J. Grbić, A. Linton, Lowest-degree triple Massey products in moment-angle complexes, *Uspekhi Mat. Nauk*, 2020, Volume 75, Issue 6, 175–176

DOI: 10.4213/rm9979

Тройные произведения Масси наименьшей размерности в момент-угол-комплексах

Е. Грбич, А. Линтон

Дана комбинаторная классификация тройных произведений Масси трёхмерных классов в кольце $H^*(\mathscr{Z}_\mathscr{K})$. Результат теоремы 6.1.1 из [3] улучшен путём рассмотрения произведений Масси с нетривиальной неопределённостью. Эта классификация применяется, например, в [1; предложение 4.9].

Пусть $\mathscr{K}$ – симплициальный комплекс на m вершинах. *Момент-угол-комплекс* [2] есть $\mathscr{Z}_\mathscr{K}=\bigcup_{I\in\mathscr{K}}(D^2,S^1)^I$, где $(D^2,S^1)^I\cong(D^2)^{|I|}\times(S^1)^{m-|I|}$.

Комплекс $\mathscr{Z}_\mathscr{K}\subset(D^2)^m$ имеет клеточное разбиение, индуцирующее мультиградуировку на $C^*(\mathscr{Z}_\mathscr{K})$. Для $J\subset[m]$ рассмотрим *полный подкомплекс* $\mathscr{K}_J=\{\sigma\in\mathscr{K}\mid\sigma\subset J\}$. Имеется изоморфизм коцепей $\widetilde{C}^{*-1}(\mathscr{K}_J)\to C^{*-|J|,2J}(\mathscr{Z}_\mathscr{K})\subset C^{*+|J|}(\mathscr{Z}_\mathscr{K})$, индуцирующий изоморфизм алгебр $H^*(\mathscr{Z}_\mathscr{K})\cong\bigoplus_{J\subset[m]}\widetilde{H}^*(\mathscr{K}_J)$. Группа $C^p(\mathscr{K}_J)$ имеет базис из коцепей χ_L, которые принимают значение 1 на p-симплексе $L\in\mathscr{K}_J$ и значение 0 на остальных симплексах. Умножение в $\bigoplus_{J\subset[m]}\widetilde{H}^*(\mathscr{K}_J)$ индуцировано отображениями $\mu\colon C^{p-1}(\mathscr{K}_I)\otimes C^{q-1}(\mathscr{K}_J)\to C^{p+q-1}(\mathscr{K}_{I\cup J})$, где $\mu(\chi_L,\chi_M)$ есть $\pm\chi_{L\cup M}$, если $I\cap J=\varnothing$, и равно 0 в противном случае.

Пусть (A,d) – ДГ алгебра и $\alpha_i=[a_i]\in H^{p_i}(A)$, $i=1,2,3$, причём $\alpha_1\alpha_2=0=\alpha_2\alpha_3$. Для $a\in A^p$ положим $\overline{a}=(-1)^{1+p}a$. *Тройным произведением Масси* $\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\rangle\subset H^{p_1+p_2+p_3-1}(A)$ называется множество классов, представленных элементами вида $\omega=\overline{a}_1a_{23}+\overline{a}_{12}a_3$, где $a_{i,i+1}\in A^{p_i+p_{i+1}-1}$ таковы, что $d(a_{i,i+1})=\overline{a}_ia_{i+1}$, $i=1,2$. Произведение Масси *тривиально*, если $0\in\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\rangle$. *Неопределённостью* произведения Масси называется множество разностей между элементами из $\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\rangle$.

Теорема. *Произведение Масси $\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\rangle\subset H^8(\mathscr{Z}_\mathscr{K})$ классов $\alpha_i\in H^3(\mathscr{Z}_\mathscr{K})$ определено и нетривиально тогда и только тогда, когда 1-остов $\mathscr{K}^{(1)}$ комплекса $\mathscr{K}$ содержит полный подкомплекс, изоморфный одному из графов на рис.* 1.

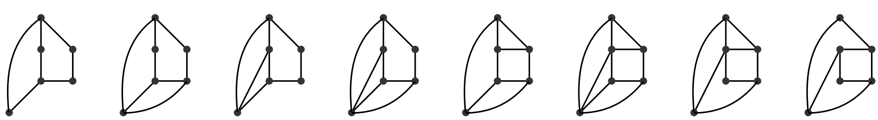

Рис. 1. Восемь препятствующих графов

В работе Г. Денама и А. Сучю [3] утверждалось, что первые шесть графов на рис. 1 классифицируют нетривиальные произведения Масси $\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\rangle$ с $\alpha_i\in H^3(\mathscr{Z}_\mathscr{K})$. Это верно только для произведений Масси с тривиальной неопределённостью.

Пример. Пусть $\mathscr{K}$ – граф на рис. 2, (c), где ребро $\{4,6\}$ может отсутствовать. Рассмотрим классы $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in H^3(\mathscr{Z}_\mathscr{K})$, соответствующие классам $\alpha_1=[\chi_1]\in\widetilde{H}^0(\mathscr{K}_{12})$, $\alpha_2=[\chi_3]\in\widetilde{H}^0(\mathscr{K}_{34})$, $\alpha_3=[\chi_5]\in\widetilde{H}^0(\mathscr{K}_{56})$. Так как $\widetilde{H}^1(\mathscr{K}_{1234}),\widetilde{H}^1(\mathscr{K}_{3456})=0$, произведения $\alpha_1\alpha_2\in\widetilde{H}^1(\mathscr{K}_{1234})$ и $\alpha_2\alpha_3\in\widetilde{H}^1(\mathscr{K}_{3456})$ нулевые.

Для $a\in C^p(\mathscr{K}_J)$, соответствующей $a\in C^{p+|J|+1}(\mathscr{Z}_\mathscr{K})$, положим $\overline{\overline{a}}=(-1)^{p+|J|}a$. Коцепь $a_{12}\in C^0(\mathscr{K}_{1234})$ такая, что $d(a_{12})=\overline{\overline{\chi}}_1\chi_3=0$, имеет вид $a_{12}=c_1\chi_3+c_2(\chi_1+\chi_4+\chi_2)$, $c_1,c_2\in\mathbf{k}$. Коцепь $a_{23}\in C^0(\mathscr{K}_{3456})$ такая, что $d(a_{23})=\overline{\overline{\chi}}_3\chi_5=\chi_{35}$, имеет вид $a_{23}=c_3\chi_4+c_4(\chi_6+\chi_3+\chi_5)+\chi_5$, $c_3,c_4\in\mathbf{k}$, где $c_3=c_4$, если $\{4,6\}\in\mathscr{K}$. Тогда $\omega\in C^1(\mathscr{K})$ есть $\overline{\overline{a}}_1a_{23}+\overline{\overline{a}}_{12}a_3=c_3\chi_{14}+c_4(\chi_{16}+\chi_{15})+\chi_{15}+c_1\chi_{35}+c_2(\chi_{15}+\chi_{25})$. Для $\chi_1,\chi_5\in C^0(\mathscr{K})$ имеем $\omega=(c_3-c_4)\chi_{14}-c_4d(\chi_1)+\chi_{15}+(c_1-c_2)\chi_{35}+c_2d(\chi_5)$. Также $[\omega]=[(c_3-c_4)\chi_{14}+\chi_{15}+(c_1-c_2)\chi_{35}]\neq0$ для любых $c_1,c_2,c_3,c_4\in\mathbf{k}$, причём $c_3=c_4$, если $\{4,6\}\in\mathscr{K}$. Поэтому $\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\rangle\subset H^8(\mathscr{Z}_\mathscr{K})$ нетривиально с нетривиальной неопределённостью $\alpha_1\cdot\widetilde{H}^0(\mathscr{K}_{3456})+\alpha_3\cdot\widetilde{H}^0(\mathscr{K}_{1234})$.

DOI: https://doi.org/10.4213/rm9979

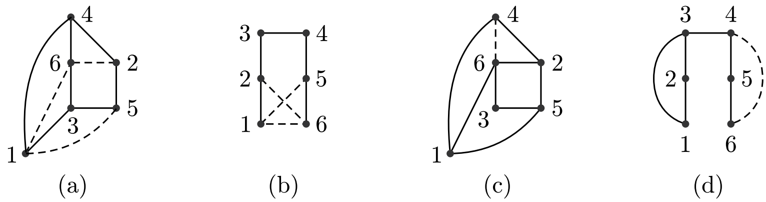

Рис. 2. Произведения Масси с тривиальной (a) и нетривиальной (c) неопределённостью и соответствующие дополнительные графы (b) и (d)

Для комплекса $\mathscr{K}$ на рис. 2, (a), вычисления аналогичны. Здесь $a_{12} = \chi_3 + c_1(\chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \chi_4)$ и $a_{23} = \chi_5 + c_2(\chi_3 + \chi_4 + \chi_5 + \chi_6)$, $c_1, c_2 \in \mathbf{k}$. В этом случае $\langle\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\rangle$ содержит единственный ненулевой класс $[\omega] = [-\chi_{25}]$.

Доказательство теоремы. Пусть $\mathscr{K}^{(1)}$ – один из графов на рис. 1. Из примера выше следует, что произведение Масси $\langle\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\rangle$ нетривиально.

Обратно, пусть $\langle\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\rangle$ нетривиально для $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in H^3(\mathscr{Z}_{\mathscr{K}})$. Пусть G – дополнительный граф для $\mathscr{K}^{(1)}$, т. е. $\{i,j\} \in G$ тогда и только тогда, когда $\{i,j\} \notin \mathscr{K}$. Мы покажем, что G – один из графов (b) и (d) на рис. 2, где пунктирные рёбра не обязательно присутствуют. Рассмотрим $\mathscr{K}_{S_i}$, $S_i \subset [m]$, $|S_i| = 2$, такие, что α_i соответствует классу $\alpha_i \in \widetilde{H}^0(\mathscr{K}_{S_i})$. Так как $\langle\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\rangle$ нетривиально, то $S_i \cap S_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Пусть $S_1 = \{1,2\}$, $S_2 = \{3,4\}$, $S_3 = \{5,6\}$. Так как $\{v_1, v_2\} \notin \mathscr{K}$ для любых $v_1, v_2 \in S_i$, имеем $\{1,2\}, \{3,4\}, \{5,6\} \in G$. Так как $\alpha_i\alpha_{i+1} = 0$, подкомплекс $\mathscr{K}_{S_i \cup S_{i+1}}$ не содержит циклов для $i = 1, 2$. Поэтому $\{v_1, v_2\}, \{v_2', v_3\} \in G$ при $v_i, v_i' \in S_i$.

Предположим, что $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\} \in G$, где $v_i \in S_i$. Пусть $a_1 = \chi_{v_1} \in C^0(\mathscr{K}_{12})$, $a_2 = \chi_{v_2} \in C^0(\mathscr{K}_{34})$, $a_3 = \chi_{v_3} \in C^0(\mathscr{K}_{56})$ – представляющие коциклы. Имеем $a_1a_2 = 0$ и $a_2a_3 = 0$. Тогда, выбирая $a_{12} = 0 = a_{23}$, получаем $\omega = 0$, что противоречит нетривиальности $\langle\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\rangle$. Итак, $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\} \notin G$ при $v_i \in S_i$.

Занумеруем вершины графа G так, что имеется путь $1, \dots, 6$. Рассмотрим случай $\{1,3\}, \{4,6\} \notin G$. Так как $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\} \notin G$ при $v_i \in S_i$, вершины 3 и 4 имеют валентность два. Предположим, что $\{2,5\} \in G$. Пусть $\chi_2 \in C^0(\mathscr{K}_{12})$, $\chi_3 \in C^0(\mathscr{K}_{34})$, $\chi_5 \in C^0(\mathscr{K}_{56})$ представляют α_1, α_2, α_3 соответственно. Так как $a_1a_2 = 0$, положим $a_{12} = 0$, и пусть $a_{23} = \chi_5$. Тогда $\omega = \chi_{25}$ есть нуль, что противоречит нетривиальности $\langle\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\rangle$. Следовательно, $\{2,5\} \notin G$ и G есть граф (b), где рёбра $\{1,5\}$, $\{1,6\}$ и $\{2,6\}$ не обязательно присутствуют.

Если $\{1,3\} \in G$, $\{4,6\} \notin G$, то $\{1,5\} \notin G$, так как иначе $\omega = \chi_{15} = 0$ в примере выше. Также $\{2,5\} \notin G$, как в предыдущем случае. Рёбра $\{1,6\}$, $\{2,6\}$ в G не обязательны, так как они не изменяют вычисления из примера выше. Если $\{1,6\}, \{2,6\} \notin G$, то G есть граф (d) с $\{4,6\} \notin G$. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Графы (b) и (d) дополнительны к графам (a) и (c) соответственно. С точностью до изоморфизма все графы вида (a) и (c) суть в точности графы на рис. 1.

Список литературы

[**1**] В. М. Бухштабер, Н. Ю. Ероховец, М. Масуда, Т. Е. Панов, С. Пак, *УМН*, **72**:2(434) (2017), 3–66. [**2**] V. M. Buchstaber, T. E. Panov, *Toric topology*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015, xiv+518 pp. [**3**] G. Denham, A. I. Suciu, *Pure Appl. Math. Q.*, **3**:1 (2007), 25–60.

Е. Грбич (J. Grbić)
University of Southampton, Southampton, UK
E-mail: J.Grbic@soton.ac.uk

А. Линтон (A. Linton)
University of Southampton, Southampton, UK
E-mail: A.Linton@soton.ac.uk

Представлено Т. Е. Пановым
Принято редколлегией
01.10.2020