A)^{m-k} \varepsilon$,

где $d_{k,m}$ – постоянная, зависящая лишь от $k$ и $m$ .

2. $0 \leq mes\, \hat{A}_\varepsilon - mes\, A \leq 2m c_m (diam\, A)^m \varepsilon$.

3. $s(\hat{A}_\varepsilon) - s(A) \leq f_m (diam\, A)^{m-1} \varepsilon$,

где $f_m$ – постоянная, зависящая лишь от $m$, $f_m = d_{1,m}$ .

4. Пусть $\Gamma$ – линейное многообразие в $R^m$ , тогда

$$\rho(pr_\Gamma \hat{A}_\varepsilon, pr_\Gamma A) \leq c_m \varepsilon\, diam\, A .$$

5. $0 \leq mes\, pr_\Gamma \hat{A}_\varepsilon - mes\, pr_\Gamma A \leq 2s (diam\, A)^s c_m \varepsilon$,

где $s$ – размерность многообразия $\Gamma$ .

6. $0 \leq diam\, \hat{A}_\varepsilon - diam\, A \leq 2c_m \varepsilon\, diam\, \hat{A}_\varepsilon$;

$$(1 - 2c_m \varepsilon)\, diam\, \hat{A}_\varepsilon \leq diam\, A \leq diam\, \hat{A}_\varepsilon .$$

7. Пусть $B \in \mathcal{E}_m$, тогда

$$|p(A, B) - p(\hat{A}_\varepsilon, B)| \leq c_m \varepsilon\, diam\, A .$$

8. $0 \leq \|\hat{A}_\varepsilon\| - \|A\| \leq c_m \varepsilon\, diam\, A$ .

9. Если $S$ – единичный шар в $R^m$ , а $r > 0$ , то

$$0 \leq mes(\hat{A}_\varepsilon + rS) - mes(A + rS) \leq 2m c_m \varepsilon \sum_{i=0}^{m-1} C_{m-1}^i (diam\, A)^{i+1} (2r)^{m-i-1} .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. В силу монотонности функционалов Минковского, а также в силу включения $A \subset \hat{A}_\varepsilon$ имеет место неравенство

$$W_k(A) \leq W_k(\hat{A}_\varepsilon) .$$

Далее, пусть $Q$ – куб со стороной $diam\, A$ . Тогда, полагая $h$ равным правой части первого неравенства из леммы 5, получим:

$$W_k(\hat{A}_\varepsilon)-W_k(A)\leqslant M_k W_{k+1}(\hat{A}_\varepsilon)h\leqslant M_k W_{k+1}(Q)h=d_{k,m}(diam A)^{m-k}\varepsilon .$$

2,3. Непосредственно вытекает из п.I.

4. Нужное нам утверждение следует из леммы 5 с учетом неравенства

$$p(pr_\Gamma \hat{A}_\varepsilon, pr_\Gamma A)\leqslant p(\hat{A}_\varepsilon, A).$$

5. $0\leqslant mes\, pr_\Gamma \hat{A}_\varepsilon - mes\, pr_\Gamma A\leqslant 2s(diam A)^{s-1}h=2sc_m\varepsilon(diam A)^s.$

6. Очевидным образом следует из леммы 5.

7. Из неравенства треугольника для $p$ следует, что

$$|p(\hat{A}_\varepsilon, B)-p(A,B)|\leqslant p(\hat{A}_\varepsilon, A).$$

Отсюда с помощью леммы 5 получаем утверждение 7.

8. Учитывая монотонность функционала $\|\cdot\|$ и полагая в п.7 $B=\{0\}$, получаем утверждение 8.

9. Для метрики $\rho$ справедливо "неравенство четырехугольника":

$$\rho(A+B, C+D)\leqslant\rho(A,C)+\rho(B,D).$$

С его помощью получаем:

$$\rho(A+rS, \hat{A}_\varepsilon+rS)\leqslant\rho(A,\hat{A}_\varepsilon)\leqslant c_m\varepsilon\, diam\, A=h.$$

Отсюда

$$0\leqslant mes(\hat{A}_\varepsilon+rS)-mes(A+rS)\leqslant S(\hat{A}_\varepsilon+rS)h\leqslant S(Q)h,$$

где $Q$ – куб со стороной $(diam A+2r)$. Очевидно,

$$S(Q)=2m(diam A+2r)^{m-1}.$$

Подставляя указанное значение $S(Q)$ в предыдущее неравенство и применяя формулу бинома Ньютона, получаем утверждение 9.

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Большинство оценок теоремы 5 содержит в правой части величину $diam A$. Так как $A\subset\hat{A}_\varepsilon$, то $diam A\leqslant$

$\leq diam\, \hat{A}_\varepsilon$. Поэтому во всех таких оценках $diam\, A$ можно заменить на $diam\, \hat{A}_\varepsilon$. Во многих случаях это целесообразно, так как множество $\hat{A}_\varepsilon$ известно и его диаметр может быть вычислен, чего нельзя сказать об исходном множестве $A$. Впрочем, в некоторых приложениях заведомо известна константа, ограничивающая $diam\, A$. В таких случаях $diam\, A$ можно заменить этой константой.

Теорему 5 можно использовать для оценки погрешностей в вычислении математического ожидания функционалов от $A$, возникающих при использовании аппроксимаций $\hat{A}_\varepsilon$.

ТЕОРЕМА 6. Обозначим $\mu_n = E(diam A)^n$, $\nu_{n,\varepsilon} = E(diam\, \hat{A}_\varepsilon)^n$. Тогда I. $0 \leq Ep(A, \hat{A}_\varepsilon) \leq c_m \varepsilon \mu_1$.

2. $0 \leq EW_k(\hat{A}_\varepsilon) - EW_k(A) \leq d_{k,m} \varepsilon \mu_{m-k}$.

3. $0 \leq E mes\, \hat{A}_\varepsilon - E mes\, A \leq 2m c_m \varepsilon \mu_m$.

4. $0 \leq ES(\hat{A}_\varepsilon) - ES(A) \leq f_m \varepsilon \mu_{m-1}$.

5. $0 \leq Ep(pr_\Gamma A, pr_\Gamma \hat{A}_\varepsilon) \leq c_m \varepsilon \mu_1$.

6. $0 \leq E mes\, pr_\Gamma \hat{A}_\varepsilon - E mes\, pr_\Gamma A \leq 2s\, c_m \varepsilon \mu_s$,

где $s = dim\, \Gamma$.

7. $0 \leq \nu_{1,\varepsilon} - \mu_1 \leq 2c_m \varepsilon \nu_{1,\varepsilon}$.

8. $(1 - 2c_m \varepsilon)\nu_{1,\varepsilon} \leq \mu_1 \leq \nu_{1,\varepsilon}$.

9. $E|\rho(A,B) - \rho(\hat{A}_\varepsilon, B)| \leq c_m \varepsilon \mu_1$.

10. $E|\,\|A\| - \|\hat{A}_\varepsilon\|\,| \leq c_m \varepsilon \mu_1$.

11. $$0 \leq E(mes(\hat{A}_\varepsilon + rS)) - E(mes(A + rS)) \leq$$
$$\leq 2m c_m \varepsilon \sum_{i=0}^{m-1} C_{m-1}^{i} (2r)^{m-i-1} \mu_{i+1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что из оценки вида $|f(\hat{A}_\varepsilon) - f(A)| \leq \xi$ следует оценка $|Ef(\hat{A}_\varepsilon) - Ef(A)| \leq E\xi$, а из оценки вида $0 \leq f(\hat{A}_\varepsilon) - f(A) \leq \xi$ – оценка вида $0 \leq Ef(\hat{A}_\varepsilon) - Ef(A) \leq E\xi$. Учитывая это обстоятельство и используя утверждения теоремы 5, получаем неравенства I – II.

ЗАМЕЧАНИЕ. Оценки, содержащие в правых частях величины $\mu_n$, можно заменить оценками, содержащими $\nu_{n,\varepsilon}$, с помощью п.8 теоремы 6.

ТЕОРЕМА 7.

1. $|\mathbb{D}W_k(\hat{A}_\varepsilon)-\mathbb{D}W_k(A)|\leqslant 2d_{k,m}\varepsilon(\mu_{2(m-k)}EW_k^2(\hat{A}_\varepsilon))^{1/2}$.

2. $|\mathbb{D}\,mes\,\hat{A}_\varepsilon-\mathbb{D}\,mes\,A|\leqslant 4mc_m\varepsilon(\mu_{2m}E\,mes^2\hat{A}_\varepsilon)^{1/2}$.

3. $|\mathbb{D}S(\hat{A}_\varepsilon)-\mathbb{D}S(A)|\leqslant 2f_m\varepsilon(\mu_{2m-2}ES^2(\hat{A}_\varepsilon))^{1/2}$.

4. $|\mathbb{D}\,mes\,pr_\Gamma\hat{A}_\varepsilon-\mathbb{D}\,mes\,pr_\Gamma A|\leqslant 4sc_m\varepsilon(\mu_{2s}E\,mes^2pr_\Gamma\hat{A}_\varepsilon)^{1/2}$.

5. $|\mathbb{D}\,diam\,\hat{A}_\varepsilon-\mathbb{D}\,diam\,A|\leqslant 4\varepsilon c_m(\mu_2\nu_{2,\varepsilon})^{1/2}\leqslant 4c_m\varepsilon\nu_{2,\varepsilon}$.

6. $|\mathbb{D}\|\hat{A}_\varepsilon\|-\mathbb{D}\|A\||\leqslant 2c_m\varepsilon(\mu_2E\|\hat{A}_\varepsilon\|^2)^{1/2}$.

7. $|\mathbb{D}\,mes(\hat{A}_\varepsilon+rS)-\mathbb{D}\,mes(A+rS)|\leqslant 4m\varepsilon c_m(E\,mes^2(\hat{A}_\varepsilon+rS)\times$
$$\times\sum_{i=0}^{2m-2}C_{2m-2}^i\,\mu_{i+2}(2r)^{2m-2-i}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f$ – положительный монотонный функционал на $\mathcal{E}_m$ и $|f(\hat{A}_\varepsilon)-f(A)|\leqslant\xi$, тогда

$$|Ef^2(\hat{A}_\varepsilon)-Ef^2(A)|\leqslant E|f^2(\hat{A}_\varepsilon)-f^2(A)|\leqslant$$
$$\leqslant E|f(\hat{A}_\varepsilon)-f(A)|\cdot|f(\hat{A}_\varepsilon)+f(A)|\leqslant$$
$$\leqslant 2E\xi|f(\hat{A}_\varepsilon)|\leqslant 2(E\xi^2\cdot Ef^2(\hat{A}_\varepsilon))^{1/2}.$$

Далее,

$$\mathbb{D}f(\hat{A}_\varepsilon)-\mathbb{D}f(A)=$$
$$=Ef^2(\hat{A}_\varepsilon)-E^2f(\hat{A}_\varepsilon)-Ef^2(A)+E^2f(A)=$$
$$=(Ef^2(\hat{A}_\varepsilon)-Ef^2(A))-(E^2f(\hat{A}_\varepsilon)-E^2f(A))\leqslant$$
$$\leqslant Ef^2(\hat{A}_\varepsilon)-Ef^2(A)\leqslant 2(E\xi^2\cdot Ef^2(\hat{A}_\varepsilon))^{1/2}.$$

С другой стороны,

$$\mathbb{D}f(A)-\mathbb{D}f(\hat{A}_\varepsilon)\leqslant E^2f(\hat{A}_\varepsilon)-E^2f(A)=$$
$$=E(f(\hat{A}_\varepsilon)-f(A))\cdot E(f(\hat{A}_\varepsilon)+f(A))\leqslant$$

$$\leqslant 2E\xi\cdot Ef(\hat{A}_\varepsilon)\leqslant 2(E\xi^2\cdot Ef^2(\hat{A}_\varepsilon))^{1/2}.$$

Отсюда $|Df(\hat{A}_\varepsilon)-Df(A)|\leqslant 2(E\xi^2\cdot Ef^2(\hat{A}_\varepsilon))^{1/2}$.

Поскольку все функционалы, рассматриваемые в формулировке теоремы, являются монотонными и положительными, то из полученной оценки и теоремы 5 вытекают неравенства I – 7. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогичным образом можно получать оценки ошибок, возникающих при вычислении других моментов. Интересной особенностью аппроксимации $\hat{A}_\varepsilon$ является возможность получения такой информации о множестве $A$, как например, параметры распределения интеграла от средней кривизны и т.п., то есть информации о характеристиках, связанных с гладкостью поверхности $A$ в то время, как сама аппроксимация представляет собой многогранник и имеет заведомо не гладкую поверхность. Указанная возможность основана на использовании свойств функционалов Минковского.

Используя оценки ошибок, можно вычислять поправки к доверительным интервалам для параметров распределений функционалов от $A$. Например, если известна оценка вида $|Ef(\hat{A}_\varepsilon)-Ef(A)|\leqslant\eta$ можно с помощью выборки $A_1,\dots,A_n$ построить доверительный интервал для $Ef(\hat{A}_\varepsilon)$, используя величины $f(\hat{A}_{j,\varepsilon})$, $j=1,\dots,n$, затем построить доверительный интервал для $\eta$, также зависящей от распределения $\hat{A}_\varepsilon$, и, наконец, с помощью построенных интервалов получить доверительный интервал для $Ef(A)$. При этом, разумеется, необходимы некоторые сведения о распределении $\hat{A}_\varepsilon$.

Оценки теоремы 5 показывают, что при $\varepsilon\to 0$ с вероятностью единица $\hat{A}_\varepsilon\to A$, а для функционалов из теоремы 5 $f(\hat{A}_\varepsilon)\to f(A)$.

С точки зрения случайных функций на сфере построение $\hat{A}_\varepsilon$ (эквивалентное построению $\pi_\alpha(\hat{A}_\varepsilon)$) представляет собой интерполяцию случайной функции $\pi_\alpha(A)$ по ее значениям в точках $\alpha\in I_\varepsilon$. Можно поставить вопрос об интерполяции в стиле, более близком к классическим рассмотрениям: пусть $I$ – конечное подмножество $\mathfrak{S}$; построить случайное множество $A_I^*$, удовлетворяющее условиям:

(I) $EA_I^*=EA$,

(2) $A_I^*$ измеримо относительно $\sigma$-алгебры, порожденной семейством случайных величин $\{\pi_\alpha(A)\mid\alpha\in I\}$,

(3) для любого случайного выпуклого компакта с конечным вторым моментом, удовлетворяющего условиям (I) и (2), имеет место неравенство

$$E\nu^2(A_I^*, A) \leqslant E\nu^2(C, A).$$

Сформулированная задача, очевидно, является аналогом классической задачи о наилучших приближениях в среднем квадратическом.

<u>ТЕОРЕМА 8.</u> Если $E\|A\|^2 < \infty$, то существует оценка вида $A_I^*$. В качестве такой оценки можно взять

$$A_I^* = \bigcap_{\alpha \in \mathfrak{S}} \mathcal{T}_\alpha(E(\pi_\alpha(A) \mid \xi)),$$

где $\xi = (\pi_{\alpha_1}(A), \ldots, \pi_{\alpha_n}(A))$, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} = I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что множество

$$B = \bigcap_{\alpha \in \mathfrak{S}} \mathcal{T}_\alpha(E(\pi_\alpha(A) \mid \xi))$$

удовлетворяет условиям (I),(2),(3). Действительно,

$$E\pi_\alpha^2(A) \leqslant E \sup_{\alpha \in \mathfrak{S}} \pi_\alpha^2(A) =$$

$$= E(\sup_{\alpha \in \mathfrak{S}} \pi_\alpha(A))^2 = E\|A\|^2 < \infty.$$

Существует $E(\pi_\alpha(A) \mid \xi) = \eta(\alpha)$. Из свойств условного математического ожидания вытекает, что $E\eta(\alpha) = E\pi_\alpha(A)$, при каждом $\alpha$ $\eta(\alpha)$ - случайная величина, измеримая относительно $\xi$, для любого $\alpha$ и для любой случайной величины $\zeta$, имеющей второй конечный момент и удовлетворяющей первым двум условиям,

$$E(\pi_\alpha(A) - \eta(\alpha))^2 \leqslant E(\pi_\alpha(A) - \zeta)^2.$$

Рассмотрим функции

$$\overline{\eta}(\alpha) = \begin{cases} 0, & \alpha = 0; \\ \|\alpha\| \cdot \eta(\alpha/\|\alpha\|), & \alpha \neq 0; \end{cases}$$

$$\overline{\pi}_\alpha(A) = \begin{cases} 0, & \alpha = 0; \\ \|\alpha\| \cdot \pi_{\alpha/\|\alpha\|}(A), & \alpha \neq 0; \end{cases}$$

определенные для всех $\alpha \in R^m$. Так как $\overline{\pi}_\alpha(A)$ выпукла, то $\overline{\eta}(\alpha)$ также выпукла, а это означает, что $\eta(\alpha) = \pi_\alpha(B)$.

Так как $E\pi_\alpha(B) = E\nu(\alpha) = E\pi_\alpha(A)$, то $EB = EA$. По построению $B$ измеримо относительно $\xi$. Для любого $C$, о котором идет речь в условии (3), имеет место неравенство

$$E(\pi_\alpha(B)-\pi_\alpha(A))^2 \leqslant E(\pi_\alpha(C)-\pi_\alpha(A))^2 .$$

Пусть $f(\alpha) = (\pi_\alpha(B)-\pi_\alpha(A))^2$, $g(\alpha) = (\pi_\alpha(C)-\pi_\alpha(A))^2$. Для всякого $\alpha \in \mathfrak{S}$

$$\int_{\Omega} f(\alpha)\, dP \leqslant \int_{\Omega} g(\alpha)\, dP .$$

Рассмотрим измеримое разбиение $\mathfrak{S} = S_1^{(n)} \cup \ldots \cup S_n^{(n)}$, пусть $\alpha_i^{(n)} \in S_i^{(n)}$ и при $n \to \infty$ имеет место соотношение

$$\max_{i=1}^{n} \operatorname{diam} S_i^{(n)} \to 0 .$$

Тогда

$$E\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i^{(n)})\, mes\, S_i^{(n)} \leqslant E\sum_{i=1}^{n} g(\alpha_i^{(n)})\, mes\, S_i^{(n)}$$

и в силу непрерывности $f$ и $g$ на $\mathfrak{S}$ при $n \to \infty$ левая часть последнего неравенства стремится к интегралу

$$\int_{\mathfrak{S}} f(\alpha)\, d\alpha ,$$

а правая - к интегралу

$$\int_{\mathfrak{S}} g(\alpha)\, d\alpha .$$

Поскольку

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i^{(n)})\, mes\, S_i^{(n)} \leqslant \sup_{\alpha \in \mathfrak{S}} f(\alpha) \cdot mes\, \mathfrak{S}$$

и аналогичная оценка справедлива для $g$, с помощью теоремы Лебега получаем неравенство

$$E\int_{\mathfrak{S}} f(\alpha)\, d\alpha \leqslant E\int_{\mathfrak{S}} g(\alpha)\, d\alpha ,$$

то есть $E\nu^2(B,A) \leq E\nu^2(C,A)$ . Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. I. Множество $A_I^*$ из теоремы 8 естественно назвать условным математическим ожиданием $A$ при условии $\xi$ . Удобно ввести обозначение $A_I^* = E(A|\xi)$.

2. Ясно, что для $\alpha \in I$

$$\pi_\alpha(A_I^*) = \pi_\alpha(A),$$

то есть $A_I^*$ удовлетворяет интерполяционному условию. Если $I_1, I_2 \ldots$ - расширяющаяся последовательность конечных подмножеств $\mathfrak{S}$ , причем $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ всюду плотно в $\mathfrak{S}$ , то $A_{I_n}^* \longrightarrow A$ почти наверное. Это немедленно следует из того факта, что $\pi_\alpha(A_{I_n}^*)$ и $\pi_\alpha(A)$ удовлетворяют условию Липшица с одной и той же константой (см. [I] ).

3. Вычисление условных ожиданий, как известно, особенно просто в случае, если $\pi_\alpha(A)$ - гауссова случайная функция. Однако мы знаем, что этот случай с точки зрения теории случайных подмножеств $R^m$ неинтересен (см. теорему I). С другой стороны, существуют нетривиальные распределения, являющиеся преобразованиями гауссовских, например, распределение, обладающее свойством:

$$(\ln \pi_{\alpha_1}(A), \ldots, \ln \pi_{\alpha_n}(A)) \text{ - гауссовский вектор.} \qquad (I)$$

В подобных случаях нетрудно вычислить условное ожидание. Так, при выполнении условия (I), полагая $I = \{\beta\}$ , получим:

$$\pi_\alpha(A_I^*) = \exp\Big(E\ln\pi_\alpha(A) - \frac{\rho(\alpha,\beta)\sqrt{D\ln\pi_\alpha(A)}}{\sqrt{D\ln\pi_\beta(A)}} E\ln\pi_\beta(A) +$$

$$+ \frac{1}{2} D\ln\pi_\alpha(A)(1-\rho^2(\alpha,\beta))\Big)\cdot(\pi_\beta(A))^{\rho(\alpha,\beta)\sqrt{\frac{D\ln\pi_\alpha(A)}{D\ln\pi_\beta(A)}}},$$

где $\rho(\alpha,\beta)$ - коэффициент корреляции $\pi_\alpha(A)$ и $\pi_\beta(A)$.

Литература


I. Л я ш е н к о Н.Н. О предельных теоремах для сумм независимых компактных случайных подмножеств евклидова пространства. - Зап.науч.семин.ЛОМИ, I979, т.85, с.II3-I28.

2. Р о к а ф е л л а р Р.Т. Выпуклый анализ. "Мир", М., I973.

3. М а т е р о н Ж. Случайные множества и интегральная геометрия. "Мир", М., I978.