Ю. А. Альпин, С. Н. Ильин, Бесконечные продолжения теплицевых матриц, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2003, том 296, 5–14

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 296, 2003 г.

Ю. А. Альпин, С. Н. Ильин

БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОДОЛЖЕНИЯ ТЕПЛИЦЕВЫХ МАТРИЦ

Конечная или бесконечная матрица $A = (a_{ij})$ с элементами из поля F называется теплицевой, если $a_{ij} = a_{kl}$ при $i - j = k - l$. Пусть T – прямоугольная теплицева матрица. Обозначим через $T_{\mathbb{N}}$ продолжение T – бесконечную теплицеву матрицу, строки и столбцы которой занумерованы натуральными числами и угловой блок которой совпадает с T. Алгебраическая теория продолжений ганкелевых и теплицевых матриц, ранг которых совпадает с рангом исходной матрицы, построена в [1]. При этом задача продолжения для теплицевых матриц оказалась сложнее, чем для ганкелевых, в особенности для прямоугольного случая (см. [2]). В этой заметке мы интересуемся теплицевыми продолжениями наименьшего возможного ранга и выводим формулу для наименьшего из рангов бесконечных теплицевых продолжений матрицы T. Следует отметить, что продолжения наименьшего ранга обобщенных ганкелевых матриц изучались в [3].

Обозначение $T_{\mathbb{N}}$ вместо T_∞, принятого в книге [1], используется по той причине, что мы дополнительно вводим в рассмотрение бесконечную теплицеву матрицу $T_{\mathbb{Z}}$, строки и столбцы которой занумерованы целыми числами. Матрица $T_{\mathbb{Z}}$ представляет собой таблицу чисел, заполняющую плоскость, она содержит $T_{\mathbb{N}}$ в качестве правого нижнего угла. В силу свойства теплицевости матрица $T_{\mathbb{N}}$ полностью определяет матрицу $T_{\mathbb{Z}}$, и ранги этих матриц совпадают.

Мы будем пользоваться тем свойством матрицы $T_{\mathbb{Z}}$, что она определяется любой своей строкой: каждая строка получается из предыдущей сдвигом на одну позицию вправо. Аналогичное замечание относится и к столбцам.

Рассмотрим теплицеву $l \times m$-матрицу

$$T=\begin{pmatrix} t_l & t_{l+1} & \dots & t_{l+m-1} \\ t_{l-1} & t_l & \dots & t_{l+m-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_1 & t_2 & \dots & t_m \end{pmatrix}.$$

Обозначим наименьший из рангов бесконечных теплицевых продолжений матрицы T через $\mathrm{rt}(T)$. Очевидно, $\mathrm{rt}(T)=0$, только если T – нулевая матрица. Исключим этот случай из рассмотрения.

Положим $n=l+m-1$ и рассмотрим ряд теплицевых матриц

$$T_1=(t_1,\dots,t_n),\quad T_2=\begin{pmatrix} t_2 & t_3 & \dots & t_n \\ t_1 & t_2 & \dots & t_{n-1} \end{pmatrix},\quad \dots,\quad T_n=\begin{pmatrix} t_n \\ \vdots \\ t_1 \end{pmatrix},$$

содержащих один и тот же набор элементов $t_1, \dots, t_n$. В этом ряду матриц T_l совпадает с T. Нетрудно заметить, что матрицы T_k имеют одно и то же множество теплицевых продолжений. Точнее, всякое продолжение матрицы T_{k+1} получается из продолжения матрицы T_k сдвигом – заменой (i,j)-элемента на $(i,j+1)$-элемент. Следовательно, в дальнейшем мы можем без потери общности считать, что матрица T имеет размеры $1\times n$.

Лемма 1. *Пусть* $T=(t_1,\dots,t_n)$. *Тогда* $\mathrm{rt}(T)\leqslant n$.

Доказательство. Любой минор порядка $n+1$ продолжения $T_{\mathbb{Z}}$, задаваемого строкой $(\dots,t_1,\dots,t_n,t_1,\dots,t_n,\dots)$, содержит две одинаковых строки и, значит, равен 0. $\square$

Лемма 2. *Если* $\mathrm{rank}(T_{\mathbb{Z}})\geqslant r$, *то любые* r *подряд идущих строк матрицы* $T_{\mathbb{Z}}$ *линейно независимы.*

Доказательство. Так как любые две строки матрицы $T_{\mathbb{Z}}$ равноправны в том смысле, что одна получается из другой сдвигом на некоторое число позиций влево или вправо, то доказательство достаточно провести для строк с номерами $1, \dots, r$. Через $t^{(i)}$ обозначим i-ю строку матрицы $T_{\mathbb{Z}}$. Предположим, что $t^{(1)}, \dots, t^{(r)}$ линейно зависимы. Тогда существуют коэффициенты $(\mu_1,\dots,\mu_r)\neq(0,\dots,0)$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{r}\mu_i t^{(i)}=0. \tag{1}$$

Можно считать, что $\mu_1 \neq 0$ и $\mu_r \neq 0$ (в противном случае удалим из системы $\{t^{(1)}, \ldots, t^{(r)}\}$ первые и последние строки, входящие в равенство (1) с нулевыми коэффициентами, применим при необходимости сдвиг влево и получим аналогичное равенство $\sum\limits_{j=1}^{r'} \nu_j t^{(j)} = 0$, где $r' < r$, $\nu_1 \neq 0$ и $\nu_{r'} \neq 0$).

С учетом равноправия строк равенство (1) справедливо для любых r идущих подряд строк матрицы $T_{\mathbb{Z}}$:

$$\sum_{i=1}^{r} \mu_i t^{(i+k)} = 0, \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Поскольку $\mu_r \neq 0$, то из (2) при $k = 0$ выводим, что строка $t^{(r)}$ является линейной комбинацией строк $t^{(1)}, \ldots, t^{(r-1)}$. Аналогично, полагая в (2) $k = 1$, получаем, что строка $t^{(r+1)}$ является линейной комбинацией строк $t^{(2)}, \ldots, t^{(r)}$ и, следовательно, линейно выражается через строки $t^{(1)}, \ldots, t^{(r-1)}$. Повторяя проведенные рассуждения, придем к тому, что любая строка $t^{(i)}$ при $i \geqslant 1$ является линейной комбинацией строк $t^{(1)}, \ldots, t^{(r-1)}$. Используя подобным образом условие $\mu_1 \neq 0$, можно показать, что любая строка $t^{(j)}$ при $j \leqslant 0$ тоже является линейной комбинацией строк $t^{(1)}, \ldots, t^{(r-1)}$. Но тогда ранг системы строк матрицы $T_{\mathbb{Z}}$ не превосходит $r - 1$, что противоречит предположению $\operatorname{rank}(T_{\mathbb{Z}}) \geqslant r$. $\square$

Заметим, что лемму 2 можно получить как простое следствие теоремы 15.4 [1], утверждающей, что в матрице $T_{\mathbb{N}}$ ранга r угловой минор порядка r отличен от нуля. Но эта теорема доказана в рамках теории (r, k, l)-характеристик теплицевых матриц, развитой в книге [1], и мы сочли полезным привести короткое независимое доказательство.

Обозначим через T'_k и T''_k расширенные матрицы $(T_k|e_1)$ и $(T_k|e_k)$, где e_1 и e_k – первый и, соответственно, последний столбцы единичной матрицы порядка k. Положим $S = \Big\{k \mid \operatorname{rank}(T_k) < \min\{\operatorname{rank}(T'_k), \operatorname{rank}(T''_k)\}\Big\}$.

Теорема 1.

$$\operatorname{rt}(T) = \begin{cases} \min\limits_{k \in S} k - 1, & S \neq \varnothing, \\ n, & S = \varnothing. \end{cases}$$

Замечание. Нетрудно видеть, что условие $\mathrm{rank}(T_k) < \mathrm{rank}(T'_k)$ (соответственно, $\mathrm{rank}(T_k) < \mathrm{rank}(T''_k)$) означает, что первая (последняя) строка матрицы T_k является линейной комбинацией остальных ее строк, поэтому формулировка теоремы эквивалентна следующему утверждению: $\mathrm{rt}(T)$ – это наибольшее значение $k \leqslant n$ такое, что в матрице T_k первая строка не является линейной комбинацией последующих строк или последняя строка не является линейной комбинацией предыдущих строк.

Доказательство. В силу леммы 1 достаточно установить справедливость двух утверждений:

1) Если существует теплицево продолжение $T_{\mathbb{Z}}$ ранга $r < n$, то $r+1 \in S$.

2) Если $r+1 \in S$, то существует теплицево продолжение $T_{\mathbb{Z}}$, ранг которого не превосходит r.

Докажем первое утверждение. Пусть $T_{\mathbb{Z}}$ – теплицево продолжение ранга $r < n$. Тогда в системе строк матрицы $T_{\mathbb{Z}}$ существует базис, состоящий из r строк. Ввиду леммы 2 его образуют любые r подряд идущих строк. Составим из строк $t^{(1)}, \ldots, t^{(r+1)}$ матрицу с бесконечным числом столбцов. Она содержит в качестве подматрицы матрицу T_{r+1}. Строка $t^{(r+1)}$ является линейной комбинацией строк $t^{(1)}, \ldots, t^{(r)}$, следовательно, последняя строка матрицы T_{r+1} линейно выражается через ее первые r строк, что, согласно замечанию к теореме, означает справедливость неравенства $\mathrm{rank}(T_{r+1}) < \mathrm{rank}(T''_{r+1})$. Аналогично, строка $t^{(1)}$ является линейной комбинацией строк $t^{(2)}, \ldots, t^{(r+1)}$, так что первая строка матрицы T_{r+1} линейно выражается через ее последние r строк, что влечет выполнение неравенства $\mathrm{rank}(T_{r+1}) < \mathrm{rank}(T'_{r+1})$. Следовательно, $r+1 \in S$.

Перейдем к доказательству второго утверждения. Пусть $r+1 \in S$. Тогда в матрице T_{r+1} первая строка линейно выражается через последние r строк, а последняя строка — через первые r строк. Следовательно, для некоторых $\alpha_1, \ldots, \alpha_r,\ \beta_2, \ldots, \beta_{r+1} \in F$

$$\begin{cases} \alpha_1 t_1 + \cdots + \alpha_r t_r - t_{r+1} = 0, \\ \qquad \cdots\cdots \\ \alpha_1 t_{n-r} + \cdots + \alpha_r t_{n-1} - t_n = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} t_1 - \beta_2 t_2 - \cdots - \beta_{r+1} t_{r+1} = 0, \\ \qquad \cdots\cdots \\ t_{n-r} - \beta_2 t_2 - \cdots - \beta_{r+1} t_n = 0. \end{cases}$$

Тогда существуют $\mu_1,\dots,\mu_{r+1}$ такие, что $\mu_1\neq 0$, $\mu_{r+1}\neq 0$ и

$$\begin{cases} \mu_1 t_1+\dots+\mu_{r+1}t_{r+1}=0,\\ \quad\dots\dots\\ \mu_1 t_{n-r}+\dots+\mu_{r+1}t_n=0 \end{cases}$$

(указанным условиям будет, очевидно, удовлетворять по крайней мере один из наборов $(\alpha_1,\dots,\alpha_r,-1)$, $(1,-\beta_2,\dots,-\beta_{r+1})$, $(\alpha_1+1,\alpha_2-\beta_2,\dots,\alpha_r-\beta_r,-1-\beta_{r+1})$). Используя условия $\mu_1\neq 0$ и $\mu_{r+1}\neq 0$, зададим рекуррентные соотношения:

$$t_{m+1}=-\frac{\mu_1}{\mu_{r+1}}t_{m-r+1}-\dots-\frac{\mu_r}{\mu_{r+1}}t_m,\qquad m\geqslant n,$$

$$t_{m-1}=-\frac{\mu_2}{\mu_1}t_m-\dots-\frac{\mu_{r+1}}{\mu_1}t_{m+r-1},\qquad m\leqslant 1,$$

по которым найдем строку $(\dots,t_{-n},\dots,t_{-1},t_0,t_1,\dots,t_n,t_{n+1},\dots)$, определяющую бесконечное теплицево продолжение $T_{\mathbb{Z}}$. По построению любые $r+1$ идущих подряд строк матрицы $T_{\mathbb{Z}}$ линейно зависимы, откуда, ввиду леммы 2, $\operatorname{rank}(T_{\mathbb{Z}})\leqslant r$. $\Box$

В лемме 1 было доказано, что $\operatorname{rt}(T)$ всегда не превосходит длины строки $T=(t_1,\dots,t_n)$. Из замечания к теореме 1 легко следует условие равенства этих величин.

Следствие. *Равенство* $\operatorname{rt}(T)=n$ *справедливо тогда и только тогда, когда* $T=(\alpha,0,\dots,0)$ *или* $T=(0,\dots,0,\alpha)$*, где* $\alpha\neq 0$.

Допустим теперь, что элементами матриц могут быть не только элементы поля F, но и полиномы от многих переменных с коэффициентами из F. Как и в [3], назовем рангом полиномиальной матрицы наибольший из порядков ее миноров, равных ненулевому элементу поля F.

Пусть, как и прежде, $T=(t_1,\dots,t_n)$. Рассмотрим полиномиальную матрицу

$$T_{\mathbb{N}}(\{x_j^{(i)}\})=\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \dots & t_n & x_{n+1}^{(1)} & x_{n+2}^{(1)} & \dots\\ x_0^{(2)} & t_1 & \dots & t_{n-1} & t_n & x_{n+1}^{(2)} & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ x_{-n+3}^{(n-1)} & x_{-n+4}^{(n-1)} & \dots & t_1 & t_2 & t_3 & \dots\\ x_{-n+2}^{(n)} & x_{-n+3}^{(n)} & \dots & x_0^{(n)} & t_1 & t_2 & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

где верхний индекс при переменной обозначает номер строки, в которой она расположена. Если в этой матрице положить $x_k^{(i)} = x_k^{(j)}$ для всех i, j, k, то получим полиномиальную теплицеву матрицу $T_{\mathbb{N}}(\{x_j\})$, являющуюся продолжением матрицы T. Обозначим через $\mathrm{rltp}(T)$ и $\mathrm{rtp}(T)$, соответственно, ранги матриц $T_{\mathbb{N}}(\{x_j^{(i)}\})$ и $T_{\mathbb{N}}(\{x_j\})$. Очевидно, любое теплицево продолжение $T_{\mathbb{N}}$ матрицы T можно получить из $T_{\mathbb{N}}(\{x_j\})$, придав соответствующие значения переменным $\{x_j\}$. Продолжения матрицы T, полученные аналогичным образом из матрицы $T_{\mathbb{N}}(\{x_j^{(i)}\})$ (и не являющиеся, вообще говоря, теплицевыми), будем называть ограниченно-теплицевыми. Наименьший из рангов всевозможных ограниченно-теплицевых продолжений матрицы T обозначим через $\mathrm{rlt}(T)$.

Некоторые соотношения между введенными выше четырьмя характеристиками теплицевой матрицы T усматриваются без труда. Действительно, легко видеть, что $\mathrm{rlt}(T) \leqslant \mathrm{rt}(T)$ и $\mathrm{rltp}(T) \leqslant \mathrm{rtp}(T)$. Если некоторый минор в матрице $T_{\mathbb{N}}(\{x_j\})$ равен отличному от нуля элементу поля, то в любом теплицевом продолжении $T_{\mathbb{N}}$ этот минор тоже отличен от нуля, откуда $\mathrm{rtp}(T) \leqslant \mathrm{rt}(T)$. Аналогично, $\mathrm{rltp}(T) \leqslant \mathrm{rlt}(T)$. Таким образом, выполнены неравенства $\mathrm{rltp}(T) \leqslant \mathrm{rtp}(T) \leqslant \mathrm{rt}(T)$ и $\mathrm{rltp}(T) \leqslant \mathrm{rlt}(T) \leqslant \mathrm{rt}(T)$. Однако, оказывается справедливым более сильное утверждение, а именно верна

Теорема 2.

$$\mathrm{rt}(T) = \mathrm{rlt}(T) = \mathrm{rtp}(T) = \mathrm{rltp}(T).$$

Доказательство. Достаточно установить справедливость неравенства $\mathrm{rt}(T) \leqslant \mathrm{rltp}(T)$. Пусть $\mathrm{rt}(T) = r$. Докажем несколько вспомогательных лемм. Обозначим через J_p перестановочную матрицу порядка p, элементы побочной диагонали которой равны 1, а все остальные элементы равны 0. Непосредственно проверяется

Лемма 3. *Пусть $1 \leqslant k \leqslant n$. Тогда $T_{n-k+1} = J_{n-k+1} T_k^t J_k$.*

Лемма 4. *Пусть $T = (t_1, \dots, t_n)$, $\mathrm{rt}(T) = r$ и $r \leqslant k \leqslant n$. Тогда ранг матрицы T_k совпадает с рангом ее подматрицы, образованной r первыми или r последними строками.*

Доказательство. Утверждение тривиально, если $k = r$, поскольку все три указанные в условии матрицы в этом случае совпадают. Поэтому можно считать, что $r < k \leqslant n$. Пусть B – подматрица матрицы T_k, образованная r последними строками (для подматрицы, образованной r первыми строками, доказательство проводится аналогично). Очевидно, достаточно доказать неравенство $\mathrm{rank}(T_k) \leqslant \mathrm{rank}(B)$. Так как $r < n$, то, согласно теореме 1 и замечанию к ней, первая строка матрицы T_{r+1} является линейной комбинацией ее последних r строк, значит, найдутся коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ такие, что

$$\begin{cases} t_{r+1} = \alpha_1 t_1 + \cdots + \alpha_r t_r, \\ t_{r+2} = \alpha_1 t_2 + \cdots + \alpha_r t_{r+1}, \\ \ldots\ldots \qquad \ldots \\ t_n = \alpha_1 t_{n-r} + \cdots + \alpha_r t_{n-1}. \end{cases}$$

Первые $n-k+1$ из этих равенств означают, что $(r+1)$-ая, считая от последней, строка матрицы T_k является линейной комбинацией строк матрицы B; равенства со 2-го по $(n-k+2)$-ое – что $(r+2)$-ая, считая от последней, строка матрицы T_k линейно выражается через последние ее $r+1$ строк и, значит, через строки матрицы B, и так далее. В итоге получим, что все строки матрицы T_k линейно выражаются через строки матрицы B, откуда $\mathrm{rank}(T_k) \leqslant \mathrm{rank}(B)$. $\square$

Из лемм 3 и 4 немедленно выводится следующая

Лемма 5. *Пусть* $T = (t_1, \ldots, t_n)$, $\mathrm{rt}(T) = r$ *и* $1 \leqslant k \leqslant n-r+1$. *Тогда ранг матрицы* T_k *совпадает с рангом ее подматрицы, образованной* r *первыми или* r *последними столбцами.*

Лемма 6. *Пусть* $T = (t_1, \ldots, t_n)$ *и* $\mathrm{rt}(T) = r$. *Тогда* $\mathrm{rank}(T_r) = \min\{r, n-r+1\}$.

Доказательство. Очевидно, $\mathrm{rank}(T_r) \leqslant \min\{r, n-r+1\}$. Предположим от противного, что это неравенство является строгим. В силу теоремы 1 выполнено по крайней мере одно из равенств $\mathrm{rank}(T_r) = \mathrm{rank}(T_r')$ и $\mathrm{rank}(T_r) = \mathrm{rank}(T_r'')$. Пусть, для определенности, справедливо второе равенство (для первого равенства доказательство проводится аналогично). Тогда с учетом строения матриц $T_1, \ldots, T_r$ равенство $\mathrm{rank}(T_k) = \mathrm{rank}(T_k'')$ верно для всех $k \leqslant r$. Возможны два случая:

1. $r \leqslant n-r+1$. Тогда $\mathrm{rank}(T_r) < r$, значит, строки матрицы T_r линейно зависимы. Согласно замечанию к теореме 1, равенство

$\operatorname{rank}(T_r) = \operatorname{rank}(T_r'')$ означает, что последняя строка матрицы T_r не является линейной комбинацией первых $r-1$ строк, поэтому ранг подматрицы, образованной первыми $r-1$ строками матрицы T_r, строго меньше $r-1$. Но первые r столбцов этой подматрицы совпадают с первыми r столбцами матрицы T_{r-1}, откуда с учетом леммы 5 выводим $\operatorname{rank}(T_{r-1}) < r-1$. Поскольку для матрицы T_{r-1} выполняется равенство $\operatorname{rank}(T_{r-1}) = \operatorname{rank}(T''_{r-1})$, то, повторяя приведенные выше рассуждения применительно к матрице T_{r-1}, получим $\operatorname{rank}(T_{r-2}) < r-2$ и так далее, и, наконец, получим $\operatorname{rank}(T_1) < 1$. Но последнее неравенство противоречит условию $\operatorname{rank}(T_1) = \operatorname{rank}(T_1'')$.

2. $n-r+1 < r$. В этом случае в силу леммы 3 получаем $\operatorname{rank}(T_{n-r+1}) = \operatorname{rank}(T_r) < n-r+1$ и $\operatorname{rank}(T_{n-r+1}) = \operatorname{rank}(T''_{n-r+1})$. Повторяя рассуждения п. 1 применительно к матрицам T_{n-r+1}, T_{n-r}, ..., T_1, вновь приходим к противоречащим друг другу условиям $\operatorname{rank}(T_1) < 1$ и $\operatorname{rank}(T_1) = \operatorname{rank}(T_1'')$. $\square$

Завершим доказательство теоремы. Как и в доказательстве леммы 6, рассмотрим два случая.

1. $r \leqslant n-r+1$. Тогда, согласно лемме 6, $\operatorname{rank}(T_r) = r$, следовательно, в матрице T_r есть минор порядка r, равный отличному от нуля элементу поля, так что $\operatorname{rltp}(T) \geqslant r = \operatorname{rt}(T)$. (Используя лемму 5, такой минор можно указать явно – им, например, будет минор $\begin{vmatrix} t_r & \dots & t_{2r-1} \\ & \dots & \\ t_1 & \dots & t_r \end{vmatrix}$.)

2. $n-r+1 < r$. Как и в доказательстве леммы 6, можно считать, что $\operatorname{rank}(T_r) = \operatorname{rank}(T_r'')$. Рассмотрим следующий минор порядка r матрицы $T_{\mathbb{N}}(\{x_j^{(i)}\})$

$$M = \begin{vmatrix} t_{n-r+1} & t_{n-r+2} & \dots & t_r & \dots & t_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_1 & t_2 & \dots & t_{2r-n} & \dots & t_r \\ x_0^{(n-r+2)} & t_1 & \dots & t_{2r-n-1} & \dots & t_{r-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{2r-n-2}^{(r)} & x_{2r-n-3}^{(r)} & \dots & t_1 & \dots & t_{n-r+1} \end{vmatrix}.$$

Разлагая последовательно каждый из первых $2r-n-1$ столбцов в сумму вида $(a_1\ \ldots\ a_{r-1}\, a_r)^t = (a_1\ \ldots\ a_{r-1}\, 0)^t + (0\ \ldots\ 0\, a_r)^t$, получим

$$M = \sum_{s=0}^{2r-n-2} \begin{vmatrix} t_{n-r+1} & \ldots & 0 & \ldots & t_r & \ldots & t_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_0^{(n-r+2)} & \ldots & 0 & \ldots & t_{2r-n-1} & \ldots & t_{r-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & x_s^{(r)} & \ldots & t_1 & \ldots & t_{n-r+1} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} t_{n-r+1} & \ldots & t_r & \ldots & t_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_0^{(n-r+2)} & \ldots & t_{2r-n-1} & \ldots & t_{r-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & t_1 & \ldots & t_{n-r+1} \end{vmatrix}.$$

Заметим, что последние $n-r+1$ столбцов минора M образуют матрицу T_r. Поскольку $\operatorname{rank}(T_r) = \operatorname{rank}(T_r'')$, то столбец $(0\ \ldots\ 0\, 1)^t$ является линейной комбинацией столбцов матрицы T_r. Следовательно, все определители, находящиеся под знаком суммы, равны 0, поэтому M не зависит от переменных, входящих в его r-ю строку. Положим их равными 0. Теперь разложим последовательно каждый из первых $2r-n-2$ столбцов получившегося определителя в сумму вида $(a_1\ \ldots\ a_{r-2}\, a_{r-1}\, 0)^t = (a_1\ \ldots\ a_{r-2}\, 0\, 0)^t + (0\ \ldots\ 0\, a_{r-1}\, 0)^t$ и представим определитель в виде суммы определителей, последний из которых не содержит переменных, входящих в $(r-1)$-ю строку минора M. Заметим, что если из M вычеркнуть последнюю строку, то последние $n-r+2$ столбцов получившейся матрицы образуют матрицу T_{r-1}. Так как $\operatorname{rank}(T_{r-1}) = \operatorname{rank}(T_{r-1}'')$ и $\operatorname{rank}(T_r) = \operatorname{rank}(T_r'')$, то столбец $(0\ \ldots\ 0\, 1\, 0)^t$ является линейной комбинацией последних $n-r+2$ столбцов минора M, поэтому первые $2r-n-2$ определителей в последней сумме равны 0, так что M не зависит от переменных, входящих в его $(r-1)$-ю строку. Полагаем их равными 0. Аналогично доказывается, что M не зависит от переменных, входящих в его $(r-2)$-ю, $\ldots$, $(n-r+2)$-ю строки. Следовательно, M равен некоторому элементу поля.

В процессе доказательства было установлено, что линейными комбинациями столбцов минора M являются последние $2r-n-1$ столбцов единичной матрицы порядка r. Кроме того, первые $n-r+1$ строк минора M образуют матрицу T_{n-r+1}, причем они линейно независимы, так как в силу лемм 3 и 6 $\operatorname{rank}(T_{n-r+1}) = \operatorname{rank}(T_r) = n-r+1$. Следовательно, линейными комбинациями столбцов минора M являются также первые $n-r+1$ столбцов единичной матрицы порядка r. Но это означает, что $M \neq 0$. Таким образом, в матрице $T_{\mathbb{N}}(\{x_j^{(i)}\})$ есть минор порядка r, равный отличному от нуля элементу поля, откуда $\mathrm{rltp}(T) \geqslant r = \mathrm{rt}(T)$. $\square$

Литература

1. И. С. Иохвидов, *Ганкелевы и теплицевы матрицы и формы*. — М., Наука (1974).
2. И. С. Иохвидов, О. Д. Толстых, *Об (r,k,l)-характеристиках прямоугольных теплицевых матриц*. — Укр. мат. журнал, **32** (1980), 477–482.
3. Ю. А. Альпин, Н. З. Габбасов, *Продолжение обобщенных ганкелевых матриц*. — Изв. вузов, Математика, N 5 (1981), 35–39.

Al'pin Yu. A., Il'in S. N. Infinite extensions of Toeplitz matrices.

A formula for the minimal rank of infinite Toeplitz extensions of a finite rectangular Toeplitz matrix is derived.

Казанский государственный университет

Поступило 15 марта 2003 г.