Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

С. А. Коченгин, Оправдание построения решения задачи о точечном источнике SH волн в слоистой среде с вертикальной границей, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 1994, том 218, 56–66

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.173
24 марта 2025 г., 07:34:06

С. А. Коченгин

ОПРАВДАНИЕ ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ТОЧЕЧНОМ ИСТОЧНИКЕ SH ВОЛН В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ С ВЕРТИКАЛЬНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Введение

Рассмотрим уравнение:

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\right)+\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial y}\left(\beta\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}\right)+(\omega^2(g+d)+i\varepsilon)u_\varepsilon=$$

$$=-\frac{\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)}{\alpha\beta}. \qquad (1)$$

Здесь

$$-\infty<x<+\infty,\ x\neq 0,-\infty<y<0,\ y\neq -h,\ h=\text{const}>0,$$

$$\omega=\text{const}>0,\ i^2=-1,\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_0],\ \varepsilon_0>0,$$

$$\alpha(x)=\begin{cases}\alpha_1, & \text{при} \quad x<0,\\ \alpha_2, & \text{при} \quad x>0,\end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases}g_1, & \text{при} \quad x<0,\\ g_2, & \text{при} \quad x>0,\end{cases}$$

$$\beta(y)=\begin{cases}\beta_1, & \text{при} \quad y>-h,\\ \beta_2, & \text{при} \quad y<-h,\end{cases} \qquad d(y)=\begin{cases}d_1, & \text{при} \quad y<-h,\\ d_2, & \text{при} \quad y>-h,\end{cases}$$

$$\alpha_j,\beta_j,g_j,d_j>0, \quad j=1,2.$$

На решение этого уравнения $u_\varepsilon(x,y)$ накладываются следующие условия:

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}(x,0)=0, \qquad (1a)$$

$$u_\varepsilon(x,-h-0)=u_\varepsilon(x,-h+0), \quad u_\varepsilon(-0,y)=u_\varepsilon(+0,y), \qquad (1в)$$

$$\alpha\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\Big|_{x=-0}=\alpha\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\Big|_{x=+0}, \quad \beta\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}\Big|_{y=-h-0}=\beta\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}\Big|_{y=-h+0}, \qquad (1c)$$

причем существует $\sigma>0$ такое, что

$$|u_\varepsilon(x,y)|=O(e^{-\sigma\sqrt{x^2+y^2}}), \quad \text{если} \quad \sqrt{x^2+y^2}\to+\infty. \qquad (1d)$$

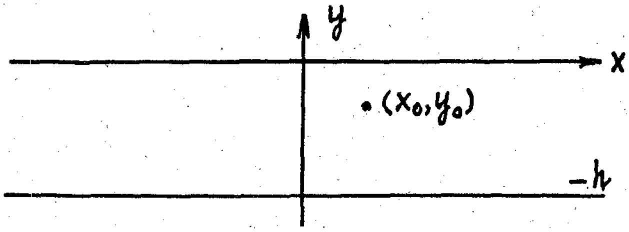

Рис. 1.

Предел $u(x,y) = \lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(x,y)$ описывает волновое поле точечного источника (в точке (x_0, y_0)) в среде, изображенной на рисунке 1.

Решение $u_\varepsilon(x,y)$ было построено в работе [1]. Однако там, строго говоря, отсутствует точная постановка задачи и не оправдан процесс нахождения решения в виде:

$$u_\varepsilon(x,y) = \sum_{j=1}^{n} Y_{\lambda_j}(y_0)Y_{\lambda_j}(y)\mathcal{H}_{\lambda_j}(x,x_0) + \\ = \int_{-\omega^2 d_2}^{+\infty} Y_\lambda(y_0)Y_\lambda(y)\mathcal{H}_\lambda(x,x_0)d\lambda. \tag{2}$$

Здесь Y_{λ_j} – собственные функции, Y_λ – "собственные функции непрерывного спектра" для оператора

$$N(\cdot) = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial y}\left(\beta\frac{\partial}{\partial y}(\cdot)\right) + \omega^2 d(y)(\cdot),$$

а $\mathcal{H}_\lambda(x,x_0)$ – функция Грина для оператора:

$$H(\cdot) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}(\cdot)\right) + (\omega^2 g(x) + i\varepsilon)(\cdot).$$

В данной работе строится пространство обобщенных функций, "естественное" для разложения по собственным функциям оператора $N(\cdot)$. Удается "спрятать" краевые условия (1a)–(1c) в это пространство, т.е. построить его таковым, что для решения, найденного в нем, эти краевые условия выполняются автоматически. Такой прием активно пропагандировался, например, О. А. Ладыженской [2, 3] и В. М. Бабичем. Специально для оправдания разложений по собственным функциям И. М. Гельфанд и А. Г. Костюченко [4] создали теорию оснащенных гильбертовых пространств. В наших построениях мы имеем дело тоже с некоторым аналогом оснащения, который представляется нам довольно простым и адекватным рассматриваемой задачи. Данная работа выполнена под руководством В. М. Бабича, которому автор выражает глубокую благодарность.

1. Точная постановка задачи

Решение $u_\varepsilon(x,y)$ будем искать в пространстве линейных непрерывных функционалов Φ' над некоторым пространством основных функций Φ. Опишем это пространство. Пусть $D^1(L)$ – область определения оператора $L = N + H$. Функция $\varphi(x,y)$, по определению, принадлежит $D^1(L)$ тогда и только тогда, когда она является C^2 гладкой в замыкании каждой компоненты связности области $\Omega = \{(x,y),\, y < 0,\, y \neq -h,\, x \neq 0\}$, удовлетворяет условиям (1a)–(1c) и для любого натурального n $\sup\limits_{\Omega}(1 + |x| + |y|)^n|\varphi| < +\infty$. Будем говорить, что последовательность $\{\varphi_m\}$ стремится к нулю в пространстве $D^1(L)$, если для любого натурального n $\sup\limits_{\Omega}(1+|x|+|y|)^n \cdot |\varphi_m|$ стремится к нулю, когда m стремится к бесконечности. Определим $D^{k+1}(L)$, для $k = 1, 2, 3, \ldots$ $\varphi(x,y)$ принадлежит $D^{k+1}(L)$, если $\varphi \in D^k(L)$, $N\varphi \in D^k(L)$, $H\varphi \in D^k(L)$. По определению, последовательность $\{\varphi_m\}$ сходится к нулю в $D^{k+1}(L)$, если последовательности $\{\varphi_m\}$, $\{N\varphi_m\}$, $\{H\varphi_m\}$ сходятся к нулю в пространстве $D^k(L)$. Определим

$$\Phi = \bigcap_{k=1}^{\infty} D^k(L).$$

Последовательность $\{\varphi_m\}$ сходится к нулю в пространстве Φ, если для любого k, она стремится к нулю в пространстве $D^k(L)$. Очевидно, что Φ – линейное пространство и что оно полно относительно введенной выше сходимости.

Φ' – пространство линейных непрерывных функционалов над Φ. Сходимость в Φ' определена следующим образом: последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к f в Φ', если для любой φ из Φ $< f_n, \varphi > \to < f, \varphi >$. Каждой классической функции $\tilde{f}$, для которой $\tilde{f}\varphi$ суммируема при всех φ из Φ, поставим в соответствие функционал f, действующий по формуле:

$$< f, \varphi > = \int\limits_{\Omega} \alpha(x)\beta(y)\tilde{f}(x,y)\varphi(x,y)dxdy. \tag{3}$$

Исходя из этого, функционал, который каждой φ из Φ ставит в соответствие $\varphi(x_0, y_0)$ обозначим через $\frac{\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)}{\alpha\beta}$. Для φ из Φ

$L\varphi$ принадлежит Φ. Это позволяет определить оператор L на элементах пространства Φ' по формуле:

$$<Lf,\varphi>=<f,L\varphi>. \tag{4}$$

Теперь поставим задачу. Требуется найти u_ε в пространстве Φ' такую, что

$$Lu_\varepsilon=-\frac{\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)}{\alpha\beta} \tag{5}$$

Такая постановка задачи корректна, т.е., легко показать, что если ее решение $u_\varepsilon(x,y)$ – классическая функция, C^2 – гладкая в замыкании каждой компоненты связности области Ω, исключая точку (x_0,y_0), то она удовлетворяет уравнению (1) в следующем смысле.

А. Для любой φ из Φ выполняется

$$\int_\Omega \alpha\beta L(\varphi)u_\varepsilon\,dxdy=-\varphi(x_0,y_0). \tag{6}$$

В. Для любого положительного σ вне шара

$$B_\sigma=\{(x-x_0)^2+(y-y_0)\leqslant\sigma\},\quad \text{справедливо}\quad L(u_\varepsilon)=0. \tag{7}$$

Помимо этого, $u_\varepsilon(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям (1a)–(1c).

2. Оправдание метода Фурье.

В работе [1] было показано, что для каждой функции φ и Φ, при любом фиксированном $x\neq 0$ верна формула обращения:

$$\varphi(x,y)=\int_{-\omega^2d_1}^{+\infty}\widehat{\varphi}(x,\lambda)Y_\lambda(y)d\mu(\lambda)=$$

$$\sum_{j=1}^{n}\widehat{\varphi}(x,\lambda_j)Y_{\lambda_j}(y)+\int_{-\omega^2d_2}^{+\infty}\widehat{\varphi}(x,\lambda)Y_\lambda(y)d\lambda, \tag{8}$$

где

$$\widehat{\varphi}(x,\lambda)=\int_{-\infty}^{0}\beta(y)\varphi(x,y)Y_\lambda(y)dy. \tag{9}$$

(Мы предполагаем, для определенности, что $d_1>d_2$.) Назовем $F(\varphi)=\widehat{\varphi}(x,\lambda)$ – "преобразованием Фурье" функции φ. Образ пространства основных функций Φ, при отображении F есть линейное пространство. Обозначим его $\widehat{\Phi}$. Введем в нем понятие сходимости. В пространстве $\widehat{\Phi}$, по определению, сходятся те и только те последовательности $\{\widehat{\varphi}_n\}$, которые являются образами (при отображении F) последовательностей $\{\varphi_n\}$, сходящихся в пространстве Φ. Легко видеть, что пространство $\widehat{\Phi}$ полно относительно такой сходимости. На этом пространстве определен оператор F^{-1}, обратный к оператору F, который, в силу (8), действует по формуле:

$$F^{-1}(\widehat{\varphi}) = \check{\widehat{\varphi}} = \int\limits_{-\omega^2 d_1}^{+\infty} \widehat{\varphi}(x,\lambda) Y_\lambda(y) d\mu(\lambda) = \varphi. \tag{10}$$

Пусть $\widehat{\Phi}'$ – пространство всех линейных непрерывных функционалов над $\widehat{\Phi}$. Очевидно, что функционал $\frac{\delta(x-x_0)}{\alpha(x)} Y_\lambda(y_0)$, действующий по формуле:

$$< \frac{\delta(x-x_0)}{\alpha(x)} Y_\lambda(y_0),\ \widehat{\varphi}(x,\lambda) >=$$

$$= \int\limits_{-\omega^2 d_1}^{+\infty} \widehat{\varphi}(x_0,\lambda) Y_\lambda(y_0) d\mu(\lambda) = \varphi(x_0,y_0), \tag{11}$$

принадлежит пространству $\widehat{\Phi}'$. Каждое распределение f из Φ' задает линейный непрерывный функционал $\widehat{f}$ из $\widehat{\Phi}'$ по формуле

$$< \widehat{f}, \widehat{\varphi} >=< f, \varphi > . \tag{12}$$

Назовем $\widehat{f}$ – "преобразованием Фурье" f. Из определения функционала $\frac{\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)}{\alpha(x)\beta(y)}$ и формулы (11) следует, что

$$\widehat{\frac{\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)}{\alpha\beta}} = \frac{\delta(x-x_0)}{\alpha} \cdot Y_\lambda(y_0). \tag{13}$$

Каждый элемент $\widehat{f}$ из $\widehat{\Phi}'$ задает линейный непрерывный функционал $\check{\widehat{f}}$ над Φ по формуле:

$$< \check{\widehat{f}}, \check{\widehat{\varphi}} >=< \widehat{f}, \widehat{\varphi} > . \tag{14}$$

Из формулы (10) следует, что $\check{\widehat{f}} = F^{-1}(\widehat{f}) = f$. Назовем $F^{-1}(\widehat{f})$ – "обратным преобразованием Фурье" функционала $\widehat{f}$.

Докажем теперь разрешимость задачи (5). Очевидно, что

$$< Lf, \varphi >=< f, N\varphi + H\varphi > . \tag{15}$$

Найдем преобразование Фурье распределения Lf. По определению, имеем

$$< \widehat{Lf}, \widehat{\varphi} >=< \widehat{f}, \widehat{N\varphi} + \widehat{H\varphi} > . \qquad (16)$$

Из формулы (9) и того, что $NY_\lambda = -\lambda Y_\lambda$, интегрируя по частям, получаем,

$$\widehat{N\varphi} = -\lambda\widehat{\varphi}. \qquad (17)$$

Из сходимости интегралов

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \beta(y) \sup_x |\varphi(x,y)|\, |Y_\lambda(y)| dy,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \beta(y) \sup_x \left|\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}\right| |Y_\lambda(y)| dy,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \beta(y) \sup_x \left|\frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial x^2}\right| |Y_\lambda(y)| dy$$

следует, что

$$\widehat{H\varphi} = H\widehat{\varphi}. \qquad (18)$$

Объединяя формулы (16), (17) и (18) получаем:

$$\widehat{Lf} = (H - \lambda)\widehat{f}. \qquad (19)$$

Из (13) и (19) следует, что (5) равносильно уравнению:

$$(H - \lambda)\widehat{u}_\varepsilon = -\frac{\delta(x - x_0)}{\alpha(x)} \cdot Y_\lambda(y_0). \qquad (20)$$

Убедимся, что (20) разрешимо в $\widehat{\Phi}'$. Рассмотрим семейство обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящее от параметра λ.

$$(H - \lambda)(\cdot) = -\frac{\delta(x - x_0)}{\alpha(x)}, \quad -\infty < x < +\infty,\ x \neq 0. \qquad (21)$$

Известно, что существует функция Грина $\mathcal{H}_\lambda(x, x_0)$, которая при любом фиксированном λ, является решением уравнения (21) в следующем смысле:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \alpha\mathcal{H}_\lambda(x, x_0)(H - \lambda)\widehat{\varphi}(x, \lambda) dx = -\widehat{\varphi}(x_0, \lambda). \qquad (22)$$

Здесь $\widehat{\varphi}$ – произвольный элемент $\widehat{\Phi}$. Убедимся, что функция $\mathcal{H}_\lambda(x,x_0)\cdot Y_\lambda(y_0)$ задает элемент пространства $\widehat{\Phi}'$. Для функции $Y_\lambda(y)$ верна оценка:

$$\sup_y |Y_\lambda(y)| \leqslant C|\omega^2 d_2+\lambda|^{-\frac{1}{4}}. \qquad (23)$$

Используя ее, легко получить, что

$$\sup_{x,\lambda}\left(|\mathcal{H}_\lambda(x,x_0)|\cdot|Y_\lambda(y_0)|\cdot|\omega^2 d_2+\lambda|^{\frac{1}{4}}\right)\leqslant C_1<+\infty. \qquad (24)$$

Простые выкладки показывают, что для произвольной $\widehat{\varphi}$ из $\widehat{\Phi}$ и любых неотрицательных m и n существует константа C_2 такая, что

$$(1+|x|^n)|\lambda^m\widehat{\varphi}(x,\lambda)|\leqslant C_2\cdot\sup_y|Y_\lambda(y)|. \qquad (25)$$

Из (23) и (25) следует оценка

$$\sup_{x,\lambda}\left((1+|x|^n)(1+|\lambda|^m)|\widehat{\varphi}(x,\lambda)|\,|\omega^2 d_2+\lambda|^{\frac{1}{4}}\right)\leqslant C_3. \qquad (26)$$

Функции $\mathcal{H}_\lambda(x,x_0)Y_\lambda(y_0)$ поставим в соответствие элемент из $\widehat{\Phi}'$ по формуле:

$$<\mathcal{H}_\lambda\cdot Y_\lambda,\widehat{\varphi}>=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\omega^2 d_1}^{+\infty}\alpha(x)\mathcal{H}_\lambda(x,x_0)Y_\lambda(y_0)\widehat{\varphi}(x,\lambda)dx\,d\mu(\lambda). \qquad (27)$$

Корректность этого определения вытекает из оценок (24), (26). Для распределения $(H-\lambda)\mathcal{H}_\lambda Y_\lambda(y_0)$ имеем:

$$<(H-\lambda)\mathcal{H}_\lambda Y_\lambda(y_0),\widehat{\varphi}(x,\lambda)>=$$
$$=\int\limits_{-\omega^2 d_1}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\alpha\mathcal{H}_\lambda(x,x_0)(H-\lambda)\widehat{\varphi}(x,\lambda)dx\,Y_\lambda(y_0)d\mu(\lambda). \qquad (28)$$

Из (22) и (28) следует

$$<(H-\lambda)\mathcal{H}_\lambda\cdot Y_\lambda(y_0),\varphi(x,\lambda)>=-\int\limits_{-\omega^2 d_1}^{+\infty}\varphi(x_0,\lambda)Y_\lambda(y_0)d\mu(\lambda). \qquad (29)$$

Из формул (10), (11) и (29) вытекает, что $\widehat{u}_\varepsilon=\mathcal{H}_\lambda(x,x_0)Y_\lambda(y_0)$ – решение уравнения (20). Следовательно,

$$u_\varepsilon=F^{-1}(\mathcal{H}_\lambda(x,x_0)Y_\lambda(y_0)) \qquad (30)$$

решение уравнения (5).

Разрешимость уравнения (5) доказана, однако формула (30) дает его решение в виде обратного преобразования Фурье в смысле распределений. В то же время легко видеть, что имеет смысл выражение:

$$\tilde{u}_\varepsilon = \int_{-\omega^2 d_1}^{+\infty} \mathcal{H}_\lambda(x, x_0) Y_\lambda(y_0) Y_\lambda(y) d\mu(\lambda). \tag{31}$$

Убедимся, что $\tilde{u}_\varepsilon = u_\varepsilon$. Для этого, в силу равенств

$$< u_\varepsilon, \varphi > = < \widehat{u}_\varepsilon, \widehat{\varphi} > = < \mathcal{H}_\lambda Y_\lambda, \widehat{\varphi} >,$$

достаточно показать, что для любой φ из Φ верно равенство

$$< \tilde{u}_\varepsilon \varphi > = < \mathcal{H}_\lambda Y_\lambda, \widehat{\varphi} > . \tag{32}$$

Правая часть (32) имеет вид:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\omega^2 d_1}^{+\infty} \alpha(x) \mathcal{H}_\lambda(x, x_0) Y_\lambda(y_0) \widehat{\varphi}(x, \lambda) dx d\mu(\lambda).$$

Покажем, что левая часть (32) имеет такой же вид. Для этого нам понадобится лемма.

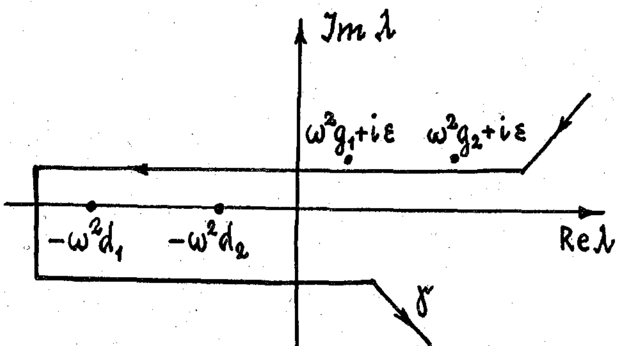

Рис. 2.

Лемма. *Пусть*

$$w(x, y) = \oint_\gamma |\mathcal{H}_\lambda(x, x_0) G_\lambda(y, y_0)| \, |d\lambda|.$$

Здесь G_λ – функция Грина оператора $\beta N(\cdot)$, точка (x_0, y_0) – фиксирована, а контур γ изображен на рисунке 2. Тогда существует константа C такая, что для всех σ, $0 < \sigma < 1$, верна оценка:

$$\sup_{\Omega\setminus B_\sigma} w(x,y) \leqslant \frac{C}{\sigma}. \tag{33}$$

Доказательство. Пусть $R > 0$ так велико, что для всех λ, принадлежащих контуру γ таких, что $|\lambda| \geqslant R$, выполняются неравенства:

$$\min_{j=1,2} \operatorname{Im}\sqrt{\omega^2 d_j + \lambda} \geqslant \sqrt{|\lambda|}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right),$$

$$\min_{j=1,2} \operatorname{Im}\sqrt{\omega^2 g_j - \lambda + i\varepsilon} \geqslant \sqrt{|\lambda|}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{2}}.$$

Выберем

$$k = \min\left(\sin\left(\frac{\pi}{12}\right), \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{2}}\right).$$

Из явных формул для $\mathcal{H}_\lambda$ и G_λ, в силу выбора R, получаем

$$\sup_{\Omega\setminus B_\sigma} \oint\limits_{\substack{\gamma\\|\lambda|\geqslant R}} |G_\lambda \mathcal{H}_\lambda|\,|d\lambda| \leqslant C_1 \int\limits_R^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{|\lambda|}} e^{-k\sigma\sqrt{|\lambda|}} d|\lambda| \leqslant \frac{C_2}{\sigma}.$$

Так как G_λ и $\mathcal{H}_\lambda$ ограничены на контуре γ, мы имеем:

$$\sup_{\Omega\setminus B_\sigma} \oint\limits_{\substack{\gamma\\|\lambda|\leqslant R}} |G_\lambda \mathcal{H}_\lambda|\,|d\lambda| \leqslant C_3.$$

Следовательно, $w \leqslant \frac{C_2}{\sigma} + C_3 \leqslant \frac{C}{\sigma}$. Лемма доказана.

Сделав преобразование Ватсона (см., например [5]), получаем

$$\tilde{u}_\varepsilon = \oint\limits_\gamma \mathcal{H}_\lambda(x, x_0) G_\lambda(y, y_0) d\lambda.$$

Следовательно, левую часть (32) можно переписать в виде:

$$< \tilde{u}_\varepsilon, \varphi >= \int\limits_\Omega \oint\limits_\gamma \mathcal{H}_\lambda G_\lambda d\lambda \alpha\beta\varphi dx dy. \tag{34}$$

Используя теорему Фубини и доказанную выше лемму, можно поменять порядок интегрирования в формуле (34).

$$< \tilde{u}_\varepsilon, \varphi >= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \oint\limits_{\gamma} \int\limits_{-\infty}^{0} G_\lambda(y, y_0)\beta(y)\varphi(x, y)dy\alpha(x)\mathcal{H}_\lambda d\lambda dx. \tag{35}$$

Заменяя контур интегрирования γ лучем $(-\omega^2 d_1, +\infty)$ (см. рис. 2), получаем:

$$< \tilde{u}_\varepsilon, \varphi >= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\omega^2 d_1}^{+\infty} \alpha(x)\mathcal{H}_\lambda(x, x_0)Y_\lambda(y_0)\widehat{\varphi}(x, \lambda)d\mu(\lambda)dx. \tag{36}$$

Равенство (32) доказано.

3. Единственность

Единственность решения уравнения (5) в Φ' доказывается стандартным методом. Убедимся в том, что если для v из Φ'

$$L(v) = 0, \tag{37}$$

то $v = 0$. Легко видеть, что для любой φ из Φ определено

$$U(\varphi) = \int\limits_{\Omega} \alpha(\xi)\beta(\zeta)u_\varepsilon(x, y, \xi, \zeta)\varphi(\xi, \zeta)d\xi d\zeta.$$

Простые, но громоздкие оценки показывают, что $U(\varphi)$ является элементом Φ и $L(U(\varphi)) = \varphi$. Равенство (37) означает, в частности, что $< v, L\psi >= 0$, где $\psi = U(\varphi)$, а φ – произвольный элемент пространства основных функций. Следовательно, $< v, \varphi >= 0$ для любого φ. Это и означает, что $v = 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93–011–16148).

Литература

1. С. А. Коченгин, *Задача о точечном источнике волн SH в случае деления переменных.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **210** (1994), 125–145.
2. О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики.* М, 1973.
3. О. А. Ладыженская, *О методе Фурье для волнового уравнения.* — ДАН СССР **75 No.6** (1950), 765–768.
4. И. М. Гельфанд, А. Г. Костюченко, *О разложении по собственным функциям дифференциальных и других операторов.* — ДАН СССР **103 No.3** (1955), 349–352.

5. Э. Ч. Титчмарш, *Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка.* т. 2, М, 1961.

Kochengin S. A. Justification of the construction of the solution of a problem on a point source of SH waves in a layered media with a vertical boundary.

The solution was found by the separation of variables method. Justification is made by using suitable space of generalized functions. Boundary conditions "are hid" in the space.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им.В. А. Стеклова РАН

Поступило 15 апреля 1994 г.