S. B. Kozyrev, On the guaranteed rate of decrease of Fourier coefficients of continuous functions, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 1993, Number 2, 16–20

пом неподвижной точки $\exists p \mathop{\&}\limits_{0\leqslant i\leqslant k} \Box^i (p \leftrightarrow A(p))$, где p — единственная свободная переменная формулы A и все вхождения p в A лежат в области действия модальности $\Box$, а $\Box^i$ обозначает i-итерацию модальности. Выполнимость принципа неподвижной точки на модели $\mathfrak{M}$ из утверждения 1 следует из фундированности и насыщенности модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Segerberg K. An essay in classical modal logic//Filosofiska studier. n. 13 Uppsala: Philos. Soc. and Dept. of Philos. Uppsala, 1971.
2. Gabbay D. M. On 2nd order intuitionistic propositional calculus with full comprehension//Arch. math. logik. 1974. **16**. 177—186.
3. Rogers H. Certain logical reduction and decision problems//Ann. Math. 1956. 64. 264—284.
4. Ершов Ю. Л., Лавров И. А., Тайманов А. Д., Тайцлин М. А. Элементарные теории//Успехи матем. наук. 1965. 20, № 4. 37—108.

Поступила в редакцию
20.02.92

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1993. № 2

УДК 517.518.36

С. Б. Козырев

О ГАРАНТИРОВАННОЙ СКОРОСТИ УБЫВАНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Мы будем пользоваться следующими обозначениями: C и L — пространства соответственно непрерывных и суммируемых по Лебегу функций на отрезке $[0, 1]$, $c_n(f, \varphi)$ — коэффициенты Фурье функции f по системе φ; если Δ — отрезок, то $|\Delta|$ — его длина; если X — множество, то $\bar{X}$ — его замыкание, а $\operatorname{int}(X)$ — его внутренность; если p — показатель пространства L^p, то q — сопряженный с ним показатель; $\omega(\delta, f)$ и $\omega_p(\delta, f)$ — соответственно модуль непрерывности и интегральный модуль непрерывности порядка p для функции f.

З. Чешельский в работе [1] показал, что для коэффициентов Фурье—Хаара любой функции $f \in C[0, 1]$ справедлива оценка

$$|c_n(f, \chi)| \leqslant n^{-1/2}\omega(1/n, f). \tag{1}$$

Для функций $g \in L^p(0, 1)$, $1 \leqslant p < \infty$, аналогичный результат был получен П. Л. Ульяновым в [2]:

$$|c_n(g, \chi)| \leqslant n^{1/p-1/2}\omega_p(1/n, g). \tag{2}$$

Таким образом, модули коэффициентов Фурье—Хаара для всех функций из L^p, $p > 2$, в целом имеют гарантированный порядок убывания. В связи с этим П. Л. Ульяновым неоднократно ставился следующий вопрос (см., например, [3, 4]): являются ли оценки (1), (2) лучшими для L^p, $p > 2$, среди всех полных ортонормированных систем? В настоящей статье мы дадим отрицательный ответ на этот вопрос, доказав следующую теорему.

Теорема 1. *Какова бы ни была строго монотонно убывающая последовательность чисел $\gamma_n \to 0$, такая, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 = \infty, \tag{3}$$

существует полная ортонормированная система φ, такая, что

1) *для любой функции $f \in C$ справедлива оценка*

$$c_n(f, \varphi) = o(\gamma_n); \tag{4}$$

2) *для любой функции $g \in L^p$, $p > 2$, справедлива оценка*

$$c_n(g, \varphi) = o(\gamma_n^{1-2/p}). \tag{5}$$

Таким образом, существует, например, система, относительно которой коэффициенты непрерывных функций имеют порядок малости $o((n \ln n)^{-1/2})$, т. е. убывают в целом быстрее, чем в (1). Причем первая часть теоремы не может быть усилена, как это вытекает из следующей теоремы, принадлежащей А. М. Олевскому [5].

Теорема А. *Каковы бы ни были полная ортонормированная система φ и монотонная последовательность $w(n) \to \infty$, $w(n) > 0$, найдется функция $f \in C$, коэффициенты которой удовлетворяют условию $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2(f, \varphi) w(n) = \infty$, причем такие функции образуют множество* II *категории в C.*

Доказательство теоремы 1. Мы можем считать, что $\gamma_1 < 1$. Обозначим $[0, 1] = \Delta_0^+$ и разобьем отрезок Δ_0^+ на несколько попарно неперекрывающихся отрезков $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{n_1}, \beta_1$, расположенных в порядке их перечисления слева направо так, чтобы

$$|\Delta_i| = \gamma_i^2 \tag{6}$$

и $0 < |\beta_1| \leqslant \gamma_{n_1+1}^2$. Граничные точки соседних отрезков отнесем к одному из них произвольным образом. Ясно, что с точностью до граничных точек такое разбиение осуществимо единственным способом, причем Δ_0^+ разбивается по меньшей мере на 2 отрезка. Назовем это разбиение разбиением 1-го ранга. Далее каждый отрезок разбиения 1-го ранга разобьем аналогичным образом, т. е. отрезок Δ_1 разбивается на $\Delta_{n_1+1}, \ldots, \Delta_{n_2}, \beta_2$ с условиями (6) и $0 < |\beta_2| \leqslant \gamma_{n_2+1}^2$ и т. д. Совокупность отрезков, разбивающих отрезки 1-го ранга, назовем разбиением 2-го ранга. Затем таким же способом разобьем отрезки разбиения 2-го ранга и получим разбиение 3-го ранга и т. д. При этом если какой-либо отрезок β_j окажется слишком маленьким, чтобы его можно было разбить описанным способом, то он включается в разбиение очередного ранга целиком. Таким образом, один отрезок β_j может быть в составе нескольких разбиений соседних рангов. Напротив, любой отрезок Δ_j может присутствовать лишь в одном разбиении ввиду монотонного убывания чисел γ_n. Продолжая процесс разбиений, мы получим в силу (3) и (6) бесконечную последовательность разбиений, подчиненных одно другому. Крайний левый отрезок $\Delta_{m(k)}$ разбиения k-го ранга является, очевидно, самым большим в этом разбиении. Поэтому максимум длин отрезков разбиения с ростом ранга стремится к нулю.

Построим теперь ортонормированную систему $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$. Положим $\varphi_0 \equiv 1$. Далее, считая $n_0 = 0$, для каждой пачки отрезков $\Delta_{n_{m-1}+1}, \ldots$

$\ldots, \Delta_{n_m}, \beta_m$ определим функции φ_i с индексами $n_{m-1}<i\leqslant n_m$ следующим образом:

$$\varphi_i(x)=\begin{cases} a_i & \text{при } x\in\Delta_i^+=\operatorname{int}(\Delta_i);\\ b_i & \text{при } x\in\Delta_i^-=\operatorname{int}\overline{(\Delta_{i+1}\cup\ldots\cup\Delta_{n_m}\cup\beta_m)};\\ 0 & \text{при } x\in[0,\ 1]\setminus\overline{\Delta_i^+\cup\Delta_i^-};\end{cases}$$

где числа a_i, b_i подберем так, чтобы выполнялись условия

$$a_i>0,\ b_i<0; \tag{7}$$

$$a_i|\Delta_i^+|+b_i|\Delta_i^-|=0; \tag{8}$$

$$a_i^2|\Delta_i^+|+b_i^2|\Delta_i^-|=1. \tag{9}$$

Нетрудно проверить, что

$$a_i=\sqrt{\frac{|\Delta_i^-|}{|\Delta_i^+|\,(|\Delta_i^+|+|\Delta_i^-|)}},\quad b_i=-\sqrt{\frac{|\Delta_i^+|}{|\Delta_i^-|\,(|\Delta_i^+|+|\Delta_i^-|)}}. \tag{10}$$

В граничных точках интервалов Δ_i^+ и Δ_i^- положим функцию φ_i равной среднему арифметическому ее односторонних пределов или одностороннему пределу, если граничная точка является концом отрезка [0, 1]. Таким образом, система $\varphi=\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ построена. Она нормирована в силу (9). Ее ортогональность вытекает из (8) и того факта, что на объединении $\Delta_i^+\cup\Delta_i^-=\operatorname{supp}(\varphi_i)$ все функции φ_j при $j<i$ постоянны.

Обозначим через F_n алгебру множеств, порожденную отрезками Δ_i^+, $0\leqslant i\leqslant n$, и их граничными точками. Пусть τ_n обозначает длину наибольшего элементарного отрезка алгебры F_n. Докажем следующую лемму.

Лемма. *Пусть f — произвольная функция из L. Тогда частичная сумма ее ряда Фурье по системе* φ

$$S_n(x)=\sum_{i=0}^{n}c_i(f,\ \varphi)\,\varphi_i(x)$$

есть F_n-измеримая ступенчатая функция, равная на каждом своем интервале постоянства среднему значению f на этом же интервале.

Доказательство проведем по индукции. Очевидно, $S_0(x)$ удовлетворяет лемме; предположим, что и $S_{n-1}(x)$ удовлетворяет ей. Так как интервал Δ_n^+ и его конечная точка, граничащая с Δ_i^-, принадлежат F_n, то $\Delta_n^-\in F_n$. Следовательно, F_n-измеримость $S_n(x)$ доказана. Пусть d', d'' и d — средние значения функции f соответственно на Δ_n^+, Δ_n^- и $\Delta_n^+\cup\Delta_n^-$. В силу индуктивного предположения для любого $x\in\Delta_n^+$ имеет место $S_n(x)=d+c_na_n$. Выразив d через d', d'', $|\Delta_n^+|$, $|\Delta_n^-|$ и воспользовавшись (8) и (10), получаем

$$d+c_na_n=d+a_n(a_n|\Delta_n^+|d'+b_n|\Delta_n^-|d'')=$$

$$=\frac{|\Delta_n^+|d'+|\Delta_n^-|d''}{|\Delta_n^+|+|\Delta_n^-|}+\frac{|\Delta_n^-|d'}{|\Delta_n^+|+|\Delta_n^-|}-\frac{|\Delta_n^-|d''}{|\Delta_n^+|+|\Delta_n^-|}=d'.$$

Аналогично доказывается, что для любого $x\in\Delta_n^-$ имеет место $S_n(x)=d''$. Лемма доказана. Из нее вытекает ряд следствий.

С л е д с т в и е 1. *Система* φ *полна в* L. *Более того*, $S_n(x)\to f(x)$ *при* $n\to\infty$ *для почти всех* $x\in[0, 1]$.

Действительно, последовательность пар (F_n, S_n) образует мартингал (см. [6]). Так как $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} F_n$ есть борелевская σ-алгебра, то $S_n(x)$ почти всюду сходится к f.

С л е д с т в и е 2. *Если* $f\in C$, *то* S_n *сходится к* f *равномерно на* $[0, 1]$.

Действительно, на каждом интервале постоянства суммы $S_n(x)$ найдется точка x_0, в которой $f(x_0)=S_n(x_0)$. Поэтому $|f-S_n|\leqslant\omega(\tau_n, f)\to\to 0$ при $n\to\infty$. В точках разрыва S_n эта оценка не нарушается, так как в них разность $f-S_n$ равна полусумме своих односторонних пределов. Отсюда вытекает

С л е д с т в и е 3. *Если* $f\in C$, *то*

$$|S_n(\Delta_n^+)-S_n(\Delta_n^-)|=|c_n(a_n-b_n)|\leqslant\omega((|\Delta_n^+|+|\Delta_n^-|),\ f). \tag{11}$$

Продолжаем доказательство теоремы. Напомним, что $|\Delta_n^+|=\gamma_n^2$. Из (10) получаем, что если $|\Delta_n^+|\geqslant|\Delta_n^-|$, то $|b_n|\geqslant(\sqrt{2}\,\gamma_n)^{-1}$, а если $|\Delta_n^+|<<|\Delta_n^-|$, то $a_n>(\sqrt{2|\Delta_n^+|})^{-1}=(\sqrt{2}\,\gamma_n)^{-1}$. Учитывая (7), заключаем, что в обоих случаях имеет место

$$a_n-b_n>\max_{[0,1]}|\varphi_n|>\frac{1}{\sqrt{2}\,\gamma_n}. \tag{12}$$

Из (11) и (12) вытекает (4).

Пусть теперь $g\in L^p$, $p>2$. Обозначим через I_n характеристическую функцию множества $\overline{\Delta_n^+\cup\Delta_n^-}=\operatorname{supp}(\varphi_n)$. Тогда в силу неравенства Гельдера

$$|c_n|=\left|\int_0^1 gI_n\varphi_n\,dx\right|\leqslant\|gI_n\|_p\cdot\|\varphi_n\|_q. \tag{13}$$

Если $|a_n|\geqslant|b_n|$, то из (8) получаем $|\Delta_n^+|\leqslant|\Delta_n^-|$ и

$$\|\varphi_n\|_q=(|\Delta_n^+|a_n^q+|\Delta_n^-|\cdot|b_n|^q)^{1/q}\leqslant(2a_n^q|\Delta_n^+|)^{1/q}\leqslant$$
$$\leqslant(2\,(\gamma_n\sqrt{2})^{-q}\,\gamma_n^2)^{1/q}=K_1\gamma_n^{2/q-1}=K_1\gamma_n^{1-2/p}. \tag{14}$$

Если же $|a_n|<|b_n|$, то $|\Delta_n^-|<|\Delta_n^+|=\gamma_n^2$, и, пользуясь (10), получаем

$$\|\varphi_n\|_q\leqslant(2|\Delta_n^-|\cdot|b_n|^q)^{1/q}\leqslant\left(2|\Delta_n^-|\left(\frac{1}{\sqrt{|\Delta_n^-|}}\right)^q\right)^{1/q}=$$
$$=K_2|\Delta_n^-|^{1/q-1/2}<K_2\gamma_n^{1-2/p}. \tag{15}$$

Константы K_1 и K_2 зависят только от q. Так как $\|qI_n\|_p\to 0$ при $n\to\infty$, то из (13)—(15) вытекает (5). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Из (11) и (12) можно получить несколько более точную оценку, чем (4). Нетрудно увидеть, что сумму $|\Delta_n^+|+|\Delta_n^-|$ можно оценить сверху величиной $|\Delta_m|$, где Δ_m, грубо говоря, на один ранг ниже, чем Δ_n. Т. е. (4) можно заменить оценкой

$$|c_n|<\sqrt{2}\,\omega(\gamma_m^2,\ f)\,\gamma_n,$$

где в качестве m можно взять любое натуральное число, удовлетворяющее неравенству $\sum_{i=m}^{n} \gamma_i^2 > 1$.

Пользуюсь случаем выразить благодарность П. Л. Ульянову, обратившему мое внимание на данную задачу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Giesielski Z. On Haar functions and on the Schauder basis of the space C(0,1)//Bull. Acad. Polon. Sci. 1959. **7**. 227—232.
2. Ульянов П. Л. О рядах по системе Хаара//Матем. сб. 1964. **63**, вып. 3. 356—391.
3. Uljanov P. L. Haar series and related questions//Colloquia math. Soc. J. Bolyai. 49. A. Haar Mem. Conf. Budapest, 1985. 57—96.
4. Ульянов П. Л. О некоторых результатах и задачах из теории базисов//Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1989. **170**. 274—284.
5. Олевский А. М. О расходимости ортогональных рядов и о коэффициентах Фурье непрерывных функций по полным системам//Сиб. матем. журн. 1963. **4**, № 2. 647—656.
6. Ширяев А. Н. Вероятность. М., 1980.

Поступила в редакцию
06.03.92

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1993. № 2

УДК 519.95

Н. П. Редькин

ЕДИНИЧНЫЕ ТЕСТЫ ДЛЯ СВЯЗНЫХ НЕИСПРАВНОСТЕЙ КОНТАКТНЫХ СХЕМ

В данной работе, являющейся фактически продолжением [1], исследуется возможность построения коротких единичных диагностических и проверяющих тестов для контактных схем в случае связных неисправностей. Подробное описание соответствующей модели неисправностей, а также определения контактных (a, b)-схем, полных проверяющих тестов и некоторые другие даны в [1], где строились легкотестируемые схемы в предположении, что $a+b \geqslant 3$. Ниже рассматриваются единичные диагностические тесты для связных неисправностей $(a+b \geqslant 3)$, единичные проверяющие тесты для слабо связных неисправностей $(a+b=2)$, а также тесты замыкания и размыкания. Относительно параметров a и b предполагается, что a и b — целые числа, $a \geqslant 1$ и $a \geqslant b \geqslant 0$.

1. Единичные диагностические тесты. Будем считать, что в (a, b)-схемах возможны лишь единичные неисправности. Каждая из таких неисправностей определяется переходом в неисправное состояние контактов ровно в одной контактной группе. Произвольную (a, b)-схему называем неизбыточной, если при неисправности любой одной контактной группы эта схема реализует нетривиальную функцию неисправности; при изучении единичных тестов представляется целесообразным рассматривать только неизбыточные схемы.

Пусть неизбыточная (a, b)-схема S в исправном состоянии реализует булеву функцию f, а $g_1, \ldots, g_k$ суть все нетривиальные (т. е. отличные от f) функции неисправностей этой схемы. Множество T наборов значений переменных функции f считается единичным диагностическим тестом для схемы S, если для любой пары функций из множе-