ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2004, том 40, № 3, с. 425–428

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.977+517.926

ОДНОВРЕМЕННАЯ ЛОКАЛЬНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ СПЕКТРА И КОЭФФИЦИЕНТА НЕПРАВИЛЬНОСТИ ЛЯПУНОВА ПРАВИЛЬНЫХ СИСТЕМ

© 2004 г. С. Н. Попова

Наряду с исходной линейной однородной дифференциальной системой

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

с кусочно-непрерывным ограниченным матричным коэффициентом $A(\cdot)$ рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

где матрица $B(\cdot)$ также предполагается ограниченной и кусочно-непрерывной. Замкнув систему (2) линейной обратной связью $u = Ux$ с ограниченной кусочно-непрерывной $m \times n$-матрицей $U(\cdot)$, получим систему

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Поскольку система (3) является однородной и имеет ограниченные кусочно-непрерывные коэффициенты, для нее определены характеристические показатели и иные инварианты преобразований Ляпунова [1, с. 42]. Основная задача, решаемая в настоящей работе, состоит в выяснении условий, при которых за счет надлежащего выбора коэффициента обратной связи $U(\cdot)$ (рассматриваемого как управляющее воздействие) возможно целенаправленное изменение полного спектра показателей Ляпунова [1, с. 42] и коэффициента неправильности Ляпунова [1, с. 51] системы (3) в некоторой окрестности полного спектра и коэффициента неправильности невозмущенной системы (1), т.е. управление ими.

Введем необходимые обозначения. Пусть $\mathbb{R}^n$ – евклидово пространство размерности n с каноническим ортонормированным базисом $e_1, \ldots, e_n$ и нормой $\|\cdot\|$, определяемой равенством $\|x\| = \sqrt{x^*x}$ (звездочка означает транспонирование); M_{mn} – пространство вещественных матриц размерности $m \times n$ со спектральной нормой, т.е. операторной нормой, индуцируемой в M_{mn} евклидовыми нормами в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$. Пространство ограниченных кусочно-непрерывных отображений $U : I \to \mathrm{M}_{mn}$, определённых на произвольном промежутке $I \subset \mathbb{R}$, с равномерной нормой $\|U\|_{C(I)} := \sup\{\|U(t)\| : t \in I\}$ будем обозначать $KC_{mn}(I)$.

Матрицу Коши однородной системы (1) обозначим через $X(t,s)$, а ее полный спектр показателей Ляпунова – через $\lambda_1(A) \leq \ldots \leq \lambda_n(A)$. Для произвольной кусочно-непрерывной ограниченной функции $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ положим

$$\overline{p} = \varlimsup_{t \to +\infty} t^{-1} \int_0^t p(s)\,ds, \quad \underline{p} = \varliminf_{t \to +\infty} t^{-1} \int_0^t p(s)\,ds, \quad \check{p} = \lim_{t \to +\infty} t^{-1} \int_0^t p(s)\,ds$$

– соответственно верхнее, нижнее и точное средние значения $p(\cdot)$.

Будем предполагать, что система (2) равномерно вполне управляема [2], т.е. существуют такие $\vartheta > 0$ и $\alpha > 0$, что при каждых $t_0 \in \mathbb{R}$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство

$$\int_{t_0}^{t_0+\vartheta} \|\xi^* X(t_0, s) B(s)\|^2\,ds \geq \alpha \|\xi\|^2.$$

Тогда [3, теорема 2] выполнено следующее свойство: найдутся такие $\beta_0 > 0$ и $l_0 > 0$, что для произвольной матрицы $Q(\cdot) \in KC_{nn}(\mathbb{R})$, $\|Q\|_C \leq \beta_0$, существует управление $U(\cdot) \in KC_{mn}(\mathbb{R})$, $\|U\|_C \leq l_0 \|Q\|_C$, гарантирующее асимптотическую эквивалентность системы $\dot{y} = (A(t) + Q(t))y$ и системы (3) при $U = U(\cdot)$.

Теорема. *Если система (2) равномерно вполне управляема, а однородная система (1) правильна, то система (3) обладает свойством одновременной локальной пропорциональной управляемости полного спектра показателей Ляпунова и коэффициента неправильности Ляпунова, т.е. найдутся* *такие* $\beta > 0$ *и* $l > 0$, *что для любого набора чисел* $\mu_1 \leq \ldots \leq \mu_n$, *удовлетворяющих неравенству* $\max\{|\mu_i - \lambda_i(A)| : \; i = \overline{1,n}\} \leq \beta$, *и любого числа* $\sigma \in [0,\beta]$ *существует управление* $U(\cdot) \in KC_{mn}(\mathbb{R})$, $\|U\|_C \leq l\max\{\sigma, |\mu_i - \lambda_i(A)| \; : \; i = \overline{1,n}\}$, *обеспечивающее выполнение равенств* $\lambda_i(A + BU) = \mu_i$, $i = \overline{1,n}$, $\sigma_Л(A + BU) = \sigma$.

Доказательство. Приведем правильную однородную систему (1) перроновским преобразованием $y = L(t)x$ к системе
$$\dot{y} = F(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$
с верхней треугольной матрицей $F(\cdot) = \{f_{ij}(\cdot)\}_{i,j=1}^n$. Система (4) правильна, поэтому в силу критерия Ляпунова правильности треугольной системы [4, с. 174–178] диагональные элементы матрицы $F(\cdot)$ имеют точные средние значения $\breve{f}_{ii}$, $i = \overline{1,n}$, реализующие полный спектр показателей Ляпунова $\lambda_1(A) \leq \ldots \leq \lambda_n(A)$ системы (4). Выберем матрицу перроновского преобразования $L(\cdot)$ так, чтобы выполнялись равенства $\lambda_i(A) = \breve{f}_{ii}$, $i = \overline{1,n}$.

Преобразование $y = L(t)x$ приводит систему (2) к системе
$$\dot{y} = F(t)y + L(t)B(t)u,$$
которая равномерно вполне управляема согласно лемме 2.4 из [5]. Применяя к этой системе теорему 2 из работы [3], найдем величины $\beta_0 > 0$, $l_0 > 0$ и положим $\beta = \beta_0/2$. Возьмем любой набор чисел $\mu_1 \leq \ldots \leq \mu_n$, таких, что $|\mu_i - \lambda_i(A)| \leq \beta$, $i = \overline{1,n}$, и произвольное число $\sigma \in [0,\beta]$. Положим $P(t) = \operatorname{diag}(\mu_1 - \lambda_1(A), \ldots, \mu_{n-1} - \lambda_{n-1}(A), p(t) - \lambda_n(A))$, где $p(t) = \mu_n - \sigma + \sigma(\sin\ln(|t|+1) + \cos\ln(|t|+1) + 1)/2$. Тогда [6, с. 77–78] $\underline{p} = \mu_n - \sigma$, $\overline{p} = \mu_n$ и $\mu_n - \sigma \leq p(t) \leq \mu_n$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Следовательно, $\|p - \lambda_n(A)\|_C \leq |\mu_n - \lambda_n(A)| + \sigma \leq 2\max\{\sigma, |\mu_n - \lambda_n(A)|\}$, поэтому $\|P\|_C = \max\{\|p - \lambda_n(A)\|_C, |\mu_i - \lambda_i(A)| : i = \overline{1,n-1}\} \leq 2\max\{\sigma, |\mu_i - \lambda_i(A)| : \; i = \overline{1,n}\} \leq 2\beta = \beta_0$. Из теоремы 2 работы [3] следует, что найдется управление $V(\cdot) \in KC_{mn}(\mathbb{R})$, $\|V\|_C \leq l_0\|P\|_C$, обеспечивающее асимптотическую эквивалентность замкнутой системы
$$\dot{y} = (F(t) + L(t)B(t)V(t))y \tag{5}$$
и возмущенной системы
$$\dot{z} = G(t)z, \quad z \in \mathbb{R}^n, \tag{6}$$
где $G(\cdot) := F(\cdot) + P(\cdot)$, $G(\cdot) = \{g_{ij}(\cdot)\}_{i,j=1}^n$. Применив к системе (5) обратное преобразование $y = L(t)x$, получим систему $\dot{x} = (A(t) + B(t)V(t)L(t))x$. Положим $U(t) = V(t)L(t)$. Тогда
$$\|U\|_C \leq \|V\|_C\|L\|_C = \|V\|_C \leq l_0\|P\|_C \leq$$
$$\leq 2l_0\max\{\sigma, |\mu_i - \lambda_i(A)| : \; i = \overline{1,n}\} =: l\max\{\sigma, |\mu_i - \lambda_i(A)| : \; i = \overline{1,n}\},$$
а для показателей Ляпунова и коэффициента неправильности Ляпунова системы (3) с $U = U(\cdot)$ справедливы равенства
$$\lambda_i(A + BU) = \lambda_i(G), \quad i = \overline{1,n}, \quad \sigma_Л(A + BU) = \sigma_Л(G).$$
Докажем, что $\lambda_i(G) = \mu_i$, $i = \overline{1,n}$, $\sigma_Л(G) = \sigma$. Для этого рассмотрим усеченную систему
$$\dot{\eta} = \widetilde{G}(t)\eta, \quad \eta \in \mathbb{R}^{n-1}, \tag{7}$$
матрица $\widetilde{G}(t) = \{g_{ij}(t)\}_{i,j=1}^{n-1}$ которой получается из $G(t)$ вычеркиванием последней строки и последнего столбца. Поскольку $\widetilde{G}(\cdot)$ – верхняя треугольная матрица, а ее диагональные элементы имеют точные средние значения $\breve{g}_{ii} = \breve{f}_{ii} + \mu_i - \lambda_i(A) = \mu_i$, $i = \overline{1,n-1}$, в силу упомянутого выше критерия правильности Ляпунова система (7) правильна, а ее полный спектр состоит из чисел $\lambda_i(\widetilde{G}) = \mu_i$, $i = \overline{1,n-1}$.

Пусть $\eta^{(1)}(\cdot), \ldots, \eta^{(n-1)}(\cdot)$ – нормальная фундаментальная система решений (ФСР) системы (7) такая, что $\lambda[\eta^{(i)}] = \mu_i$, $i = \overline{1,n-1}$. Для каждых $t \in \mathbb{R}$ и $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ через $z^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^n$ обозначим вектор, первые $n-1$ координат которого совпадают с соответствующими координатами вектора $\eta^{(i)}(t)$, а последняя координата равна нулю. Тогда $z^{(1)}(\cdot), \ldots, z^{(n-1)}(\cdot)$ – линейно независимые решения системы (6) такие, что $\lambda[z^{(i)}] = \mu_i$, $i = \overline{1,n-1}$.

Найдем показатель Ляпунова решения $z^{(n)}(\cdot)$ системы (6), удовлетворяющего начальному условию $z^{(n)}(0) = e_n$. Для его координат справедливы равенства
$$z_n^{(n)}(t) = h_n(t), \quad z_k^{(n)}(t) = \sum_{j=k+1}^{n} h_k(t) \int_0^t h_k^{-1}(s) f_{kj}(s) z_j^{(n)}(s)\,ds, \quad k = n-1, \ldots, 1,$$

где $h_i(t) := \exp\int_0^t g_{ii}(s)\,ds$, $i = \overline{1,n}$. Докажем, что при всех $l \in \{1,\dots,n\}$ имеет место неравенство

$$\lambda[z_l^{(n)}] \le \mu_n. \tag{8}$$

Действительно, при $l = n$ выполнено строгое равенство

$$\lambda[z_n^{(n)}] = \lambda[h_n] = \overline{g_{nn}} = \overline{(f_{nn} + p - \lambda_n(A))} = \overline{p} + \check{f}_{nn} - \lambda_n(A) = \overline{p} = \mu_n.$$

Предположим, что неравенство (8) установлено при всех $l \in \{n,\dots,k+1\}$, где $k \in \{n-1,\dots,1\}$. Проверим неравенство (8) для $l = k$. Для каждого $l \in \{k+1,\dots,n\}$ имеем соотношения

$$\lambda[f_{kl}(t)h_k^{-1}(t)z_l^{(n)}(t)] \le \lambda[h_k^{-1}] + \lambda[z_l^{(n)}] \le \overline{(-g_{kk})} + \mu_n = \mu_n - \check{g}_{kk} = \mu_n - \mu_k,$$

причем разность $\mu_n - \mu_k$ неотрицательна. Следовательно [4, с. 132],

$$\lambda\left[\int\limits_0^t f_{kl}(s)h_k^{-1}(s)z_l^{(n)}(s)\,ds\right] \le \mu_n - \mu_k,$$

поэтому

$$\lambda[z_k^{(n)}] \le \max\left\{\lambda\left[h_k(t)\int\limits_0^t f_{kl}(s)h_k^{-1}(s)z_l^{(n)}(s)\,ds\right] : \ l = \overline{k+1,n}\right\} \le \lambda[h_k] + \mu_n - \mu_k = \mu_n.$$

Таким образом, неравенство (8) доказано. Из него вытекает, что $\lambda[z^{(n)}] = \max\{\lambda[z_k^{(n)}] : \ k = \overline{1,n}\} = \lambda[z_n^{(n)}] = \mu_n$.

Совокупность функций $z^{(1)}(\cdot),\dots,z^{(n)}(\cdot)$ линейно независима на $\mathbb{R}$, так как $z_n^{(n)}(t) \ne 0$ при каждом $t \in \mathbb{R}$, а $z_n^{(1)}(t) \equiv \dots \equiv z_n^{(n-1)}(t) \equiv 0$ на $\mathbb{R}$. Следовательно, функции $z^{(1)}(\cdot),\dots,z^{(n)}(\cdot)$ образуют ФСР системы (6). Докажем ее нормальность. Для этого возьмем произвольный ненулевой вектор $\xi = \operatorname{col}(\xi_1,\dots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n$ и вычислим показатель Ляпунова решения $z(\cdot) = \sum_{i=1}^n \xi_i z^{(i)}(\cdot)$. Пусть $j := \max\{i : \xi_i \ne 0\}$. Если $j = n$, то

$$z_n(t) = \sum_{i=1}^n \xi_i z_n^{(i)}(t) = \xi_n z_n^{(n)}(t),$$

поэтому $\lambda[z] \ge \lambda[z_n] = \lambda[z_n^{(n)}] = \mu_n$. С другой стороны,

$$\lambda[z] = \lambda\left[\sum_{i=1}^n \xi_i z^{(i)}\right] \le \max\{\lambda[z^{(i)}] : \ i = \overline{1,n}\} = \mu_n.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае $\lambda[z] = \mu_n = \max\{\lambda[z^{(i)}] : \ \xi_i \ne 0\}$. Если же $j < n$, то последняя координата вектора $z(t)$ тождественно равна нулю на $\mathbb{R}$, поэтому в силу нормальности ФСР $\eta^{(1)},\dots,\eta^{(n-1)}$ системы (7) имеем равенства

$$\lambda[z] = \lambda\left[\sum_{i=1}^j \xi_i \eta^{(i)}\right] = \lambda[\eta^{(j)}] = \mu_j = \max\{\lambda[z^{(i)}] : \ \xi_i \ne 0\}.$$

Это означает, что ФСР $z^{(1)}(\cdot),\dots,z^{(n)}(\cdot)$ несжимаема [4, с. 142] и в силу теоремы Ляпунова [4, с. 142–144] нормальна. Таким образом, полный спектр показателей Ляпунова системы (6) состоит из чисел $\mu_1 \le \dots \le \mu_n$. Для коэффициента неправильности Ляпунова этой системы имеем равенства [7, с. 77]

$$\sigma_{\text{Л}}(G) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(G) - \varliminf_{t\to+\infty} t^{-1}\int\limits_0^t \operatorname{Sp} G(s)\,ds =$$

$$= \sum_{i=1}^n \mu_i - \varliminf_{t\to+\infty} t^{-1}\int\limits_0^t \left(\sum_{i=1}^{n-1}(f_{ii}(s) + \mu_i - \lambda_i(A)) + f_{nn}(s) + p(s) - \lambda_n(A)\right) ds =$$

$$= \mu_n + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A) - \sum_{i=1}^{n} \check{f}_{ii} - \underline{p} = \mu_n - \underline{p} = \mu_n - (\mu_n - \sigma) = \sigma.$$

Теорема доказана.

Замечание. В работах [8, 9] установлена локальная управляемость показателей Ляпунова равномерно согласованных систем в случае правильности однородной системы (1). В отличие от доказанного в настоящей работе утверждения указанной теоремы не содержат липшицевой оценки нормы управления в зависимости от возмущения полного спектра показателей Ляпунова. Кроме того, в этих работах не рассматривалась задача управления коэффициентом неправильности.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 03-01-00014) и Конкурсным центром Министерства образования Российской Федерации (проекты Е00-1.0-5 и Е02-1.0-100).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ляпунов А.М.* Собр. соч.: В 6 т. Т. 2. М.; Л., 1956.
2. *Kalman R.E.* // Boletin de la Sociedad Matematika Mexicana. 1960. V. 5. № 1. P. 102–119.
3. *Попова С.Н.* // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 1. С. 41–46.
4. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.
5. *Попова С.Н.* Задачи управления показателями Ляпунова: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ижевск, 1992.
6. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966.
7. *Изобов Н.А.* // Итоги науки и техники. Мат. анализ. 1974. Т. 12. С. 71–146.
8. *Зайцев В.А.* Согласованность, достижимость и управление показателями Ляпунова: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ижевск, 2000.
9. *Tonkov E.L.* // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. Suppl. 1. 2000. P. S228–S253.

Институт математики и информатики при Удмуртском государственном университете, г. Ижевск

Поступила в редакцию 20.12.2002 г.