УДК 519.652:519.632.4

О. Н. ЛИТВИН

ОБОБЩЕННАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

При решении краевых задач эллиптического типа в работах [1—8] используется идея метода разделения переменных совместно с вариационными методами. В отечественной и зарубежной литературе этот метод называют вариационным методом разделения переменных, а также обобщенным методом Л. В. Канторовича. По сути своей он является методом сведения исходной краевой задачи к системе обыкновенных нелинейных интегродифференциальных уравнений (н. и. -д. у.); поэтому мы называем его методом НИДУ. Несмотря на высокую точность этого метода, отмечаемую в цитируемых работах (см. также ссылки в них), его применение ограничивалось в основном областями прямоугольной формы или сводящимися к ним. Основные трудности на пути расширения сферы действия этого метода включают в себя трудности построения структур приближенных решений, позволяющих с помощью конечного числа слагаемых, являющихся произведениями одномерных функций, зависящих от различных переменных, удовлетворять граничным условиям, условиям принадлежности приближенного решения требуемому классу дифференцируемости и т. п.

Данная работа посвящена обобщению результатов, полученных в работах [8, 9]. А именно, в § 1 изложена методика конструирования оригинальных нелинейных интерполянтов, содержащих как частный случай результаты работы [9], а также интерполяционную формулу Бэтмена [10, с. 170]. В § 2 разрабатываются алгоритмы построения структур приближенных решений краевых задач для самосопряженного дифференциального уравнения эллиптического типа порядка $2m$. В § 3 рассматриваются вопросы численной реализации предлагаемых алгоритмов.

§ 1. НЕЛИНЕЙНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ НА РЕКТАНГУЛИРУЕМЫХ ОБЛАСТЯХ

Пусть $\mathcal{Y}=\{\mathbf{x}=(x_1, x_2): x_i \in [a_{i1}, a_{i,\nu_i}],\ i=1, 2\}$. Разобьем $\mathcal{Y}$ на элементарные прямоугольники (элементы) прямыми $x_i = a_{ip}$, $p=\overline{1, \nu_i}$; $\nu_i \geqslant 1$; $a_{i1} < a_{i2} < \ldots < a_{i\nu_i}$, $i=1, 2$. Для $f(\mathbf{x}) \in C^{m-1, m-1}(\mathcal{Y})$ введем обозначения $f_{pq}^{ij} = \partial^{i+j} f(a_{1p}, a_{2q})/\partial x_1^i\, \partial x_2^j$; $f_{pq}^{00} = f_{pq}$; $p=\overline{1, \nu_1}$, $q=\overline{1, \nu_2}$, $F_{ij} = [f_{pq}^{ij}]_{p=\overline{1,\nu_1}}^{q=\overline{1,\nu_2}}$; $\mathbf{f}_{1j}^T(x_1) = [f^{(0,j)}(x_1, a_{21}), \ldots, f^{(0,j)}(x_1, a_{2\nu_2})]$, $\mathbf{f}_{2i}^T(x_2) = [f^{(i,0)}(a_{11}, x_2), \ldots, f^{(i,0)}(a_{1\nu_1}, x_2)]$, $i, j=\overline{0, m-1}$, I_n — единичная матрица n-го порядка; $\mathbf{1}_n$, $\mathbf{0}_n$ — векторы n-го порядка, все компоненты которых равны 1 и 0 соответственно.

Теорема 1. *Функция*

$$L_m(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{m-1} \mathbf{f}_{1j}^T(x_1) A_{ij}^m \mathbf{f}_{2i}(x_2) + \sum_{j=0}^{m-1} \mathbf{f}_{1j}^T(x_1)\, \boldsymbol{\Gamma}_{1j}^{(m)} + \sum_{i=0}^{m-1} (\boldsymbol{\Gamma}_{2i}^{(m)})^T \mathbf{f}_{2i}(x_2) + \beta, \tag{1.1}$$

где матрицы $A_{ij}^{(m)}$ *размера* $\nu_2 \times \nu_1$ *и векторы* $\boldsymbol{\Gamma}_{ri}^{(m)}$, $r=1, 2$, $i=\overline{0, m-1}$, *порядков* ν_2, ν_1 *соответственно находятся из следующей системы матричных уравнений:*

$$\sum_{j=0}^{m-1} F_{kj} A_{ij}^{(m)} + [\underbrace{\boldsymbol{\Gamma}_{2i}^{(m)}, \ldots, \boldsymbol{\Gamma}_{2i}^{(m)}}_{\nu_1 \text{ раз}}]^T \delta_{k0} = I_{\nu_1} \delta_{ki}, \quad k, i=\overline{0, m-1}, \tag{1.2}$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} F_{kj} \boldsymbol{\Gamma}_{1j}^{(m)} + \beta \mathbf{1}_{\nu_1} \delta_{k0} = \mathbf{0}_{\nu_1}, \quad k=\overline{0, m-1}, \tag{1.3}$$

$$\sum_{i=0}^{m-1} A_{ij}^{(m)} F_{il} + \underbrace{[\Gamma_{1j}^{(m)}, \ldots, \Gamma_{1j}^{(m)}]}_{\nu_2 \text{ раз}} \delta_{l0} = I_{\nu_2}\delta_{lj}, \quad l, j = \overline{0, m-1}, \tag{1.4}$$

$$\sum_{i=0}^{m-1} (\Gamma_{2i}^{(m)})^T F_{il} + \beta \mathbf{1}_{\nu_2}^T \delta_{l0} = \mathbf{0}_{\nu_2}^T, \quad l = \overline{0, m-1}, \tag{1.5}$$

удовлетворяет независимо от выбора параметра $\beta \in (-\infty, \infty)$ *следующим условиям (при условии, что система (1.2), (1.3) имеет решение — для этого необходимо, в частности, при* $\beta \neq 0$, $\nu_1 = \nu_2$, *чтобы* $\det [F_{ij}]_{i,j=0}^{i,j=m-1} \neq 0$):

$$L_m^{(i,0)}(a_{ik}, x_2) = f^{(i,0)}(a_{ik}, x_2), \quad k = \overline{1, \nu_1}; \quad L^{(0,j)}(x_1, a_{2l}) = f^{(0,j)}(x_1, a_{2l}),$$
$$l = \overline{1, \nu_2}, \quad i, j = \overline{0, m-1}. \tag{1.6}$$

Доказательство проводится непосредственной проверкой.

Замечание 1. Формулу (1.1) можно представить также в виде

$$L_m(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{m-1} \mathbf{S}_{1i}^T(x_1)\, \mathbf{f}_{2i}(x_2) + g_1(x_1), \tag{1.7}$$

$$L_m(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{m-1} \mathbf{f}_{1j}^T(x_1)\, \mathbf{S}_{2j}(x_2) + g_2(x_2), \tag{1.8}$$

или (при $\beta = 0$)

$$L_m(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{m-1} \mathbf{S}_{1i}^T(x_1)\, \mathbf{f}_{2i}(x_2) + \sum_{j=0}^{m-1} \mathbf{f}_{1j}^T(x_1)\, \mathbf{S}_{2j}(x_2) -$$
$$- \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1} \mathbf{S}_{1i}^T(x_1) F_{ij} \mathbf{S}_{2j}(x_2), \tag{1.9}$$

где (при $\beta \neq 0$)

$$\mathbf{S}_{1i}^T(x_1) = \sum_{j=0}^{m-1} \mathbf{f}_{1j}^T(x_1) A_{ij}^{(m)} + (\Gamma_{2i}^{(m)})^T, \quad i = \overline{0, m-1}, \tag{1.10}$$

$$\mathbf{S}_{2j}(x_2) = \sum_{i=0}^{m-1} A_{ij}^{(m)} \mathbf{f}_{2i}(x_2) + \Gamma_{1j}^{(m)}, \quad j = \overline{0, m-1}, \tag{1.11}$$

$$g_1(x_1) = \sum_{j=0}^{m-1} \mathbf{f}_{1j}^T(x_1) \Gamma_{1j}^{(m)} + \beta, \tag{1.12}$$

$$g_2(x_2) = \sum_{i=0}^{m-1} (\Gamma_{2i}^{(m)})^T \mathbf{f}_{2i}(x_2) + \beta. \tag{1.13}$$

Функции $\mathbf{S}_{ki}(x_k) = [S_{k1i}(x_k), \ldots, S_{k\nu_k i}(x_k)]^T$, $k = 1, 2$, $i = \overline{0, m-1}$, определяемые формулами (1.10), (1.11), удовлетворяют условиям

$$S_{klj}^{(i)}(a_{kr}) = \delta_{ij}\delta_{lr}, \quad i, j = \overline{0, m-1}, \; l, r = \overline{1, \nu_k}, \; k = 1, 2. \tag{1.14}$$

Если их взять в виде полиномов степени $\nu_k\, m-1$ (т. е. не зависящими от интерполируемой функции), то формула (1.9) дает при $\nu_1 = \nu_2 = 2$ обобщенные кусочно-эрмитовы интерполянты [11, 12], использовавшиеся в работах [13, 14] для решения краевых задач методом ЛИДУ (методом сведения к системам обыкновенных линейных интегро-дифференциальных уравнений).

Следствие 1. *При* $m = 1$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, *если* $\det F_{00} \neq 0$, *то (1.1) примет вид*

$$L_1(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_{10}^T(x_1) F_{00}^{-1} \{I_\nu + \beta \mathbf{1}_\nu \mathbf{1}_\nu^T F_{00}^{-1}\} \mathbf{f}_{20}(x_2) - \\ - \beta \mathbf{1}_\nu^T F_{00}^{-1} \mathbf{f}_{20}(x_2) - \beta \mathbf{f}_{10}^T(x_1) F_{00}^{-1} \mathbf{1}_\nu + \beta. \tag{1.15}$$

При $\beta = 0$ *получаем формулу* $L_1(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_{10}^T(x_1) F_{00}^{-1} \mathbf{f}_{20}(x_2)$, *совпадающую с формулой Бэтмена [10], послужившей основой для известного метода решения интегральных уравнений. Эта формула имеет вид*

$$L_1(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\det F_{00}} \begin{vmatrix} 0 & f(x_{11}, x_2) & \dots & f(x_{1\nu}, x_2) \\ f(x_1, x_{21}) & f(x_{11}, x_{21}) & \dots & f(x_{1\nu}, x_{21}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(x_1, x_{2\nu}) & f(x_{11}, x_{2\nu}) & \dots & f(x_{1\nu}, x_{2\nu}) \end{vmatrix}, \tag{1.16}$$

т. е. имеет место равенство

$$\mathbf{f}_{10}^T(x_1) F_{00}^{-1} \mathbf{f}_{20}(x_2) = -\frac{1}{\det F_{00}} \begin{vmatrix} 0 & f(x_{11}, x_2) & \dots & f(x_{1\nu}, x_2) \\ f(x_1, x_{21}) & f(x_{11}, x_{21}) & \dots & f(x_{1\nu}, x_{21}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(x_1, x_{2\nu}) & f(x_{11}, x_{2\nu}) & \dots & f(x_{1\nu}, x_{2\nu}) \end{vmatrix}. \tag{1.17}$$

Доказательство этого равенства можно провести непосредственной проверкой.

Основываясь на возможности представления исследуемых интерполяционных формул в виде (1.9), совпадающим с представлением обобщенных эрмитовых интерполянтов [11, 12], можно найти интегральное представление для остаточного члена приближения функции $f(\mathbf{x})$ с помощью формулы (1.1) [8].

Замечание 2. Анализ системы матричных уравнений (1.2)—(1.5) показывает, что в некоторых случаях для построения интерполянта $L_m(\mathbf{x})$, удовлетворяющего условиям (1.6), необходимо использовать дополнительную информацию об интерполируемой функции (например, на линиях, не совпадающих с прямыми $x_k = a_{kp}$, $p = \overline{1, \nu_k}$, $k = 1, 2$). В частности, при $m = 1$, $\nu_1 = \nu_2 = 2$; $f(x_1, a_{22}) = f(a_{11}, x_2) = f(a_{12}, x_2) = 0$; $f_{pq} = 0$, $p, q = 1, 2$, интерполянт может быть построен в виде $L_1(\mathbf{x}) = f(x_1, a_{21}) S(x_2)$, $S(a_{21}) = 1$, $S(a_{22}) = 0$, где функция $S(x_2)$ может быть представлена, например, в виде $S(x_2) = f(\xi, x_2)/f(\xi, a_{21})$; $f(\xi, a_{21}) \neq 0$, $\xi \in (a_{11}, a_{12})$.

Пусть область Ω представляет собой объединение прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Разобьем Ω на элементы прямыми $x_k = x_{kp}$, $p = \overline{1, \nu_k}$, $k = 1, 2$. Пусть $\pi = \{(k, l) \mid (x_{1k}, x_{2l}) \in \Omega\}$; $R_{kl} = [x_{1k}, x_{1k+1}] \times [x_{2l}, x_{2l+1}]$. Для функции $f(\mathbf{x}) \in C^{m-1, m-1}(\Omega)$ построим интерполянт $f_{\pi, m}(\mathbf{x})$, интерполирующий $f(\mathbf{x})$ вместе с ее частными производными до порядка $m-1$ на указанной выше системе прямых, имеющий в каждом элементе $R_{kl} \subset \Omega$ вид (1.1). Очевидно, если $f_{\pi, m}(\mathbf{x})$ существует (т. е. для каждого $R_{kl} \subset \Omega$ системы матричных уравнений (1.2)—(1.5) имеют решение), то $f_{\pi, m}(\mathbf{x}) \in C^{m-1, m-1}(\Omega)$.

Приведем, далее, более общую интерполяционную формулу, содержащую интерполяционную формулу (1.1) при $\nu_1 = \nu_2 = 2$ как частный случай

$$f_{\pi, m}(\mathbf{x}) = \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{k'=k}^{k+1} \sum_{l'=l}^{l+1} \varphi_{k'-k+1, k', l', p}(x_1) \psi_{l'-l+1, k', l', p}(x_2), \quad \mathbf{x} \in R_{kl} \subset \Omega, \tag{1.18}$$

где функции $\varphi_{k'-k+1, k', l', p}(x_1) \in C^{m-1}([x_{1k}, x_{1k+1}])$; $\psi_{l'-l+1, k', l', p}(x_2) \in C^{m-1}([x_{2l}, x_{2l+1}])$ удовлетворяют условиям

$$\varphi_{k'-k+1, k', l', q}^{(p)}(x_{1\alpha}) = \delta_{k'\alpha} \{f_{k', l'}^{pq}, \delta_{pq}\}, \quad k', \alpha = k, k+1, \tag{1.19}$$

$$\psi_{l'-l+1, k', l', p}^{(q)}(x_{2\beta}) = \delta_{l'\beta} \{\delta_{pq}, f_{k', l'}^{pq}\}, \quad l', \beta = l, l+1; \; p, q = \overline{0, m-1}.$$

Здесь в фигурных скобках берутся одновременно или первые, или вторые значения, т. е. если $\varphi^{(p)}_{i,k,l,q}(x_{1k})=f^{pq}_{kl}$, то $\psi^{(s)}_{i,k,l,q}(x_{2l})=\delta_{qs}$, причем $(p,q,s=\overline{0,\ m-1})$ $\varphi^{(p)}_{2,k+1,l,q}(x_{1,k+1})=\delta_{pq}$; $\psi^{(s)}_{2,k,l+1,q}(x_{2,l+1})=f^{qs}_{k,l+1}$; $\varphi^{(p)}_{2,k,l+1,q}(x_{1k})=\delta_{pq}$; $\psi^{(s)}_{1,k+1,l,q}(x_{2l})=f^{qs}_{k+1,l}$. Заметим, что ограничения (1.19) используют информацию об интерполируемой функции только в узлах интерполяции. Можно показать, что $f_{\pi,m}(\mathbf{x})\in C^{m-1,m-1}(\Omega)$ и (в предположении, что в $R_{kl}\subset\Omega$ взяты первые числа в фигурных скобках) удовлетворяет условиям

$$f^{(r,s)}_{\pi,m}(x_{1k},\ x_{2l})=f^{rs}_{kl},\ (k,\ l)\in\pi;\ r,\ s=\overline{0,\ m-1},$$

$$f^{(r,0)}_{\pi,m}(x_{1k},\ x_2)=\psi_{2,k,l+1,r}(x_2)+\sum_{q=0}^{m-1}f^{rq}_{kl}\psi_{1,k,l,q}(x_2),$$

$$f^{(r,0)}_{\pi,m}(x_{1,k+1},\ x_2)=\psi_{1,k+1,l,r}(x_2)+\sum_{q=0}^{m-1}f^{rq}_{k+1,l+1}\psi_{2,k+1,l+1,q}(x_2);$$

$$x_2\in[x_{2l},\ x_{2,l+1}],$$

$$f^{(0,s)}_{\pi,m}(x_1,\ x_{2l})=\varphi_{1,k,l,s}(x_1)+\sum_{p=0}^{m-1}f^{ps}_{k+1,l}\varphi_{2,k+1,l,p}(x_1),$$

$$f^{(0,s)}_{\pi,m}(x_1,\ x_{2,l+1})=\varphi_{2,k+1,l+1,s}(x_1)+\sum_{p=0}^{m-1}f^{ps}_{k,l+1}\varphi_{1,k,l+1,p}(x_1),\ x_1\in[x_{1k},\ x_{1,k+1}].$$

В частности, если положить

$$\psi_{2,k,l+1,r}(x_2)\equiv f^{(r,0)}(x_{1k},\ x_2)-\sum_{q=0}^{m-1}f^{rq}_{kl}\psi_{1,k,l,q}(x_2),$$

$$\psi_{1,k+1,l,r}(x_2)\equiv f^{(r,0)}(x_{1,k+1},\ x_2)-\sum_{q=0}^{m-1}f^{rq}_{k+1,l+1}\psi_{2,k+1,l+1,q}(x_2),\ x_2\in[x_{2l},\ x_{2l+1}],$$

$$\varphi_{1,k,l,s}(x_1)=f^{(0,s)}(x_1,\ x_{2l})-\sum_{p=0}^{m-1}f^{ps}_{k+1,l}\varphi_{2,k+1,l,p}(x_1),$$

$$\varphi_{2,k+1,l+1,s}(x_1)=f^{(0,s)}(x_1,\ x_{2,l+1})-\sum_{p=0}^{m-1}f^{ps}_{k,l+1}\varphi_{1,k,l+1,p}(x_1),\ x_1\in[x_{1k},\ x_{1,k+1}],$$

то при соответствующем выборе функций $\psi_{1,k,l,q}(x_2)$, $\varphi_{2,k+1,l+1,q}(x_2)$, $\varphi_{2,k+1,l,p}(x_1)$, $\varphi_{1,k,l+1,p}(x_1)$ получим формулу (1.1) при $\beta=0$ (при этом нужно решать систему (1.2)—(1.5)).

Замечание 3. Интерполянт (1.18), а также аналогичные интерполянты вида (1.1) можно представить в форме, использующей функции, определенные не только на $R_{kl}\subset\Omega$, но и на объединении нескольких $R_{kl}\subset\Omega$, что удобно при решении задач методом НИДУ (см. § 2).

Замечание 4. Если предположить, что функции и постоянные, входящие в $f_{\pi,m}(\mathbf{x})$ (за исключением граничных), являются искомыми, то $f_{\pi,m}(\mathbf{x})$ может быть использована в качестве структуры приближенного решения первой краевой задачи для полигармонического уравнения порядка $2m$ или более общего дифференциального уравнения эллиптического типа порядка $2m$ (см. § 2). В качестве структур приближенных решений можно использовать также структуры $\overline{f}_{\pi,m}(\mathbf{x})=f_{\pi,m}(\mathbf{x})+\sum_{r=1}^{N_{kl}}\xi_{klr}(x_1)\,\zeta_{klr}(x_2)$, $\mathbf{x}\in R_{kl}\subset\Omega$, где $f_{\pi,m}(\mathbf{x})$ строится в каждом из $R_{kl}\subset\Omega$ по указанной выше методике и искомые функции $\xi_{klr}(x_1)$, $\zeta_{klr}(x_2)$ предполагаются удовлетворяющими условиям (ν—нормаль к ∂R_{kl}) $\dfrac{\partial^s}{\partial\nu^s}\sum_{r=1}^{N_{kl}}\xi_{klr}(x_1)\,\zeta_{klr}(x_2)=0$, $\mathbf{x}\in\partial R_{kl}$, $s=\overline{0,\ m-1}$.

§ 2. МЕТОД СВЕДЕНИЯ К СИСТЕМЕ НЕЛИНЕЙНЫХ И. -Д. У

Рассмотрим задачу

$$Lu \equiv \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} (a_{\alpha}(\mathbf{x}) D^{\alpha} u(\mathbf{x})) = g(\mathbf{x}), \ \mathbf{x} \in \Omega, \ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial^s u(\mathbf{x})}{\partial \nu^s} = 0, \ \mathbf{x} \in \partial\Omega, \ s = \overline{0, m-1}, \quad (2.2)$$

ν—нормаль к $\partial\Omega$. Разобьем Ω на прямоугольные элементы так же, как и в § 1. Приближенное решение задачи (2.1), (2.2) будем искать в виде

$$u_{\pi,m}(\mathbf{x}) = \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{k'=k}^{k+1} \sum_{l'=l}^{l+1} \varphi_{k'-k+1,k',l',p}(x_1) \psi_{l'-l+1,k',l',p}(x_2), \ \mathbf{x} \in R_{kl} \subset \Omega. \quad (2.3)$$

Искомые функции $\varphi_{k'-k+1,k',l',p}(x_1)$, $\psi_{k'-k+1,k',l',p}(x_2)$ предполагаем удовлетворяющими следующим условиям:

$$\varphi^{(p)}_{k'-k+1,k',l',q}(x_{1\alpha}) = \delta_{k'\alpha}\{u^{pq}_{k'l'}, \ \delta_{pq}\}, \ k', \ \alpha = k, k+1, \quad (2.4)$$

$$\psi^{(q)}_{l'-l+1,k',l',p}(x_{2\beta}) = \delta_{l'\beta}\{\delta_{pq}, \ u^{pq}_{k'l'}\}, \ l', \ \beta = l, l+1, \ p,q = \overline{0, m-1},$$

где в фигурных скобках берутся первые или вторые значения, согласно сказанному в § 1; u^{pq}_{kl}—искомые постоянные. Полагаем $u^{pq}_{kl} = 0$, $\varphi_{i,k,l,p}(x_1) \equiv \equiv 0$, $\psi_{i,k,l,p}(x_2) \equiv 0$, $\forall (k, l) : (x_{1k}, x_{2l}) \in \partial\Omega$. Тогда функция $u_{\pi m}(\mathbf{x})$, определяемая равенствами (2.3), будет принадлежать классу $u_{\pi,m}(\mathbf{x}) \in C^{m-1,m-1}(\overline{\Omega})$ и удовлетворять граничным условиям (2.2) независимо от выбора остальных неизвестных u^{pq}_{kl} и функций. Таким образом, в структуре приближенного решения, определяемой формулами (2.3), все постоянные и функции (за исключением граничных) оказываются искомыми. Будем их находить из условия достижения минимума функционала $J(u_{\pi,m}(\mathbf{x}))$, где $J(u(\mathbf{x}))$—функционал Ритца, соответствующий исходной краевой задаче. Пусть

$$\Omega_{1k} = \Omega \cap \{x_{1k} \leqslant x_1 \leqslant x_{1,k+1}\} = [x_{1k}, \ x_{1,k+1}] \times [x_{2,n_k-1}, \ x_{2,N_k+1}],$$

$$k = \overline{1, \nu_1 - 1},$$

$$\Omega_{2l} = \Omega \cap \{x_{2l} \leqslant x_2 \leqslant x_{2,l+1}\} = [x_{1,m_l-1}, \ x_{1,M_l+1}] \times [x_{2l}, \ x_{2,l+1}], \quad l = \overline{1, \nu_2 - 1},$$

$$S_{1,k,l,p}(x_1) = \begin{cases} \varphi_{1,k,l,p}(x_1), & x_1 \in [x_{1k}, \ x_{1,k+1}], \\ \varphi_{2,k,l,p}(x_1), & x_1 \in [x_{1,k-1}, \ x_{1k}], \\ 0, & x \notin [x_{1,k-1}, \ x_{1,k+1}], \end{cases}$$

$$S_{2,k,l,p}(x_2) = \begin{cases} \psi_{1,k,l,p}(x_2), & x_2 \in [x_{2l}, \ x_{2,l+1}], \\ \psi_{2,k,l,p}(x_2), & x_2 \in [x_{2,l-1}, \ x_{2l}], \\ 0, & x \notin [x_{2,l-1}, \ x_{2,l+1}]. \end{cases}$$

Запишем $u_{\pi,m}(\mathbf{x})$ в виде

$$u_{\pi,m}(\mathbf{x}) = \sum_{l=n_k}^{N_k} \sum_{k'=k}^{k+1} \sum_{q=0}^{m-1} \varphi_{k'-k+1,k',l,q}(x_1) S_{2,k',l,q}(x_2) = \mathbf{\Phi}^T_k(x_1) \mathbf{S}_{2k}(x_2), \ \mathbf{x} \in \Omega_{1,k}, \quad (2.5)$$

$$u_{\pi,m}(\mathbf{x}) = \sum_{k=m_l}^{M_l} \sum_{l'=l}^{l+1} \sum_{p=0}^{m-1} S_{1,k,l',p}(x_1) \psi_{l'-l+1,k,l',p}(x_2) = \mathbf{S}^T_{1l}(x_1) \Psi_l(x_2),$$

$$\mathbf{x} \in \Omega_{2l}, \ l = \overline{1, \nu_2 - 1}. \quad (2.6)$$

Обозначения очевидны. Подставляя $u_{\pi,m}(\mathbf{x})$ в виде (2.5) в функционал $J(u)$ и минимизируя $J(u_{\pi,m})$ по $\mathbf{\Phi}_k(x_1)$, получим систему

$$\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}(-1)^{\alpha_1}\left(A_{k,\alpha}(x_1)\,\mathbf{\Phi}_k^{(\alpha_1)}(x_1)\right)^{(\alpha_1)}=\mathbf{g}_{1k}(x_1),\quad x_1\in(x_{1k},\ x_{1,k+1}),\quad k=\overline{1,\nu_1-1}\ , \tag{2.7}$$

$$A_{k,\alpha}(x_1)=\int\limits_{x_{2,n_k-1}}^{x_{2,N_k+1}}a_\alpha(x)\,\mathbf{S}_{2k}^{(\alpha_2)}(x_2)\left(\mathbf{S}_{2k}^{(\alpha_2)}(x_2)\right)^T dx_2;$$

$$\mathbf{g}_{1k}(x_1)=\int\limits_{x_{2,n_k-1}}^{x_{2,N_k+1}}g(x_1,\eta)\,\mathbf{S}_{2k}(\eta)\,d\eta.$$

Аналогично, подставляя $u_{\pi,m}(\mathbf{x})$ в форме (2.6) в $J(u)$ и минимизируя $J(u_{\pi,m})$ по $\Psi_l(x_2)$, получим систему

$$\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}(-1)^{\alpha_2}\left(B_{l,\alpha}(x_2)\Psi_l^{(\alpha_2)}(x_2)\right)^{(\alpha_2)}=\mathbf{g}_{2l}(x_2),\quad x_2\in(x_{2l},\ x_{2l+1}),\quad l=\overline{1,\ \nu_2-1}\ , \tag{2.8}$$

$$B_{l,\alpha}(x_2)=\sum_{x_{1,m_l-1}}^{x_{1,M_l+1}}a_\alpha(x)\,\mathbf{S}_{1l}^{(\alpha_1)}(x_1)\left(\mathbf{S}_{1l}^{(\alpha_1)}(x_1)\right)^T dx_1,$$

$$\mathbf{g}_{2l}(x_2)=\int\limits_{x_{1,m_l-1}}^{x_{1,M_l+1}}g(\xi,\ x_2)\,\mathbf{S}_{1l}(\xi)\,d\xi.$$

Решения систем (2.7) и (2.8) должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\mathbf{\Phi}_k^{(r)}(x_{1k'})=\mathbf{\Gamma}_{1kk'}^r,\quad k'=k,\ k+1,\quad k=\overline{1,\ \nu_1-1},\quad r=\overline{0,\ m-1}, \tag{2.9}$$

$$\Psi_l^{(s)}(x_{2l'})=\mathbf{\Gamma}_{2ll'}^s,\quad l'=l,\ l+1,\quad l=\overline{1,\ \nu_2-1},\quad s=\overline{0,\ m-1}, \tag{2.10}$$

где компоненты векторов $\mathbf{\Gamma}_{1kk'}^r$ и $\mathbf{\Gamma}_{2ll'}^s$ определяются из условий (2.4), содержащих искомые постоянные u_{kl}^{pq}; $(k,\ l)\in\pi,\ p,\ q=\overline{0,\ m-1}$.

§ 3. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ И. -Д. У

Отметим важную особенность систем (2.7) и (2.8): коэффициенты и правые части системы (2.7) зависят от решений систем (2.8); в свою очередь коэффициенты и правые части системы (2.8) зависят от решений системы (2.7). Это обстоятельство позволяет для решения систем (2.7), (2.9) и (2.8), (2.10) совместно с системой Ритца

$$\partial J(u_{\pi,m})/\partial u_{kl}^{pq}=0,\quad (k,\ l)\in\pi,\quad p,q=\overline{0,\ m-1}, \tag{3.1}$$

использовать метод последовательных приближений «флип-флоп» [2—6], а также метод, предложенный в работе Л. Айнолы [1].

3.1. Изложим вкратце методику построения модификации метода «флип-флоп» применительно к решению систем (2.7)—(2.10), (3.1) в случае, когда можно указать явное выражение для общего решения систем (2.7), (2.8).

Зададимся начальным видом функций $\psi_{i,k,l,p,0}(x_2)$, $(k,\ l)\in\pi,\ p=\overline{0,\ m-1}$ (используя, например, полиномы степени $2m-1$, найденные

методом конечных элементов—МКЭ). Подставляя их в систему (2.7) и решая ее вместе с граничными условиями (2.9), находим первое приближение $\varphi_{i,k,l,p,1}(x_1)$ (значения индексов те же) к функциям $\varphi_{i,k,l,p}(x_1)$, зависящее от тех неизвестных постоянных u_{kl}^{pq}, которые входят в граничные условия (2.9). Подставляя функции $\varphi_{i,k,l,p,1}(x_1)$ и $\psi_{i,k,l,p}(x_2)$ в систему Ритца (3.1), содержащую уравнения относительно указанной части неизвестных u_{kl}^{pq}, и решая ее, получим первое приближение $u_{kl,1}^{pq}$ для указанной части неизвестных постоянных u_{kl}^{pq}. Подставляя найденные $u_{kl,1}^{pq}$ и $\varphi_{i,k,l,p,1}(x_1)$ в систему (2.8) и решая ее вместе с граничными условиями (2.10), находим первое приближение $\psi_{i,k,l,p,1}(x_2)$ к неизвестным функциям $\psi_{i,k,l,p}(x_2)$, зависящее от оставшейся части неизвестных постоянных u_{kl}^{pq}. Снова подставляем $\varphi_{i,k,l,p,1}(x_1)$ и $\psi_{i,k,l,p,1}(x_2)$ в систему Ритца (3.1), содержащую уравнения относительно указанной оставшейся части неизвестных u_{kl}^{pq}, и, решая ее, находим первое приближение для оставшейся части неизвестных $u_{kl,1}^{pq}$. Аналогично проделываем следующие итерации, пока не будет выполнено неравенство $|u_{kl,r+1}^{pq} - u_{kl,r}^{pq}| < \varepsilon$, $\forall (k, l) \in \pi$, $p, q = \overline{0, m-1}$, где $u_{kl,r}^{pq}$ — значения u_{kl}^{pq}, полученные после r-й итерации; ε—точность.

3.2. Изложим модификацию метода Л. Айнолы применительно к решению систем (2.7)—(2.10), (3.1). Снова считаем, что общие решения систем (2.7) и (2.8) нам известны. Подставляем их в систему (3.1) и в системы граничных условий (2.9), (2.10) и решаем полученные системы нелинейных уравнений как одну систему относительно искомых постоянных u_{kl}^{pq}, $(k, l) \in \pi$, $p, q = \overline{0, m-1}$, а также относительно произвольных постоянных, собственных чисел, собственных векторов, входящих в структуру общих решений систем (2.7), (2.8).

3.3. В работе [7] приведены численные результаты решения однородной задачи Дирихле для уравнения Пуассона для двух частных случаев областей Ω. Для их решения использовались обе указанные модификации.

Для этих примеров проведено численное сравнение некоторых характеристик приближенных решений, получаемых методом НИДУ, с соответствующими характеристиками приближенных решений, получаемых методом МКЭ (с кусочно-билинейными координатными функциями) и методом ЛИДУ. Произведено сравнение также с точными решениями, полученными методом разделения переменных и методом Н. Х. Арутюняна. Сравнение показывает высокую точность предлагаемых алгоритмов. Кроме того, сравнительный анализ показывает, что если в системе математического обеспечения ЭВМ имеются эффективные СП решения трансцендентных уравнений, то метод НИДУ (п. 3.2) требует (для достижения сравнимых по точности результатов) меньших (или сравнимых) затрат машинного времени, чем методы МКЭ и ЛИДУ, а также метод сведения к бесконечным регулярным системам уравнений.

Литература

1. Айнола Л.— Изв. АН Эстонской ССР. Сер. Физ.-мат. и техн. наук, 1962, т. 11, № 3, с. 172—177.
2. Головин О. А., Троицкий В. А.— В кн.: Труды ЛПИ, 1969, № 307, с. 909—933.
3. Викторов Е. Д.— В сб.: Прикладная математика. Тула, 1975, вып. 3, с. 15—18.
4. Kerr A. D. An extension of the Kantorovitch method. Quarterly of applied mathematics, 1968, vol. 26, N 2, p. 219—229.
5. Leventahl S. H. The method of moments and its optimisation. Int. J. for numer. meth. in eng., 1975, vol. 9, p. 337—351.
6. Сун Цзай Чжень. Применение расширенного варианта метода Канторовича к нелинейным задачам.— Труды американского общества инженеров-механиков. Прикладная механика, 1972, № 4, с. 69—77.
7. Литвин О. Н.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1980, № 6, с. 23—29.

8. Литвин О. Н.— В сб.: Математические методы анализа динамических систем.— Харьков, 1980, вып. 4, с. 59—64.
9. Литвин О. Н.— Докл. АН УССР, сер. А, 1980, № 1, с. 11—14.
10. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа.— М., 1961, с. 708.
11. Gordon W. J. Spline-blended surface interpolation through curve networks. J. of mathem. and mech., 1969, vol. 18, N 10, p. 931—952.
12. Литвин О. Н., Федько В. В.— УМЖ, 1976, т. 28, № 6, с. 812—819.
13. Литвин О. Н., Федько В. В. О решении первой краевой задачи для бигармонического уравнения с помощью обобщенной интерполяции Эрмита.— Деп. в ВИНИТИ, № 4229—76 Деп.
14. Федько В. В. Применение обобщенной интерполянты Эрмита к решению краевых задач для областей сложной формы.— Деп. в ВИНИТИ, № 2719—76 Деп.

г. Харьков

Поступила в редакцию
12 апреля 1979 г.