В. И. Васюнин, М. Т. Караев, Кратность спектра некоторых сжатий, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1987, том 157, 23–29

В.И.Васюнин, М.Т.Караев

# КРАТНОСТЬ СПЕКТРА НЕКОТОРЫХ СЖАТИЙ

Понятие кратности спектра оператора играет заметную роль как в классических разделах анализа (и даже линейной алгебры), например, в унитарной классификации самосопряженных и унитарных операторов, так и в более современных областях, например, в теории жордановой модели сжатий класса $C_0$, а также и в приложениях анализа, например, в теории управления. Поведение кратности спектра суммы операторов в зависимости от кратностей спектра слагаемых весьма существенно для понимания этой характеристики вообще. В настоящей заметке мы вычислим кратность спектра прямой суммы операторов следующих классов: унитарного оператора, чистой изометрии, чистой коизометрии и сжатия класса $C_0$.

Если оператор $A$ действует в гильбертовом пространстве $H$, то символом $\mu_A$ будет обозначаться его кратность спектра, т.е.

$$\mu_A \stackrel{def}{=} \min\{\dim E : E \in Cyc\, A\},$$

где $Cyc\, A$ – семейство циклических подпространств оператора $A$, т.е.

$$Cyc\, A = \{E : span\{A^n E : n \geqslant 0\} = H\}.$$

Для унитарного оператора $\mathcal{U}$ пусть $\mathcal{U} = \mathcal{U}_a \oplus \mathcal{U}_s$ – разложение в сумму абсолютно непрерывной и сингулярной частей. Пусть $S^n$ – чистая изометрия кратности $n$, а $T$ – сжатие класса $C_0$, т.е. вполне неунитарное сжатие, для которого существует аннулирующая функция $m$, $m \in H^\infty$, $m(T) = 0$.

Доказываемый ниже результат получен довольно давно и его формулировка приведена в работе Н.К.Никольского [I] (теорема I3). Мы решили опубликовать доказательство этого результата в связи с появлением его конкретных приложений, например, для вычисления кратности спектра сжатий с конечными дефектами.

ТЕОРЕМА.

$$\mu_{(\mathcal{U} \oplus S^n \oplus S^{*m} \oplus T)} = \max\{\mu_{\mathcal{U}_s}, n + \max\{\mu_{\mathcal{U}_a}, \mu_T, 1 - \delta_{m0}\}\}.$$

Здесь $\delta_{m0} = 1$ при $m = 0$ и $\delta_{m0} = 0$ при $m > 0$.

Доказательство теоремы разобьем на три леммы.

ЛЕММА 1. Пусть $A$ – сжатие, минимальная унитарная дилатация которого имеет абсолютно непрерывный спектр, $\mathcal{U}_s$ – сингулярный унитарный оператор. Тогда

$$\mu_{\mathcal{U}_s \oplus A} = \max\{\mu_{\mathcal{U}_s}, \mu_A\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы вытекает из того, что решетка инвариантных подпространств $\mathrm{Lat}(\mathcal{U}_s \oplus A)$ распадается в прямую сумму решеток:

$$\mathrm{Lat}(\mathcal{U}_s \oplus A) = \mathrm{Lat}\,\mathcal{U}_s \oplus \mathrm{Lat}\,A,$$

что является в свою очередь следствием теоремы братьев Рисс об аналитических мерах. Более детально это рассуждение приведено, например, в лемме 4 в работе [2]. ●

ЛЕММА 2. Если $A$ – сжатие, имеющее абсолютно непрерывную унитарную дилатацию, то

$$\mu_{S^n \oplus A} = n + \mu_A.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемое утверждение достаточно доказать для $n=1$, общий случай получается индукцией по $n$, поскольку оператор вида $A \oplus S^k$ также обладает абсолютно непрерывной унитарной дилатацией.

Неравенство $\mu_{S\oplus A} \leq 1 + \mu_A$ очевидно, поэтому будем доказать противоположное неравенство, причем, не ограничивая общности, будем считать, что $\mu_A < +\infty$.

Пусть сдвиг $S$ задан как умножение на $z$ в пространстве Харди $H^2$, а оператор $A$ кратности $\mu_A \overset{def}{=} \mu$ действует в гильбертовом пространстве $H$. Покажем, что никакое семейство векторов

$$x \oplus y = \{x_k \oplus y_k : x_k \in H^2, y_k \in H\}_{k=1}^{\mu} \tag{I}$$

не может быть циклическим для оператора $S \oplus A$. Отсюда и будет следовать требуемое неравенство: $\mu_{S\oplus A} \geq \mu + 1$.

Допустим противное, т.е. пусть семейство (I) является циклическим для $S \oplus A$. Будем считать, что $x_k \in H^\infty$ и, более того, $\sum |x_k|^2 \equiv 1$. (Если это не так, то мы заменим наше семейство другим: $\{x'_k \oplus y_k\}$, где $x'_k = \frac{x_k}{x_0}$, $x_0$ – внешняя функция, для которой $|x_0|^2 = \sum |x_k|^2$. При этом свойство цикличности сохранится. Действительно, представим функцию $x_0$ в виде отношения двух внешних ограниченных функций: $x_0 = \frac{x'}{x''}$. Тогда

$$\operatorname{span}\{S^n x'_k \oplus A^n y_k : 1\le k\le \mu,\ n\ge 0\} = \operatorname{span}\left\{\frac{x''}{x'} S^n x_k \oplus A^n y_k\right\} \supset$$

$$\supset \operatorname{clos}\left\{\frac{x''}{x'}(x'H^2)\oplus H\right\} = \operatorname{clos}\{x''H^2\oplus H\} = H^2\oplus H\ ).$$

Поскольку $\{x_k\}\in \mathcal{C}yc\, S$, то функции $x_k$ не имеют общего внутреннего делителя, т.е. вектор $x$ с координатами $\{x_i\}_{i=1}^{\mu}$ является внутренней $*$-внешней матрицей-функцией. Поэтому, согласно лемме 3.2 из статьи [3], найдется присоединенная матрица $X$ размера $(\mu-1)\times\mu$, являющаяся внешней $*$-внутренней функцией, главные миноры которой равны $x_i$; другими словами, если дописать к матрице $X$ произвольную строку $\varphi$, $\varphi=\{\varphi_i\}_{i=1}^{\mu}$, то

$$\det\begin{pmatrix} X\\ \varphi\end{pmatrix} = \varphi x \stackrel{def}{=\!=} \sum_{i=1}^{\mu}\varphi_i x_i .$$

Пусть $X_i$ - строки матрицы $X$, $X_i=\{X_{ij}\}_{j=1}^{\mu}$, $X_{ij}$ - матричные элементы, являющиеся ограниченными аналитическими функциями. Образуем семейство векторов $Y$, $Y=\{Y_i\}_{i=1}^{\mu-1}$, из $H$:

$$Y = X(A)y = \{X_i(A)y\}_{i=1}^{\mu-1} = \left\{\sum_{j=1}^{\mu} X_{ij}(A)y_j\right\}_{i=1}^{\mu-1}$$

и покажем, что это семейство является циклическим для оператора $A$.

Пространство $H$, где действует оператор $A$, погрузим в пространство его минимальной унитарной дилатации $U_A$, которую будем считать заданной в спектральном представлении, т.е. оператором умножения на $z$ в прямом интеграле $\int_{\mathbb{T}}\oplus H(z)\,dm(z)$. Так как по условию спектральная мера оператора $U_A$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, то в прямом интеграле можно интегрировать по мере Лебега $dm$. Тогда для любых векторов $g$, $h$ из $H$ и любой функции $f$, $f\in H^\infty$, имеем

$$(f(A)g,h)=(f(U_A)g,h) = \int f(z)(g(z),h(z))_{H(z)}\,dm(z).$$

Пусть теперь $h\in H\ominus \operatorname{span}\{A^k Y_i : 1\le i\le \mu-1,\ k\ge 0\}$. Возьмем произвольную строку $\varphi$, $\varphi=\{\varphi_i\}_{i=1}^{\mu}$, функций из $H^\infty$ и такую функцию $\psi$, $\psi\in H^\infty$, для которой $\psi(z)\|y_i(z)\|^2_{H(z)}\in L^\infty$ и $\psi(z)\|h(z)\|^2_{H(z)}\in L^\infty$. Поскольку $x\oplus y\in \mathcal{C}yc\,(S\oplus A)$, найдется последовательность семейств полиномов $P_n$, $P_n = \{P_{nk}\}_{k=1}^{\mu}$, такая что

$$\lim_{n\to\infty} P_n(S\oplus A)(x\oplus y) = 0 \oplus h,$$

т.е. $P_n x \xrightarrow{H^2} 0$, $P_n(A)y \xrightarrow{H} h$. (2)

Построим следующую матрицу размера $(\mu+1)\times(\mu+1)$:

$$\Omega = \begin{pmatrix} X(A) & Y \\ P_n(A) & P_n(A)y \\ \varphi(A) & \varphi(A)y \end{pmatrix}.$$

Элементы первых $\mu$ столбцов являются функциями оператора $A$, а последний столбец – вектор, представляющий собой линейную комбинацию первых $\mu$ столбцов с коэффициентами $y_i$, поэтому определитель этой матрицы является нулевым вектором $H$. Учитывая, что $h \perp \operatorname{span}\{A^k Y_i\}$, и раскладывая $\det\Omega$ по элементам последнего столбца, имеем

$$0 = (\det\Omega, \psi(A)^* h) = (\det\begin{pmatrix} X(A) \\ P_n(A)\end{pmatrix} \varphi(A)y - \det\begin{pmatrix} X(A) \\ \varphi(A)\end{pmatrix} P_n(A)y,$$

$$\psi(A)^* h) = (\psi(A)P_n(A)x(A)\varphi(A)y - \psi(A)\varphi(A)x(A)P_n(A)y, h) \xrightarrow[n\to\infty]{}$$

$$\longrightarrow -(\psi(A)\varphi(A)x(A)h, h).$$

При переходе к пределу мы использовали соотношения (2). При этом возможность предельного перехода во втором слагаемом трудностей не вызывает, а для возможности предельного перехода в первом слагаемом была введена подрезающая функция $\psi$: поскольку $\psi(z)(\varphi(z)y(z), h(z))_{H(z)} \in L^\infty$, то достаточно сходимости $P_n x$ к нулю по норме $L^2$.

Теперь выберем последовательность $\varphi_m$ с условием $\varphi_m x \xrightarrow{H^2} \mathbb{1}$; это возможно, так как $x_i$ взаимно просты. Переходя к пределу по $m$, получаем

$$(\psi(A)h, h) = 0.$$

Выбирая последовательность $\psi_j$, сходящуюся почти всюду к единице, получим в пределе $\|h\|^2 = 0$, т.е. $h = 0$.

Итак, при сделанном допущении $(\mu_{S\oplus A} < \mu_A + 1)$ мы доказали цикличность семейства $\{Y_i : 1 \le i \le \mu-1\}$, это противоречит тому, что

$\mu_A = \mu$ . Следовательно, $\mu_{(S \oplus A)} \geq \mu_A + 1$ . ●

ЛЕММА 3. $\mu_{(T \oplus \mathcal{U}_a \oplus S^{*m})} = \max\{\mu_T, \mu_{\mathcal{U}_a}, 1-\delta_{m0}\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbb{F} = \{f_i\}_{i=1}^{\mu_1} \in Cyc\, T$ , $\mu_1 = \mu_T$ и $G = \{g_i\}_{i=1}^{\mu_2} \in Cyc(\mathcal{U}_a \oplus S^{*m})$, $\mu_2 = \mu_{(\mathcal{U}_a \oplus S^{*m})}$ . Положим $f_i = 0$ для $i > \mu_1$, $g_i = 0$ для $i > \mu_2$ и $\mu = \max\{\mu_1, \mu_2\}$ . Проверим, что семейство $\mathbb{F} \oplus G \overset{def}{=} \{f_i \oplus g_i\}_{i=1}^{\mu}$ является циклическим для оператора $T \oplus \mathcal{U}_a \oplus S^{*m}$ .

Если $m_T$ – минимальная функция оператора $T$ , то

$$m_T(T \oplus \mathcal{U}_a \oplus S^{*m})(\mathbb{F} \oplus G) = \mathbb{O} \oplus m_T(\mathcal{U}_a \oplus S^{*m})G .$$

Поскольку оператор $m_T(\mathcal{U}_a \oplus S^{*m})$ – коизометрия, его образ есть все пространство, а следовательно, $m_T(\mathcal{U}_a \oplus S^{*m})G \in Cyc(\mathcal{U}_a \oplus S^{*m})$ . Поэтому

$$span\{(T \oplus \mathcal{U}_a \oplus S^{*m})^k(\mathbb{F} \oplus G) : k \geq 0\} \supset span\{T^k \mathbb{F} \oplus \mathbb{O} \oplus \mathbb{O}, \mathbb{O} \oplus H_{\mathcal{U}} \oplus H_{S^*}\} =$$

$$= span\{H_T \oplus \mathbb{O} \oplus \mathbb{O}, \mathbb{O} \oplus H_{\mathcal{U}} \oplus H_{S^*}\} = H_T \oplus H_{\mathcal{U}} \oplus H_{S^*} .$$

Итак мы показали, что

$$\mu_{(T \oplus \mathcal{U}_a \oplus S^{*m})} = \max\{\mu_T, \mu_{(\mathcal{U}_a \oplus S^{*m})}\} .$$

Если $m = 0$ , то лемма доказана. Так что будем предполагать, что $m \geq 1$ . Кроме того, достаточно доказать нужное равенство лишь при $\mu_{\mathcal{U}_a} \leq 1$ (т.е. когда $\mathcal{U}_a$ – оператор с простым спектром, либо это слагаемое отсутствует). Действительно, если $\mu_a > 1$ , то мы разобьем оператор $\mathcal{U}_a$ в сумму $\mathcal{U}_a = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2$ , где $\mathcal{U}_1$ – оператор с простым спектром и $\mu_{\mathcal{U}_2} = \mu_{\mathcal{U}_a} - 1$ . Тогда чтобы получить циклическое семейство оператора $\mathcal{U}_a \oplus S^{*m}$ из $\mu_a$ векторов, мы возьмем циклический вектор оператора $\mathcal{U}_1 \oplus S^{*m}$ и добавим к нему циклическое семейство оператора $\mathcal{U}_2$ , размерности $\mu_{\mathcal{U}_a} - 1$.

Итак, пусть $\mu_{\mathcal{U}_a} \leq 1$ . Оператор $\mathcal{U}_a$ будем считать действующим в $L^2$ на некотором подмножестве единичной окружности, а $S^{*m}$ определим в $H^2_{m-} \overset{def}{=} \overset{m}{\oplus} H^2_-$ формулой $S^{*m}(x_1 \oplus \ldots \oplus x_m) = P_- z x_1 \oplus \ldots \oplus P_- z x_m$ , $P_-$ – ортопроектор в $L^2$ на $H^2_-$ . Возьмем функцию $f$ , такую что $0 < f \leq 1$ почти всюду и $\log f \notin L^1$ , положим $f_k \overset{def}{=} f^{\frac{k}{k+1}}$ и покажем, что вектор $x \overset{def}{=} f \oplus P_- f_1 \oplus \ldots \oplus P_- f_m$ является циклическим для оператора $\mathcal{U}_a \oplus S^{*m}$ .

Допустим, что

$$h \overset{def}{=} h_0 \oplus h_1 \oplus \ldots \oplus h_m \perp (\mathcal{U}_a \oplus S^{*m})^k x \quad \forall k \geqslant 0,$$

то есть

$$\int z^k (f\bar{h}_0 + f^{1/2}\bar{h}_1 + f^{2/3}\bar{h}_2 + \cdots + f_m \bar{h}_m)\, dm = 0,$$

и, следовательно,

$$f^{1/2}(f^{1/2}h_0 + h_1 + f^{1/6}h_2 + \cdots + f^{\frac{m-1}{2(m+1)}} h_m) \in H^1. \tag{3}$$

Поскольку любая ненулевая функция из $H^1$ имеет суммируемый логарифм модуля, а $\log f \notin L^1$, то $f^{1/2}h_0 + \sum_{k=1}^{m}(f_k/f_1)h_k = 0$, т.е.

$$-h_1 = f^{1/6}\Big[f^{1/3}h_0 + \sum_{k=2}^{m}(f_k/f_2)h_k\Big] \in H^2_-$$

И опять, так как $\log f \notin L^1$, то $h_1 = 0$ и

$$f^{1/3}h_0 + h_2 + \sum_{k=3}^{m}(f_k/f_2)h_k = 0.$$

Теперь аналогично получаем равенство $h_2 = 0$, и, продолжая по индукции, $h_k = 0$ для всех $k, 1 \leqslant k \leqslant m$. А тогда по условию (3) $f h_0 \in H^1$, что возможно, опять-таки, в силу несуммируемости $\log f$, лишь при $h_0 = 0$. Итак, $h = 0$, что и доказывает цикличность вектора $x$. ●●

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы нигде не предполагали в выражениях $S^n$ и $S^{*m}$, что числа $n$ и $m$ конечны. Все приведенные утверждения справедливы и для сдвигов бесконечной кратности.

Мы пользуемся случаем выразить свою признательность Н.К.Никольскому, только благодаря его интересу к вопросам, связанным с кратностью спектра, появилась настоящая заметка. Мы хотим поблагодарить А.А.Боричева за тщательное чтение рукописи, в результате которого была выявлена и устранена содержательная ошибка.

## Литература

1. Н и к о л ь с к и й Н.К. Наброски к вычислению кратности спектра ортогональных сумм. – В кн.: Исследования по линейным операторам и теории функций.XII. Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1983, т.126, с.150–158.

2. N i k o l s k i i N.K., V a s j u n i n V.I. Control subspaces of minimal dimension, unitary and model operators. - J.Operator Theory, 1983, v.10, N 2, p.307-330.
3. В а с ю н и н В.И., М а к а р о в Н.Г. О квазиподобии модельных сжатий с неравными дефектами. - В кн.: Исследования по линейным операторам и теории функций. ХУ. Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1986, т.149, с.24-37.

V.I.Vasyunin, M.T.Karayev. The multiplicity of some contractions.

Summary

For a unitary operator $\mathcal{U}=\mathcal{U}_a\oplus\mathcal{U}_s$ for a $C_0$-contraction $T$, for the unilateral shift $S$ and for the backward shift $S^*$ the multiplicity of its direct sum is calculated:

$$\mu(\mathcal{U}\oplus S^n\oplus S^{*m}\oplus T) = \max\{\mu_{\mathcal{U}_s}, n+\max\{\mu_{\mathcal{U}_a}, \mu_T, 1-\delta_{m0}\}\}$$

where $\delta_{m0}=1$ if $m=0$ and $\delta_{m0}=0$ if $m>0$ .