Математические заметки

Том 103 выпуск 3 март 2018

УДК 515.127.12

О размерности прообразов некоторых паракомпактных пространств

И. М. Лейбо

В данной работе доказывается, что для нормального пространства X, обладающего замкнутым, послойно нульмерным и непрерывным отображением на специального класса кружевное пространство Y верно равенство $\operatorname{Ind} X = \dim X$. Аналогичное утверждение верно, если Y является паракомпактным σ-пространством и $\operatorname{ind} Y = 0$. Доказывается, что любая замкнутая сеть отрезка и прямой является S-сетью. Дается простое доказательство неравенства Катетова–Мориты для паракомпактных σ-пространств (следовательно, и для кружевных пространств).

Библиография: 20 названий.

Ключевые слова: размерность, сеть, σ-пространства, кружевные пространства.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm11244

Введение. В данной работе, если не оговорено противное, все рассматриваемые топологические пространства будем считать нормальными, хаусдорфовыми и конечномерными, все отображения пространств непрерывными, все сети в пространствах будем считать состоящими из замкнутых множеств. Существуют три основных размерностных инварианта $\operatorname{Ind} X$, $\dim X$, $\operatorname{ind} X$, соотношения между которыми в различных классах пространств представляют особый интерес. П. С. Урысон доказал равенства

$$\operatorname{Ind} X = \dim X = \operatorname{ind} X$$

для метрических компактов, В. Гуревич и Л. А. Тумаркин доказали эти равенства для метрических пространств со счетной базой.

М. Катетов [1] доказал равенство $\operatorname{Ind} X = \dim X$ для любых метрических пространств. Равенство $\operatorname{Ind} X = \dim X$ для любых метрических пространств независимо получил также Морита. Б. А. Пасынков [2] доказал равенство $\operatorname{Ind} X = \dim X$ для пространств замкнуто и нульмерно в смысле dim отображающихся на метрические. В работе [3] Пасынков доказал, что, если в пространстве X так непрерывно действует бикомпактная группа, что пространство орбит метризуемо, то имеет место равенство $\operatorname{Ind} X = \dim X$. Равенство $\operatorname{Ind} X = \dim X$ выполняется для замкнутых образов метрических пространств, паракомпактных σ-пространств нульмерных

© И. М. Лейбо, 2018

в смысле ind [4] и некоторых классов кружевных пространств [5]. Причиной выполнения равенства $\operatorname{Ind} X = \dim X$ в выше перечисленных случаях является наличие в пространстве специальной системы замкнутых множеств и их окрестностей [6], [7], называемой f-системой, которая позволяет вопрос о совпадении размерностей $\dim X$ и $\operatorname{Ind} X$ в нормальном пространстве X, используя свойства пространств с f-системой, с помощью факторизационной теоремы Пасынкова сводить к вопросу о совпадении размерностей dim и Ind в некотором метрическом пространстве.

В данной работе доказывается, что для нормального пространства X, обладающего замкнутым, послойно нульмерным и непрерывным отображением на специального класса кружевное пространство Y (кружевное пространство, имеющее S-сеть [5]), верно равенство $\operatorname{Ind} X = \dim X$. Также доказывается, что равенство $\operatorname{Ind} X = \dim X$ выполняется для пространства X, которое замкнуто и послойно нульмерно в смысле dim отображается на паракомпактное σ-пространство нульмерное в смысле ind. В данной работе рассматривается роль S-сети в размерностных свойствах кружевных пространств, а также доказывается, что любая счетная замкнутая сеть отрезка является S-сетью. Отметим, что понятие S-сети независимо ввел S. Oka [8]. Для метрических пространств хорошо всем известно неравенство Катетова–Мориты:

$$\dim(X \times Y) \leqslant \dim X + \dim Y.$$

В интересной работе К. Л. Козлова и Б. А. Пасынкова [9] неравенство

$$\dim(X \times Y) \leqslant \dim X + \dim Y$$

доказано для паракомпактных Σ-пространств. В настоящей работе дается простое доказательство “логарифмического неравенства”

$$\dim(X \times Y) \leqslant \dim X + \dim Y$$

для паракомпактных σ-пространств, основные нужные нам свойство которых описаны в работе [10].

1. Основные определения и известные факты.

Определение 1.1 [7], [6]. Для пространства Z размерности $\operatorname{Ind} Z = n$ мы будем говорить, что замкнутое в Z множество F и его окрестность OF *определяют размерность* $\operatorname{Ind} Z$ пространства Z, если для каждой окрестности U множества F такой, что $F \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq OF$, имеем $\operatorname{Ind} \operatorname{Fr} U \geqslant n-1$.

Определение 1.2 [5]. Набор $\varphi = \{F_\alpha, OF_\alpha\}_{\alpha \in A}$ замкнутых в пространстве Z множеств F_α и их окрестностей OF_α мы назовем *всюду* f-*системой* (f-*системой*), если для каждого (каждого замкнутого) множества M, $M \subseteq Z$, существует такой индекс $\alpha_0 \in A$, что пара $\{M \cap F_{\alpha_0}, M \cap OF_{\alpha_0}\}$ определяет размерность $\operatorname{Ind} M$, а система открытых множеств $\{OF_\alpha\}_{\alpha \in A}$ является σ-дискретной в Z.

Определение 1.3. Пространство X, имеющее всюду f-систему, мы будем называть *всюду* F-*пространством*, а пространства, имеющие f-систему будем называть F-*пространствами*.

Всюду F-пространствами будут, например, следующие классы пространств: все метрические, их замкнутые образы, паракомпактные σ-пространства нульмерные в смысле ind, кружевные пространства, являющиеся S-пространствами.

Понятие F-пространства позволяет дать следующее достаточное условие для совпадения размерностей $\operatorname{Ind} X$ и $\dim X$.

Теорема 1.4 [5]. *Если X является F-пространством, то* $\operatorname{Ind} X = \dim X$.

Напомним, что любое метрическое пространство является F-пространством [7], поэтому получается простое доказательство совпадения размерностей dim и Ind для любых метрических пространств, использующее только равенство размерностей для пространств со счетной базой и факторизационную теорему Пасынкова.

В случае наследственно нормального пространства теорема 1.4 может быть уточнена следующим образом.

Теорема 1.5 [5]. *Если наследственно нормальное пространство X является всюду* F-*пространством*, $\dim X \leqslant n$, *то* $X = \bigcup X_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, *каждое множество X_i таково, что* $\dim X_i \leqslant 0$, *для* $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Как и в случае с метрическим пространством каждое X_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, в этом случае можно считать G_σ-множеством.

А. В. Архангельский ввел понятие сети. Система множеств $\mu = \{F_\alpha\}$ в пространстве X называется *сетью*, если для каждой точки $x \in X$ и каждой окрестности Ox точки $x \in X$ существует $F_\alpha \in \mu$, что $x \in F_\alpha \subseteq Ox$. В данной работе мы будем рассматривать сети, состоящие только из замкнутых множеств.

A. Okuyama ввел понятие σ-пространства. Пространство X называется *σ-пространством*, если X имеет σ-локально конечную (а значит и σ-дискретную) сеть. Все, используемые в этой статье свойства σ-пространств, можно найти в работе Архангельского [10]. Напомним [10], что счетное произведение паракомпактных σ-пространств и любое подпространство паракомпактного σ-пространства являются паракомпактными σ-пространствами.

Теорема 1.6 [7], [5], [11]. *Если X – паракомпактное σ-пространство (т.е. X имеет σ-локально конечную сеть)*, $\dim X \leqslant n$ *и X всюду F-пространство, то X является совершенным $\leqslant (n+1)$-кратным образом нульмерного в смысле* dim *паракомпактного σ-пространства.*

Теорема 1.7 [5], [11]. *Пусть Y является наследственно нормальным паракомпактом*, $\dim Y \leqslant n$ *и Y является всюду F-пространством; пусть $f\colon X \to Y$ замкнутое непрерывное нульмерное в смысле* dim *(т.е.* $\dim f^{-1}y = 0$ *для каждой точки $y \in Y$) отображение нормального пространства X на пространство Y. Тогда выполняется равенство* $\dim X = \operatorname{Ind} X$.

Определение 1.8 [5]. Мы будем называть замкнутую сеть $\gamma = \{F_\alpha\}$ в пространстве Y S-*сетью*, если для любого замкнутого множества $F \subseteq Y$ и любой его окрестности OF существует такая подсистема $\gamma(F)$ сети γ, что объединение всех элементов подсистемы $\gamma(F)$, т.е. множество $\bigcup \gamma(F)$, замкнуто в Y и $F \subseteq \bigcup \gamma(F) \subseteq OF$.

Часто удобнее пользоваться данным определением в следующем виде:

$$Y \setminus OF \subseteq \bigcup \gamma(F) \subseteq Y \setminus F.$$

Пространство, которое имеет σ-консервативную S-сеть, мы будем называть S-*пространством*.

Класс S-пространств достаточно широк. Отметим некоторые подклассы класса S-пространств: все метрические пространства; замкнутые образы метричеких пространств; нульмерные в смысле размерности $\dim$ σ-пространства; кружевные пространства X, для которых $\operatorname{ind} X = 0$; свободные L-пространства [12]; паракомпактные σ-пространства, являющиеся всюду F-пространствами.

Нагата и Сивиц в работе [13] доказали, но не сформулировали, следующее утверждение.

Утверждение 1.9. *Пусть в нормальном пространстве X имеется σ-консервативная сеть $\vartheta = \{\Phi_\alpha : \alpha \in \mathcal{L}, \mathcal{L} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}_i\}$, система $\{\Phi_\alpha : \alpha \in \mathcal{L}_i\}$ консервативна в Y для каждого $i = 1, 2, \dots$. Тогда в X есть такая σ-дискретная сеть $\mu = \{W_\beta : \beta \in \Gamma, \Gamma = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i\}$, система $\{W_\beta : \beta \in \Gamma_i\}$ дискретна в Y для каждого $i = 1, 2, \dots$, что для любого множества индексов $\mathcal{L}^1 \subseteq \mathcal{L}$ существует такое подмножество индексов $\Gamma^1 \subseteq \Gamma$, что*

$$\bigcup\{\Phi_\alpha : \alpha \in \mathcal{L}^1\} = \bigcup\{W_\beta : \beta \in \Gamma^1\}.$$

Таким образом, если в нормальном пространстве X имеется σ-консервативная S-сеть, то в нем существует в силу работы [13] как σ-консервативная S-сеть, так и σ-локально конечная S-сеть, так и σ-дискретная S-сеть.

В работе [14] Боржес ввел понятие кружевного пространства и описал его основные свойства. Груенхаге и Юннила показали, что пространство X является кружевным тогда и только тогда, когда X имеют σ-консервативную квазибазу. Вопрос каждое ли кружевное пространство имеет σ-консервативную базу остается открытым. Кружевные пространства являются совершенно нормальными паракомпактами и, как показал Хис, σ-пространствами.

Утверждение 1.10 [5], [8]. *Пусть X является кружевным S-пространством. Тогда следующие условия эквивалентны*:

а) $\dim X \leqslant n$;

б) $\operatorname{Ind} X \leqslant n$;

в) $X = \bigcup X_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, n+1$, *при этом каждое множество X_i является G_σ-множеством*, $\dim X_i \leqslant 0$, *для* $i = 1, 2, \dots, n+1$;

г) *пространство X является совершенным $\leqslant (n+1)$-кратным образом нульмерного в смысле* $\dim$ *кружевного пространства*.

Отметим, что пространство X в условиях утверждения 1.10 совершенно n-мерно в смысле В. И. Пономарева [15].

2. Основные теоремы. Нам потребуются некоторые дополнительные построения и леммы.

Лемма 2.1 (Лемма Боржеса [14]). *Пусть X – кружевное пространство. Для каждого замкнутого множества $A \subseteq X$ и любой его открытой окрестности UA существует окрестность U^1A множества A, такая что*

1) $A \subseteq U^1A \subseteq \overline{U^1A} \subseteq UA$;

2) *если B – замкнуто, $A \subseteq B$ и $UA \subseteq UB$, то $U^1A \subseteq U^1B$.*

Другими словами, кружевное пространство монотонно нормально.

Лемма 2.2. *Пусть X – нормальное пространство, Φ – замкнутое в нем множество и $\Phi = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, где каждое F_i замкнуто в X. Пусть $\Phi \subseteq O_i$, $i = 1, 2, \dots$, O_i-открыто в X,*

$$\Phi = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{O}_i, \qquad O_1 \supseteq \overline{O}_2 \supseteq O_2 \supseteq \cdots,$$

и пусть $OF_i \subseteq O_i$, где OF_i – некоторая окрестность множества F_i, $i = 1, 2, \dots$. Тогда

$$\operatorname{Fr}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} OF_i\Big) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \operatorname{Fr} OF_i.$$

Доказательство. Так как

$$O_1 \supseteq \overline{O}_2 \supseteq O_2 \supseteq \overline{O}_3 \supseteq O_3 \supseteq \dots,$$

и $\Phi = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{O}_i$, система $\{\overline{O}_i\}$, $i = 1, 2, \dots$, будет локально конечна на множестве $X \setminus \Phi$; следовательно, система $\{\overline{OF_i}\}$, $i = 1, 2, \dots$, тоже локально конечна на множестве $X \setminus \Phi$. Отсюда

$$\operatorname{Fr}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} OF_i\Big) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \operatorname{Fr} OF_i.$$

Лемма 2.2 доказана.

Теорема 2.3. *Пусть Y является кружевным* S*-пространством, и пусть имеется $f\colon X \to Y$ – замкнутое непрерывное нульмерное в смысле* dim ($\dim f^{-1}y = 0$ *для каждой точки $y \in Y$) отображение нормального пространства X на пространство Y. Тогда* $\dim X = \operatorname{Ind} X$.

Доказательство. В силу теоремы 1.7 достаточно доказать, что Y является всюду F-пространством. Для этого надо построить в пространстве Y всюду f-систему

$$\varphi = \{F_\beta, OF_\beta\}_{\beta \in \mathcal{L}}.$$

Пространство Y является S-пространством; тогда в силу утверждения 1.9 в Y имеется σ-дискретная S-сеть, т.е. в нашем кружевном пространстве Y имеется σ-дискретная S-сеть $\gamma = \{F_\alpha : \alpha \in \mathcal{L},\ \mathcal{L} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}_i\}$, система $\{F_\alpha : \alpha \in \mathcal{L}_i\}$ дискретна в Y для каждого $i = 1, 2, \dots$. Приступим к построению всюду f-системы $\varphi = \{F_\beta, OF_\beta\}_{\beta \in \mathcal{L}}$. Каждое кружевное пространство [14] является совершенно нормальным паракомпактом, поэтому у замкнутых в Y элементов сети $\gamma = \{F_\alpha : \alpha \in \mathcal{L},\ \mathcal{L} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}_i\}$ существуют такие окрестности UF_α, что система $\{UF_\alpha : \alpha \in \mathcal{L}_i\}$ дискретна в Y для $i = 1, 2, 3, \dots$. Фиксируем эти окрестности UF_α, $\alpha \in \mathcal{L}$. Рассмотрим некоторый элемент сети $F_\alpha \in \gamma$, где $\alpha \in \mathcal{L}$. Фиксируем для этого элемента сети F_α счетную систему окрестностей $V_j F_\alpha$, $j = 1, 2, 3, \dots$ следующим образом:

а) возьмем замкнутое множество

$$C_j = \Big(\bigcup F_\beta : \beta \in \bigcup_{i=1}^{j} \mathcal{L}_i,\ F_\beta \in \gamma,\ F_\beta \cap F_\alpha = \varnothing\Big).$$

б) по сформулированной выше лемме Боржеса [14] существует такая окрестность $U_j^1 F_\alpha$, что

$$F_\alpha \subseteq U_j^1 F_\alpha \subseteq \overline{U_j^1 F_\alpha} \subseteq X \setminus C_j.$$

Положим $V_j F_\alpha = U_j^1 F_\alpha \cap U F_\alpha$. Зафиксируем i, j, система $\{V_j F_\alpha, \alpha \in \mathcal{L}_i\}$ дискретна в пространстве Y; следовательно, система

$$\{V_j F_\alpha, \alpha \in \mathcal{L}_i,\ i = 1, 2 \dots; j = 1, 2, \dots\}$$

σ-дискретна в пространстве Y. Теперь перенумеруем последнюю систему и, так как $F_\alpha \subseteq V_j F_\alpha$, получим σ-дискретную систему $\varphi = \{F_\beta, OF_\beta\}_{\beta \in \mathcal{L}}$, $\mathcal{L} = \bigcup_{i=1}^\infty \mathcal{L}_i$, замкнутых множеств $F_\beta \in \gamma$ и их окрестностей OF_β. Покажем, что система $\varphi = \{F_\beta, OF_\beta\}_{\beta \in \mathcal{L}}$ является всюду f-системой. Прежде всего отметим, что из построения окрестностей $V_j F_\alpha$ следует, что

$$F_\alpha = \bigcap_{j=1}^\infty \overline{V_j F_\alpha}.$$

Пусть $\operatorname{Ind} Y = n$; покажем, что система $\varphi = \{F_\beta, OF_\beta\}_{\beta \in \mathcal{L}}$ определяет размерность $\operatorname{Ind} Y = n$. Пусть A и B замкнутые в Y множества такие, что $A \cap B = \varnothing$, и каждая перегородка C между ними такова, что $\operatorname{Ind} C \geqslant n + 1$. Возьмем все такие элементы сети $F_{\alpha_0} \in \gamma$ что

$$\text{либо} \quad F_{\alpha_0} \cap B = \varnothing, \qquad \text{либо} \quad F_{\alpha_0} \cap A = \varnothing, \qquad \text{либо} \quad F_{\alpha_0} \cap (A \cup B) = \varnothing. \tag{2.1}$$

Получаем подсистему систему системы φ; обозначим ее φ^1. Пусть $\varphi^1 = \{F_{\alpha_0}\}_{\alpha_0 \in \mathcal{L}^1}$, где $\mathcal{L}^1 \subseteq \mathcal{L}$. Ясно, что φ^1 покрытие Y. Так как пространство Y нормальное, то у каждого множества F_{α_0} существует открытая окрестность $G^1 F_{\alpha_0}$ такая, что

$$G^1 F_{\alpha_0} \subseteq \overline{G^1 F_{\alpha_0}} \subseteq OF_{\alpha_0}$$

и

$$\text{либо} \quad G^1 F_{\alpha_0} \cap B = \varnothing, \qquad \text{либо} \quad G^1 F_{\alpha_0} \cap A = \varnothing, \qquad \text{либо} \quad G^1 F_{\alpha_0} \cap (A \cup B) = \varnothing. \tag{2.2}$$

Возьмем такую окрестность GF_{α_0}, что

$$GF_{\alpha_0} \subseteq \overline{GF_{\alpha_0}} \subseteq G^1 F_{\alpha_0}.$$

Получили:

$$F_{\alpha_0} \subseteq GF_{\alpha_0} \subseteq \overline{GF_{\alpha_0}} \subseteq G^1 F_{\alpha_0} \subseteq OF_{\alpha_0}.$$

Прежде всего, для простоты понимания, поясним, для чего нам нужны окрестности GF_{α_0}. Система $\{GF_{\alpha_0} : \alpha_0 \in \mathcal{L}^1\}$ удовлетворяет условиям нормализующей леммы и леммы Веденисова [16]. Поэтому между замкнутыми множествами A и B можно провести перегородку C такую, что

$$C \subseteq \bigcup \{\operatorname{Fr} GF_{\alpha_0} : \alpha_0 \in \mathcal{L}^1\}.$$

Если каждое множество $\operatorname{Fr} GF_{\alpha_0}$ таково, что $\operatorname{Ind} \operatorname{Fr} GF_{\alpha_0} \leqslant n - 2$, то по теореме суммы

$$\operatorname{Ind} \operatorname{Fr} GF_{\alpha_0} \leqslant n - 2.$$

Теперь покажем, что построенный набор $\varphi = \{F_\beta, OF_\beta\}_{\beta\in\mathcal{L}}$ является всюду f-системой. Сначала докажем, что он определяет размерность $\operatorname{Ind} Y$. Допустим, что система $\varphi = \{F_\beta, OF_\beta\}_{\beta\in\mathcal{L}}$ не определяет размерность $\operatorname{Ind} Y = n$. Нам понадобится вспомнить, что σ-дискретная сеть $\gamma = \{F_\alpha : \alpha \in \mathcal{L},\, \mathcal{L} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}_i\}$ является S-сетью. Возьмем замкнутое множество F_{α_0}, удовлетворяющее условию (2.1) и его окрестность $G^1F_{\alpha_0}$, удовлетворяющую условию (2.2). Так как σ-дискретная сеть γ является S-сетью, существует такой набор индексов $\mathcal{L}_{\alpha_0} \subseteq \mathcal{L}$, что

$$(Y \setminus G^1F_{\alpha_0}) \subseteq \cup\{F_\xi : \xi \in \mathcal{L}_{\alpha_0},\, F_\xi \in \gamma\} \subseteq (Y \setminus F_{\alpha_0}),$$

причем множество $\bigcup\{F_\xi : \xi \in \mathcal{L}_{\alpha_0},\, F_\xi \in \gamma\}$ замкнуто в Y. Обозначим это замкнутое множество $\Im_{\alpha_0}$, т.е. $\Im_{\alpha_0} = \bigcup\{F_\xi : \xi \in \mathcal{L}_{\alpha_0},\, F_\xi \in \gamma\}$. Пусть $\mathcal{L}^i_{\alpha_0} = \mathcal{L}_{\alpha_0} \cap \mathcal{L}_i$, и пусть $\Im_k = \bigcup\{F_\xi : \xi \in \mathcal{L}^k_{\alpha_0}\}$. Ясно, что $\Im_k$ замкнуто в Y и $\Im_{\alpha_0} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Im_k$. Пусть индекс α_0 принадлежит некоторому $\mathcal{L}_{i_0}$ (где $\mathcal{L} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}_i$). В силу построения окрестностей V_jF_ξ имеем:

$$\overline{V_{k+i_0}F_\xi} \cap F_{\alpha_0} = \varnothing \qquad \text{для} \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Пусть $O\Im_k = \bigcup\{V_{k+i_0}F_\xi : \xi \in \mathcal{L}^k_{\alpha_0}\}$. Сразу отметим, что система

$$\{V_{k+i_0}F_\xi : \xi \in \mathcal{L}^k_{\alpha_0},\, k \text{ – фиксировано}\}$$

дискретна в Y, так как $V_{k+i_0}F_\xi \subseteq OF_\xi$ по построению множества $V_{k+i_0}F_\xi$, а система $\{OF_\xi,\, \xi \in \mathcal{L}^k_{\alpha_0}\}$ дискретна в Y по условию. Отметим, что в силу леммы Боржеса и предыдущих построений следующие множества: $\Im_{\alpha_0}$, $\Im_k$, $O\Im_k$, $k = 1, 2, \ldots$, удовлетворяют лемме 2.2 (где $\Phi = \Im_{\alpha_0}$), т.е. система $\{O\Im_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, локально конечна на множестве $Y \setminus \Im_{\alpha_0}$. Так как по предположению система $\varphi = \{F_\beta, OF_\beta\}_{\beta\in\mathcal{L}}$ не определяет размерность $\operatorname{Ind} Y = n$, то $\operatorname{Ind} Y = n$ не определяет и набор $\varphi^1 = \{F_\beta, OF_\beta\}_{\beta\in\mathcal{L}_{\alpha_0}}$. Следовательно, для каждого множества F_ξ, $\xi \in \mathcal{L}^k_{\alpha_0}$, $k = 1, 2, \ldots$, существует окрестность, обозначим ее $W^{k+i_0}_\xi$, такая, что

$$F_\xi \subseteq W^{k+i_0}_\xi \subseteq \overline{W^{k+i_0}_\xi} \subseteq V_{k+i_0}F_\xi \subseteq OF_\xi, \qquad \operatorname{Ind} \operatorname{Fr} W^{k+i_0}_\xi \leqslant n-2.$$

Обозначим через $W\Im_k = \bigcup\{W^{k+i_0}_\xi : \xi \in \mathcal{L}^k_{\alpha_0}\}$. Система $\{W^{k+i_0}_\xi : \xi \in \mathcal{L}^k_{\alpha_0}\}$ дискретна в Y, так как система $\{OF_\xi : \xi \in \mathcal{L}^k_{\alpha_0}\}$ дискретна в Y по построению. По теореме суммы для размерности Ind получаем: $\operatorname{Ind} \operatorname{Fr} W\Im_k \leqslant n-2$. Получили:

$$W\Im_k \subseteq O\Im_k, \quad \overline{W\Im_k} \cap F_{\alpha_0} = \varnothing, \quad \operatorname{Ind} \operatorname{Fr} W\Im_k \leqslant n-2 \qquad \text{для} \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Пусть $O\Im_{\alpha_0} = \bigcup_{k=1}^{\infty} W\Im_k$. Обозначим G_{α_0} множество $Y \setminus \overline{O\Im_{\alpha_0}}$. Тогда $\operatorname{Fr} G_{\alpha_0} \subseteq \operatorname{Fr} O\Im_{\alpha_0}$, но по лемме 2.2

$$\operatorname{Fr} O\Im_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \operatorname{Fr} W\Im_k.$$

Так как $\operatorname{Ind} \operatorname{Fr} W\Im_k \leqslant n-2$, $k = 1, 2, \ldots$, то по теореме суммы для размерности Ind получаем: $\operatorname{Ind} \operatorname{Fr} O\Im_{\alpha_0} \leqslant n-2$, а значит, $\operatorname{Ind} \operatorname{Fr} G_{\alpha_0} \leqslant n-2$. Теперь в силу нормализующей леммы и леммы Веденисова [16] получаем перегородку C между замкнутыми множествами A и B такую, что $C \subseteq \bigcup\{\operatorname{Fr} G_{\alpha_0} : \alpha_0 \in \mathcal{L}^1\}$, поэтому $\operatorname{Ind} C \leqslant n-2$. Полученное противоречие показывает: построенный набор $\varphi =$

$\{F_\beta, OF_\beta\}_{\beta\in\mathcal{L}}$ определяет размерность $\operatorname{Ind} Y = n$. Пусть теперь $Y_0 \subseteq Y$, где Y_0 – любое подмножество Y, $\operatorname{Ind} Y_0 = m \leqslant n$, где $\operatorname{Ind} Y = n$. Как известно [10], [15], Y_0 является кружевным пространством и, следовательно, в нем справедливы все свойства кружевных пространств, включая теорему суммы для размерности Ind. Пусть A^1 и B^1 замкнутые в Y_0 множества, $A^1 \cap B^1 = \varnothing$, и каждая перегородка C^1 в Y_0 между множествами A^1 и B^1 имеет $\operatorname{Ind} C^1 \geqslant m-1$. Тогда в пространстве Y существуют замкнутые множества A и B (возможно пересекающиеся вне Y_0) такие, что

$$A^1 = A \cap Y_0, \qquad B^1 = B \cap Y_0.$$

Пусть $\varphi = \{F_\beta, OF_\beta\}_{\beta\in\mathcal{L}}$ построенная выше система замкнутых множеств и их окрестностей, определяющая размерность $\operatorname{Ind} Y$. Обозначим $F^1_\beta = F_\beta \cap Y_0$, $OF^1_\beta = OF_\beta \cap Y_0$. Для каждой точки $y \in Y_0$ существует элемент $F_{\alpha_0} \in \gamma$ (γ – указанная выше σ-дискретная S-сеть, $\gamma = \{F_\alpha : \alpha \in \mathcal{L}, \mathcal{L} = \bigcup_{i=1}^\infty \mathcal{L}_i\}$, в пространстве Y), что $y \in F_{\alpha_0}$, при этом

$$\text{либо} \quad F_{\alpha_0} \cap A = \varnothing, \qquad \text{либо} \quad F_{\alpha_0} \cap B = \varnothing, \qquad \text{либо} \quad F_{\alpha_0} \cap (A \cup B) = \varnothing.$$

Пусть $F^1_{\alpha_0} = F_{\alpha_0} \cap Y_0$. После этого построения и рассуждения становятся аналогичными предыдущим, только проводятся для множеств

$$A^1, \quad B^1, \quad F^1_\beta, \quad OF^1_\beta, \quad \Im^1_{\alpha_0} = \Im_{\alpha_0} \cap Y_0, \quad \Im^1_k = \Im_k \cap Y_0, \quad O\Im^1_k = (O\Im_k \cap Y_0).$$

Аналогично предыдущему получим множества $G^1_{\alpha_0} = G_{\alpha_0} \cap Y_0$ и получаем ситуацию, в которой применима лемма Веденисова на множестве Y_0 и, таким образом получаем перегородку C^1 между множествами A^1 и B^1 на множестве Y_0, и если система $\varphi^1 = \varphi \cap Y_0$ не определяет размерность $\operatorname{Ind} Y_0$, то, аналогично предыдущему, $\operatorname{Ind} C^1 \leqslant m-2$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 2.3.

Фактически доказана следующее утверждение.

Теорема 2.4. *Монотонно нормальное пространство с σ-дискретной S-сетью является всюду F-пространством.*

Отметим, что монотонно нормальное пространство с σ-дискретной сетью является кружевным пространством.

Утверждение 2.5. *Для кружевного пространства X следующие условия эквивалентны:*

1) *X является всюду F-пространством.*
2) *X является S-пространством.*

Действительно, из п. 1 следует п. 2, это вытекает из теоремы 1.6; из п. 2 следует п. 1, так как при доказательстве теоремы 2.3 доказано, что X является всюду F-пространством.

Теорема 2.6. *Пусть Y будет паракомпактным σ-пространством, и пусть* $\operatorname{ind} Y = 0$, $\operatorname{Ind} Y \leqslant n$; *пусть $f\colon X \to Y$ – замкнутое непрерывное нульмерное в смысле* dim (*т.е.* $\dim f^{-1}y = 0$ *для каждой точки $y \in Y$*) *отображение нормального пространства X на пространство Y. Тогда* $\dim X = \operatorname{Ind} X$.

Схема доказательства. В силу теоремы 1.7 достаточно доказать, что Y является всюду F-пространством. Для этого надо построить в пространстве Y всюду f-систему

$$\varphi = \{F_\beta, OF_\beta\}_{\beta\in\mathcal{L}}.$$

Так как Y паракомпактное σ-пространство, то в Y существует σ-дискретная сеть из замкнутых множеств $\{F_\alpha : \alpha \in \Re,\ \Re = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Re_i\}$, и система $\{F_\alpha : \alpha \in \Re_i\}$ дискретна в Y для $i = 1, 2, 3, \ldots$. Для каждого F_α, $\alpha \in \Re$, существует OF_α такая, что $F_\alpha \subseteq OF_\alpha \subseteq \overline{OF_\alpha}$ и система $\{\overline{OF_\alpha}, \alpha \in \Re_i\}$ дискретна в Y. Пусть A и B два непересекающихся замкнутых множества в Y. Так как $\operatorname{ind} Y \leqslant 0$, для каждой точки $y \in Y$ существует такая окрестность Oy точки $y \in Y$, что $\operatorname{Fr} Oy = \varnothing$ и Oy пересекается либо только с A, либо только с B (т.е. окрестности Oy находятся в условиях леммы Веденисова [16] для множеств A, B). Для каждой точки $y \in Y$ фиксируем такую соответствующую окрестность Oy. В множестве индексов $\Re$ выберем подмножество $\Re^1 \subseteq \Re$ следующим образом: $\beta \in \Re^1$ тогда и только тогда, когда $F_\beta \subseteq Oy$ для некоторой точки $y \in Y$. Тогда $\varphi^1 = \{F_\beta, OF_\beta\}_{\beta\in\Re^1}$ будет всюду f-системой в пространстве Y. Таким образом, Y является всюду F-пространством. Пусть $\varphi = \{F_\alpha, OF_\alpha\}_{\in\Re}$, так как $\varphi^1 \subseteq \varphi$, то φ тоже является всюду f-системой в пространстве Y (полезно сравнить с [4; теорема 6]). Теорема 2.6 доказана.

Из того, что пространство Y является всюду F-пространством, и из свойств [10], [17] паракомпактных σ-пространств вытекает следующее утверждение.

Утверждение 2.7. *Пусть пространсво X является паракомпактным σ-пространством*, $\dim X \leqslant n$, $\operatorname{ind} X \leqslant 0$. *Тогда верно следующее*:

а) $\operatorname{Ind} X \leqslant n$;

б) $X = \bigcup X_i$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, *каждое множество X_i является G_σ-множеством и, кроме того*, $\dim X_i \leqslant 0$, *для* $i = 1, 2, \ldots, n+1$;

в) *пространство X является совершенным $\leqslant (n+1)$-кратным образом нульмерного в смысле* dim *паракомпактного σ-пространства*;

г) *X является всюду F-пространством и S-пространством.*

Напомним, что равенство $\dim X = \operatorname{Ind} X$ для паракомпактных σ-пространств, у которых $\operatorname{ind} X = 0$, доказал Ока [4].

Заметим, что в нульмерном в смысле dim паракомпактном σ-пространстве любая σ-локально конечная сеть из замкнутых множеств является S-сетью. Из определения следует, что "одноточечная" сеть (сеть, состоящая из всех точек пространства) будет S-сетью. Как будет показано ниже, любая счетная сеть из замкнутых множеств на отрезке (прямой) является S-сетью. В случае произведения 2-х прямых (2-х отрезков) вопрос остается открытым; вопрос остается открытым даже в случае произведения прямой (отрезка) на иррациональные числа.

Вопрос. Будет ли любая счетная сеть из замкнутых множеств в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, S-сетью?

Так как для отрезка наиболее интересен случай счетной сети, то следующую теорему сформулируем так.

Теорема 2.8. *На отрезке любая счетная замкнутая сеть является S-сетью.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{I}$ – отрезок, $\gamma = \{\Gamma_\alpha : \alpha \in \mathcal{L}\}$ сеть из замкнутых множеств отрезка $\mathbf{I}$. Пусть L_1 и L_2 замкнутые в $\mathbf{I}$ множества и $L_1 \cap L_2 = \varnothing$. Как известно [18], [19], существует такое замкнутое отображение канторового совершенного множества C, на отрезок $\mathbf{I}$, что лишь счетное множество точек отрезка имеют прообразы, состоящие из 2-х точек, остальные точки отрезка имеют одноточечные прообразы. Пусть это будет отображение $f\colon \mathsf{C} \to \mathbf{I}$. При этом

$$f^{-1}L_1 \cap f^{-1}L_2 = \varnothing.$$

Существует открыто-замкнутое в C множество G такое, что $f^{-1}L_1 \subseteq G$, а $f^{-1}L_2 \subseteq \mathsf{C} \setminus G$, т.е. получаем, что

$$f^{-1}L_2 \cap G = \varnothing.$$

Тогда $L_2 \cap fG = \varnothing$. Множество fG замкнуто в $\mathbf{I}$ и

$$f^{-1}(fG) = G \cup K, \qquad \text{где} \quad K = \{x_i \in \mathsf{C} : i = 1, 2, \dots\},$$

т.е. K счетно, замкнуто в C, и $K \subseteq \mathsf{C} \setminus G$. Ясно, что $f^{-1}fG \cap f^{-1}L_2 = \varnothing$. У каждой точки $x_i \in K$ возьмем окрестность Ox_i так, что

$$Ox_i \cap f^{-1}L_2 = \varnothing, \qquad Ox_i \subseteq \mathsf{C} \setminus G, \qquad \operatorname{diam} Ox_i < \frac{1}{i}.$$

Пусть $fx_i = y_i$, $i = 1, 2, \dots$. Возьмем $z \in fG$. Если $z \neq y_i$, $i = 1, 2, \dots$, то в силу замкнутости отображения f существует окрестность Oz, что $f^{-1}Oz \subseteq G$; тогда существует $\Gamma_z \in \gamma$, что $z \in \Gamma_z \subseteq Oz$, т.е. $f^{-1}\Gamma_z \subseteq G$. Если $z = y_i$ для некоторого i, то в силу замкнутости отображения $f\colon \mathsf{C} \to \mathbf{I}$ существует $\Gamma_z \in \gamma$ (этот элемент сети $\Gamma_z \in \gamma$ обозначим Γ_z^i) такой, что

$$f^{-1}\Gamma_z^i \subseteq G \cup Ox_i.$$

Пусть $f^{-1}\Gamma_z^i \cap Ox_i = F_i$, F_i замкнуто в C, $x_i \in F_i$. Система $\{F_i,\ i = 1, 2, \dots\}$ локально конечна в $\mathsf{C} \setminus K$, так как $\operatorname{diam} Ox_i < 1/i$, K счетно и замкнуто в C, $K \subseteq \mathsf{C} \setminus G$. Но тогда множество $(\bigcup_{i=1}^\infty F_i) \cup K$ замкнуто в C, а так как $x_i \in F_i$, множество $\bigcup_{i=1}^\infty F_i$ замкнуто в C. Для всех $z \in fG$ возьмем выбранные выше элементы сети Γ_z (Γ_z для $z \neq y_i$, $i = 1, 2, \dots$, и Γ_z^i для $z = y_i$ при некотором i). Обозначим через $\Re$ ($\Re \subseteq \mathbf{I}$) множество $\bigcup\{\Gamma_z : z \in fG\}$, где элементы сети Γ_z выбраны как указано выше. В силу открыто-замкнутости множества G, замкнутости множества K и построения окрестностей Ox_i, получаем, что $\bigcup\{f^{-1}\Gamma_z : z \in fG\}$ замкнуто в C, другими словами $f^{-1}\Re$ замкнуто в C. Тогда, в силу замкнутости отображения $f\colon \mathsf{C} \to \mathbf{I}$, множество $\Re$ замкнуто в $\mathbf{I}$, $L_1 \subseteq \Re$, $\Re \cap L_2 = \varnothing$. Доказательство окончено.

При доказательстве теоремы 2.8 мы не использовали счетность сети, поэтому справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2.9. *На отрезке любая замкнутая сеть является S-сетью.*

Теорема 2.10. *Пусть пространство X есть произведение отрезка на рациональные числа. Тогда любая сеть из замкнутых множеств пространства X является S-сетью.*

Схема доказательства. При доказательстве рассматривается следующее отображение $\mathbf{f}\colon \mathsf{C} \times \mathbb{Q} \to \mathbf{I} \times \mathbb{Q}$, где $\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел, через $\mathbf{I}$ обозначим отрезок, C – канторово совершенное множество. Отображение $f\colon \mathsf{C} \to \mathbf{I}$ из теоремы 2.8, $\mathrm{id}\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ – тождественное отображение, $\mathbf{f} = f \times \mathrm{id}$. Так как множество $\mathbb{Q}$ – счетно, то возникающее в данной ситуации множество, соответствующее множеству K из доказательства теоремы 2.8, тоже будет счетным. Далее аналогично доказательству теоремы 2.8.

В работе [9] неравенство $\dim(X \times Y) \leqslant \dim X + \dim Y$ доказано для паракомпактных Σ-пространств. Отметим, что каждое паракомпактное σ-пространство является паракомпактным Σ-пространством. Дадим простое доказательство следующей теоремы, ранее [20] сформулированной автором без доказательства. Для этого нам необходимы некоторые определения и утверждения. Отметим, что основные идеи и методы восходят к работе [10].

Определение 2.11 [17]. Обратный спектр $\{X_\alpha, F_\alpha, \pi^\alpha_\beta,\ \alpha \in \Re,\ \beta \in \Re\}$ называется *жестким*, если все пространства X_α паракомпакты, все проекции π^α_β – уплотнения, F_α является σ-дискретной сетью в X_α, $\pi^\alpha_\beta(F_\alpha) = F_\beta$ для всех $\beta \leqslant \alpha$.

Брегман [17] следующим образом охарактеризовал n-мерные в смысле dim паракомпактные σ-пространства:

Утверждение 2.12 [17; теорема 1]. *Для топологического пространства X следующие условия эквивалентны*:

1) *X является паракомпактным σ-пространством и* $\dim X \leqslant n$.
2) *X гомеоморфно пределу жесткого спектра из пространств размерности* dim *не более n*.
3) *X гомеоморфно пределу жесткого спектра из метризуемых пространств размерности* dim *не более n*.

Отметим [17], что предел жесткого спектра существует и является паракомпактным σ-пространством. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2.13. *Пусть X будет паракомпактным σ-пространством, M-метризуемым пространством. Тогда* $\dim(X \times M) \leqslant \dim X + \dim M$.

Доказательство. Напомним [16], что для конечномерных метрических пространств M_1, M_2 справедлива хорошо известная теорема Катетова–Мориты:

$$\dim(M_1 \times M_2) \leqslant \dim M_1 + \dim M_2.$$

Пространство X, $\dim X = n$, в силу утверждения 2.12 (пункт 3) гомеоморфно пределу жесткого спектра из метризуемых пространств X_α, $\dim X_\alpha \leqslant n$, другими словами,

$$X = \varprojlim\{X_\alpha, F_\alpha, \pi^\alpha_\beta,\ \alpha \in \Re,\ \beta \in \Re\}.$$

Пусть $\dim M = m$. Тогда пространство $(X \times M)$ гомеоморфно обратному пределу жесткого спектра из пространств $(X_\alpha \times M)$ и отображений

$$\varphi^\alpha_\beta = \pi^\alpha_\beta \times \mathrm{id},$$

где $\pi^\alpha_\beta\colon X_\alpha \to X_\beta$, $\mathrm{id}\colon M \to M$ – тождественное отображение, т.е. $\varphi^\alpha_\beta(x_\alpha, m) = (\pi^\alpha_\beta x_\alpha, m)$, $x_\alpha \in X_\alpha$, $m \in M$. Элементы сети в пространстве $(X_\alpha \times M)$ – это произведения элементов сети пространства X_α и сети пространства M. Жесткость спектра очевидна. Так как в силу теоремы Катетова–Мориты

$$\dim(X_\alpha \times M) \leqslant \dim X_\alpha + \dim M \leqslant m + n,$$

в силу утверждения 2.12 (пункт 3) $\dim(X \times M) \leqslant m + n$. Таким образом,

$$\dim(X \times M) \leqslant \dim X + \dim M.$$

Лемма доказана.

Теорема 2.14 [20]. *Для конечномерных паракомпактных σ-пространств X и Y справедливо неравенство* $\dim(X \times Y) \leqslant \dim X + \dim Y$.

Следовательно, неравенство $\dim(X \times Y) \leqslant \dim X + \dim Y$ справедливо для кружевных пространств.

Доказательство. Пусть X и Y – паракомпактные σ-пространства, $\dim X = n$, $\dim Y = m$, и пусть

$$X = \varprojlim\{X_\alpha, F_\alpha, \pi^\alpha_\beta,\ \alpha \in \Re,\ \beta \in \Re\},$$

где $\{X_\alpha, F_\alpha, \pi^\alpha_\beta,\ \alpha \in \Re,\ \beta \in \Re\}$ – жесткий спектр, все пространства X_α метризуемы, $\dim X_\alpha \leqslant n$ для каждого $\alpha \in \Re$. Тогда пространство

$$X \times Y = \varprojlim\{X_\alpha \times Y, F_\alpha, \pi^\alpha_\beta \times \mathrm{id},\ \alpha \in \Re,\ \beta \in \Re\},$$

где спектр $\{X_\alpha \times Y, F_\alpha, \pi^\alpha_\beta \times \mathrm{id},\ \alpha \in \Re,\ \beta \in \Re\}$ является жестким, причем, аналогично лемме 2.13, сеть F_α в паракомпактном σ-пространстве $X_\alpha \times Y$ есть произведение элементов сети в X_α и элементов сети в Y. Сеть F_α является σ-дискретной в $X_\alpha \times Y$ в силу σ-дискретности сети в X_α и σ-дискретности сети в Y. В силу леммы 2.13 $\dim(X_\alpha \times Y) \leqslant \dim X_\alpha + \dim Y \leqslant n + m$. Но тогда в силу утверждения 2.12 (пункт 2) получаем

$$\dim(X \times Y) \leqslant n + m = \dim X + \dim Y.$$

Теорема доказана.

Мне приятно выразить благодарность профессору А. В. Архангельскому за внимание к работе и полезные обсуждения, а также профессору Б. А. Пасынкову за полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] М. Катетов, “О размерности метрических пространств”, *Докл. АН СССР*, **79**:2 (1951), 189–191.

[2] Б. А. Пасынков, “Об одном классе отображений и о размерности нормальных пространств”, *Сиб. матем. журн.*, **5** (1964), 356–376.

[3] Б. А. Пасынков, “О размерности пространств с бикомпактной группой преобразований”, *УМН*, **31**:5 (191) (1976), 112–120.

[4] Oka Shinpei, “An inequality concerning three fundamental dimensions of paracompact σ-spaces”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **83**:4 (1981), 790–792.

[5] И. М. Лейбо, “О размерности некоторых пространств”, *Докл. АН СССР*, **262**:1 (1982), 26–29.

[6] И. М. Лейбо, “О равенстве размерностей для замкнутых образов метрических пространств”, *Докл. АН СССР*, **216**:3 (1974), 498–501.

[7] И. М. Лейбо, “О замкнутых образах метрических пространств”, *Докл. АН СССР*, **224**:4 (1975), 756–759.

[8] S. Oka, “Dimension of stratifiable spaces”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **275**:1 (1983), 231–243.

[9] K. L Kozlov, B. A. Pasynkov, “Covering dimension of topological products”, *J. Math. Sci. (N.Y.)*, **144**:3 (2007), 4031–4110.

[10] А. В. Архангельский, “Классы топологических групп”, *УМН*, **36**:3 (219) (1981), 127–146.

[11] И. М. Лейбо, “О размерности замкнутых образов метрических пространств”, *СЕРДИКА Българско математическо списание*, **8**:4 (1982), 395–407, http://www.math.bas.bg/serdica/1982/1982-395-407.pdf.

[12] K. Nagami, “Weak L-structures and dimension”, *Fund. Math.*, **112** (1981), 231–240.

[13] F. Siwiec, Jun-iti Nagata, “A note on nets and metrization”, *Proc. Japan Acad.*, **44**:7 (1968), 623–627.

[14] C. J. R. Borges, “On stratifiable spaces”, *Pacific J. Math.*, **17** (1966), 1–16.

[15] В. И. Пономарев, “Паракомпакты, их проекционные спектры и непрерывные отображения”, *Матем. сб.*, **60 (102)**:1 (1963), 89–119.

[16] П. С. Александров, Б. А. Пасынков, *Введение в теорию размерности. Введение в теорию топологических пространств и общую теорию размерности*, Наука, М., 1973.

[17] Ju. H. Bregman, “Some factorization theorems for paracompact σ-spaces”, *Comment. Math. Univ. Carolin.*, **28**:2 (1987), 211–216.

[18] П. С. Александров, *Введение в теорию множеств и общую топологию*, Наука, М., 1977.

[19] А. В. Архангельский, В. И. Пономарев, *Основы общей топологии в задачах и упражнениях*, Наука, М., 1974.

[20] И. М. Лейбо, “О некоторых свойствах σ-пространств”, *Математические чтения памяти М. Я. Суслина*, Саратовский гос. ун-т, Саратов, 1989, 16.

И. М. Лейбо
Московский центр непрерывного математического образования
E-mail: imleibo@mail.ru

Поступило
07.06.2016
Исправленный вариант
30.01.2017