



Общероссийский математический портал

Л. А. Толоконников, С. Л. Толоконников, Дифракция плоской звуковой волны на упругом шаре с неоднородным трансверсально-изотропным слоем,
Чебышевский сб., 2021, том 22, выпуск 4, 332–343

<https://www.mathnet.ru/cheb1109>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.168

25 апреля 2025 г., 02:47:06



ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 4.

УДК 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-332-343

Дифракция плоской звуковой волны на упругом шаре с неоднородным трансверсально-изотропным слоем¹

Л. А. Толоконников, С. Л. Толоконников

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: Tolokonnikovla@mail.ru

Толоконников Сергей Львович — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: tolsl@mail.ru

Аннотация

В статье рассматривается задача дифракции гармонической плоской звуковой волны на однородном изотропном упругом шаре с непрерывно-неоднородным анизотропным упругим слоем. Полагается, что тело помещено в безграничную идеальную жидкость, законы неоднородности материала покрытия описываются непрерывными функциями.

Получено аналитическое решение задачи дифракции для случая, когда материал слоя, покрывающего шар, является радиально-неоднородным и трансверсально-изотропным.

Волновые поля в содержащей среде и однородном изотропном шаре описываются разложениями по сферическим волновым функциям, а для нахождения поля смещений в неоднородном анизотропном слое построена краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Представлены результаты численных расчетов диаграмм направленности рассеянного акустического поля в дальней зоне. Показано, что анизотропия непрерывно-неоднородного упругого слоя может существенно изменять характеристики рассеяния сферических тел.

Ключевые слова: дифракция, звуковые волны, однородный упругий шар, неоднородный анизотропный слой.

Библиография: 20 названий.

Для цитирования:

Л. А. Толоконников, С. Л. Толоконников. Дифракция плоской звуковой волны на упругом шаре с неоднородным трансверсально-изотропным слоем // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4, с. 332–343.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-11-00199, <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 4.

UDC 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-332-343

**Diffraction of a plane sound wave by an elastic sphere
with an inhomogeneous transversal isotropic layer**

L. A. Tolokonnikov, S. L. Tolokonnikov

Tolokonnikov Lev Alekseevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University (Tula).

e-mail: Tolokonnikovla@mail.ru

Tolokonnikov Sergey Lvovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: tolst@mail.ru

Abstract

In paper the problem of diffraction of a harmonic plane sound wave by a homogeneous isotropic elastic sphere with a continuously inhomogeneous anisotropic elastic layer is considered. It is believed that the body is placed in an infinite ideal fluid, the laws of heterogeneity of the coating material are described by continuous functions.

An analytical solution to the diffraction problem is obtained for the case when the material of the sphere layer is radially inhomogeneous and transversally isotropic.

Wave field in a containing medium and a homogeneous isotropic sphere are described by expansions in spherical wave functions. A boundary value problem is constructed for a system of ordinary differential equations of the second order for finding displacement fields in an inhomogeneous anisotropic layer of sphere.

The results of numerical calculations of directional patterns for scattered acoustic field in the far zone are presented. It is shown that anisotropy of continuously inhomogeneous elastic layer one can substantially change the scattering characteristics of spherical bodies.

Keywords: diffraction, sound waves, uniform elastic sphere, inhomogeneous anisotropic layer.

Bibliography: 20 titles.

For citation:

L. A. Tolokonnikov, S. L. Tolokonnikov, 2021, "Diffraction of a plane sound wave by an elastic sphere with an inhomogeneous transversal isotropic layer", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 332–343.

1. Введение

Дифракция звука на упругих телах сферической формы, находящихся в безграничной идеальной жидкости, рассматривалась во многих работах. Дифракция звуковых волн на однородных изотропных упругих сплошных шарах и сферических оболочках изучена, например, в работах [1 – 4]. Задача о рассеянии звука неоднородной изотропной упругой сферой решена в [5]. Исследовано рассеяние плоской звуковой волны однородным [6] и неоднородным трансверсально-изотропными [7] сферическими слоями, а также неоднородным термоупругим сферическим слоем [8]. Задача дифракции нестационарной акустической волны на неоднородной трансверсально-изотропной полый сфере решена в [9]. В [10 – 13] изучено влияние

покрытий сферических упругих тел на их звукоотражающие свойства. Решены задачи дифракции плоской [10], сферической [11] и цилиндрической [12] звуковых волн на упругом шаре с радиально-неоднородным изотропным покрытием. Задача дифракции плоской звуковой волны на упругом шаре с неоднородным покрытием и произвольно расположенной сферической полостью рассмотрена в [13]. Моделирование неоднородного покрытия упругого шара с требуемыми звукоотражающими свойствами проведено в [14]. Решены прямая и обратная задачи дифракции плоской звуковой волны на термоупругом шаре с непрерывно-неоднородным термоупругим покрытием в теплопроводной жидкости [15]. В [16] показана возможность моделирования непрерывно-неоднородного по толщине покрытия шара системой однородных упругих слоев.

В настоящей работе рассматривается задача дифракции гармонической плоской звуковой волны на однородном изотропном упругом шаре с непрерывно-неоднородным трансверсально-изотропным упругим слоем.

2. Постановка задачи

Рассмотрим однородный изотропный упругий шар радиусом r_0 , материал которого характеризуется плотностью ρ_0 и упругими постоянными λ_0 и μ_0 . Шар покрывает радиально-неоднородный трансверсально-изотропный упругий слой радиуса r_1 . Модули упругости λ_{ijkl} материала слоя описываются дифференцируемыми функциями радиальной координаты r сферической системы координат r, θ, φ , а его плотность ρ — непрерывной функцией координаты r . Сферическая система координат выбрана так, что ее начало совпадает с центром шара и является центром сферической анизотропии слоя. Шар находится в пространстве, заполненном однородной идеальной жидкостью с плотностью ρ_1 и скоростью звука c .

Пусть из внешнего пространства на шар падает плоская гармоническая звуковая волна, потенциал скорости которой равен

$$\psi_0 = A \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)],$$

где A — амплитуда волны; \mathbf{k} — волновой вектор; \mathbf{r} — радиус-вектор; ω — круговая частота; t — время. Без ограничения общности будем полагать, что плоская волна распространяется в направлении $\theta = 0$. Тогда $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kr \cos \theta$, где $k = \omega/c_1$ — волновое число в окружающей жидкости. В дальнейшем временную зависимость $\exp(-i\omega t)$ опускаем.

Определим акустическое поле, рассеянное телом, и поля смещений в однородном шаре и неоднородном трансверсально-изотропном слое.

3. Математическая модель задачи

Ввиду осевой симметрии задачи и свойств упругого материала слоя, возбуждаемые волновые поля вне тела, в однородном шаре и неоднородном анизотропном слое не будут зависеть от сферической координаты φ .

Распространение малых возмущений в идеальной жидкости в случае установившихся колебаний описывается уравнением Гельмгольца [17]

$$\Delta \psi + k^2 \psi = 0, \quad (3.1)$$

где $\psi = \psi_0 + \psi_s$ — потенциал скорости полного акустического поля; ψ_s — потенциал скорости рассеянной волны. При этом скорость частиц \mathbf{v} и акустическое давление p в жидкости определяются по формулам:

$$\mathbf{v} = \text{grad } \psi, \quad p = i\rho_1 \omega \psi. \quad (3.2)$$

Распространение малых гармонических колебаний в однородной изотропной упругой среде описывается скалярным и векторным уравнениями Гельмгольца [17] для продольных и поперечных волн

$$\Delta\Psi + k_l^2\Psi = 0, \quad (3.3)$$

$$\Delta\Phi + k_\tau^2\Phi = 0, \quad (3.4)$$

где Ψ и Φ — скалярный и векторный потенциалы смещения; $k_l = \omega/c_l$ и $k_\tau = \omega/c_\tau$ — волновые числа продольных и поперечных упругих волн; $c_l = \sqrt{(\lambda_0 + 2\mu_0)/\rho_0}$ и $c_\tau = \sqrt{\mu_0/\rho_0}$ — скорости продольных и поперечных волн соответственно. При этом вектор смещения частиц в упругом однородном шаре

$$\mathbf{u}^{(0)} = \text{grad}\Psi + \text{rot}\Phi. \quad (3.5)$$

Так как рассматриваемая задача осесимметричная, то $\Phi = \Phi(r, \theta)\mathbf{e}_\varphi$, где \mathbf{e}_φ — единичный вектор оси φ . Тогда векторное уравнение (3.4) сведется к одному скалярному уравнению относительно функции $\Phi(r, \theta)$, которое в сферической системе координат имеет вид

$$\Delta\Phi + \left(k_\tau^2 - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\right)\Phi = 0, \quad (3.6)$$

где

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right).$$

Распространение упругих волн в неоднородном анизотропном упругом слое описывается общими уравнениями движения сплошной среды [18], которые при отсутствии массовых сил и с учетом временной зависимости $\exp(-i\omega t)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{r\theta} \text{ctg} \theta) &= -\rho\omega^2 u_r, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} [(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) \text{ctg} \theta + 3\sigma_{r\theta}] &= -\rho\omega^2 u_\theta, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений в слое; u_r и u_θ — проекции вектора смещения \mathbf{u} на оси сферических координат r и θ ; $\rho = \rho(r)$.

В дальнейшем воспользуемся двухиндексным обозначением модулей упругости λ_{ik} , где $i, k = 1, 2, \dots, 6$. При этом значениям индексов 1, 2, 3, 4, 5, 6 отвечают соответственно пары индексов 11, 22, 33, 23, 13, 12.

Для трансверсально-изотропного материала слоя число независимых модулей упругости равно пяти ($\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{22}, \lambda_{23}, \lambda_{55}$). При такой анизотропии поверхностями изотропии являются концентрические сферические поверхности.

В этом случае обобщенный закон Гука записывается в виде [18]

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda_{11}\varepsilon_{rr} + \lambda_{12}(\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\varphi\varphi}), & \sigma_{r\theta} &= 2\lambda_{55}\varepsilon_{r\theta}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \lambda_{12}\varepsilon_{rr} + \lambda_{22}\varepsilon_{\theta\theta} + \lambda_{23}\varepsilon_{\varphi\varphi}, & \sigma_{r\varphi} &= 2\lambda_{55}\varepsilon_{r\varphi}, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \lambda_{12}\varepsilon_{rr} + \lambda_{23}\varepsilon_{\theta\theta} + \lambda_{22}\varepsilon_{\varphi\varphi}, & \sigma_{\theta\varphi} &= 2\lambda_{44}\varepsilon_{\theta\varphi}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где ε_{kl} — компоненты тензора деформаций; $\lambda_{44} = \frac{1}{2}(\lambda_{22} - \lambda_{23})$; $\lambda_{ik} = \lambda_{ik}(r)$.

На внешней поверхности слоя $r = r_1$, соприкасающейся с жидкостью, граничные условия заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой неоднородной анизотропной среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений

$$-i\omega u_r = v_r, \quad \sigma_{rr} = -p, \quad \sigma_{r\theta} = 0 \quad \text{при } r = r_1, \quad (3.9)$$

где $v_r = \partial\psi/\partial r$ — нормальная скорость частиц жидкости.

На внутренней поверхности слоя $r = r_0$ должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, а также нормальные и тангенциальные напряжения

$$u_r = u_r^{(0)}, \quad u_\theta = u_\theta^{(0)}, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{rr}^{(0)}, \quad \sigma_{r\theta} = \sigma_{r\theta}^{(0)} \quad \text{при } r = r_0, \quad (3.10)$$

где $u_r^{(0)}$, $u_\theta^{(0)}$ и $\sigma_{ij}^{(0)}$ — компоненты вектора смещения $\mathbf{u}^{(0)}$ и тензора напряжений в однородном шаре соответственно.

Искомыми величинами являются $\psi_s(r, \theta)$, $\Psi(r, \theta)$, $\Phi(r, \theta)$, $u_r(r, \theta)$ и $u_\theta(r, \theta)$. Таким образом, в математической постановке задача состоит в нахождении решений уравнений (3.1), (3.3), (3.6), (3.7), удовлетворяющих граничным условиям (3.9) и (3.10).

4. Аналитическое решение задачи

Потенциал скорости падающей плоской волны представим в виде [19]

$$\psi_0(r, \theta) = A \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) j_n(kr) P_n(\cos \theta), \quad (4.1)$$

где $j_n(x)$ — сферическая функция Бесселя порядка n , $P_n(x)$ — многочлен Лежандра степени n .

Учитывая условия излучения на бесконечности, функцию Ψ_s , являющуюся решением уравнения (3.1), будем искать в виде

$$\psi_s(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n h_n(kr) P_n(\cos \theta), \quad (4.2)$$

где $h_n(x)$ — сферическая функция Ганкеля первого рода порядка n .

Учитывая условия ограниченности, функции Ψ и Φ будем искать в виде

$$\Psi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n j_n(kr) P_n(\cos \theta), \quad (4.3)$$

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n j_n(kr) \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta). \quad (4.4)$$

Запишем уравнения распространения упругих волн в неоднородном анизотропном слое (3.7) через компоненты вектора смещения \mathbf{u} . Для этого воспользуемся соотношениями (3.8) и выражениями компонент тензора деформаций ε_{ij} через компоненты вектора смещения \mathbf{u} в сферической системе координат [18]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right), \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} (u_r + u_\theta \operatorname{ctg} \theta), \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Получаем

$$\lambda_{11} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \left(\lambda'_{11} + \frac{2}{r} \lambda_{11} \right) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \lambda_{55} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \lambda_{55} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial u_r}{\partial \theta} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[\frac{2}{r} \lambda'_{12} + \frac{2}{r^2} (\lambda_{12} - \lambda_{22} - \lambda_{23}) + \rho\omega^2 \right] u_r + \frac{1}{r} (\lambda_{12} + \lambda_{55}) \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} + \\
 & + \frac{1}{r} (\lambda_{12} + \lambda_{55}) \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \left[\lambda'_{12} + \frac{1}{r} (\lambda_{12} - \lambda_{22} - \lambda_{23} - \lambda_{55}) \right] \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \\
 & + \frac{1}{r} \operatorname{ctg} \theta \left[\lambda'_{12} + \frac{1}{r} (\lambda_{12} - \lambda_{22} - \lambda_{23} - \lambda_{55}) \right] u_\theta = 0, \tag{4.6} \\
 & \lambda_{55} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \lambda_{22} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \left(\lambda'_{55} + \frac{2}{r} \lambda_{55} \right) \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \lambda_{22} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \\
 & + \frac{1}{r} (\lambda_{12} + \lambda_{55}) \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \left[\lambda'_{55} + \frac{1}{r} (\lambda_{22} + \lambda_{23} + 2\lambda_{55}) \right] \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \\
 & - \left[\frac{1}{r} \lambda'_{55} + \frac{1}{r^2} (\lambda_{23} + 2\lambda_{55} + \lambda_{22} \operatorname{ctg}^2 \theta) - \rho\omega^2 \right] u_\theta = 0.
 \end{aligned}$$

Штрихи означают дифференцирование по r .

Функции $u_r(r, \theta)$ и $u_\theta(r, \theta)$ будем искать в виде разложений

$$u_r(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} U_{1n}(r) P_n(\cos \theta), \quad u_\theta(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} U_{2n}(r) \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta) \tag{4.7}$$

Подставим разложения (4.7) в уравнения (4.6). Воспользовавшись уравнением для многочленов Лежандра [20]

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta) \right] + n(n+1) P_n(\cos \theta) = 0$$

и свойством ортогональности сферических гармоник [20], получим для каждого индекса n ($n = 0, 1, \dots$) систему линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $U_{1n}(r)$ и $U_{2n}(r)$

$$\hat{\mathbf{A}}_n \mathbf{U}_n'' + \hat{\mathbf{B}}_n \mathbf{U}_n' + \hat{\mathbf{C}}_n \mathbf{U}_n = 0, \tag{4.8}$$

где $\mathbf{U}_n = (U_{1n}, U_{2n})^T$;

$$\hat{\mathbf{A}}_n = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 \\ 0 & \lambda_{55} \end{pmatrix}; \quad \hat{\mathbf{B}}_n = \begin{pmatrix} \lambda'_{11} + \frac{2}{r} \lambda_{11} & \frac{1}{r} (\lambda_{12} + \lambda_{55}) \\ \frac{1}{r} (\lambda_{12} + \lambda_{55}) & \lambda'_{55} + \frac{2}{r} \lambda_{55} \end{pmatrix}; \quad \hat{\mathbf{C}}_n = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= \frac{1}{r^2} [2r \lambda'_{12} + 2(\lambda_{12} - \lambda_{22} - \lambda_{23}) - n(n+1) \lambda_{55}] + \rho\omega^2; \\
 c_{12} &= -\frac{n(n+1)}{r^2} (r \lambda'_{12} + \lambda_{12} - \lambda_{22} - \lambda_{23} - \lambda_{55}); \\
 c_{21} &= \frac{1}{r^2} (r \lambda'_{55} + \lambda_{22} + \lambda_{23} + 2\lambda_{55}); \\
 c_{22} &= \frac{1}{r^2} [-r \lambda'_{55} + \lambda_{22} - \lambda_{23} - 2\lambda_{55} - n(n+1) \lambda_{22}] + \rho\omega^2.
 \end{aligned}$$

Коэффициенты A_n , B_n и C_n разложений (4.2) – (4.4) подлежат определению из граничных условий.

Из первого граничного условия (3.9) находим коэффициенты A_n , выраженные через величины $U_{1n}(r_1)$

$$A_n = -\frac{Ai^n(2n+1)kj'_n(kr_1) + i\omega U_{1n}(r_1)}{kh'_n(kr_1)}. \quad (4.9)$$

Здесь и далее штрихи означают дифференцирование по аргументу.

Из первых двух условий (3.10) найдем коэффициенты B_n и C_n , выраженные через величины $U_{2n}(r_0)$

$$B_n = [U_{2n}(r_0)n(n+1)j_n(k_\tau r_0) - U_{1n}(r_0)(j_n(k_\tau r_0) + k_\tau r_0 j'_n(k_\tau r_0))]r_0 q_n^{-1}, \quad (4.10)$$

$$C_n = [U_{2n}(r_0)k_l r_0 j'_n(k_l r_0) - U_{1n}(r_0)j_n(k_l r_0)]r_0 q_n^{-1}, \quad (4.11)$$

где $q_n = n(n+1)j_n(k_l r_0)j_n(k_\tau r_0) - k_l r_0 j'_n(k_l r_0)[j_n(k_\tau r_0) + k_\tau r_0 j'_n(k_\tau r_0)]$.

При выводе (4.10) и (4.11) использовались выражения компонент вектора $\mathbf{u}^{(0)}$ через функции Ψ и Φ , полученные из (3.5),

$$u_r^{(0)} = \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \Phi), \quad u_\theta^{(0)} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r} (r \Phi) \right]. \quad (4.12)$$

Из оставшихся неиспользованными граничных условий получаем четыре краевых условия, которым должно удовлетворять решение системы дифференциальных уравнений (4.8)

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{A}}_n \mathbf{U}'_n + \hat{\mathbf{E}}_n \mathbf{U}_n)_{r=r_1} &= \hat{\mathbf{D}}_n, \\ (\hat{\mathbf{A}}_n \mathbf{U}'_n + \hat{\mathbf{F}}_n \mathbf{U}_n)_{r=r_0} &= 0, \end{aligned} \quad (4.13)$$

где

$$\hat{\mathbf{E}}_n = \begin{pmatrix} \frac{2\lambda_{12}}{r} + \frac{\rho_1 \omega^2 h_n(kr)}{kh'_n(kr)} & -\frac{\lambda_{12}}{r} n(n+1) \\ \frac{\lambda_{55}}{r} & -\frac{\lambda_{55}}{r} \end{pmatrix};$$

$$\hat{\mathbf{D}}_n = \left(\frac{Ai^n(2n+1)\rho_1 \omega}{(kr_1)^2 h'_n(kr_1)}, 0 \right)^T; \quad \hat{\mathbf{F}}_n = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} f_{11} &= 2\lambda_{12}r^{-1} + [a_n b_n + c_n j_n(k_l r)]q_n^{-1}r^{-1}; \\ f_{12} &= -\lambda_{12}n(n+1)r^{-1} - [b_n n(n+1)j_n(k_\tau r) + c_n k_l r j'_n(k_l r)]q_n^{-1}r^{-1}; \\ f_{21} &= \lambda_{55}r^{-1} + [a_n d_n + e_n j_n(k_l r)]q_n^{-1}r; \\ f_{22} &= -\lambda_{55}r^{-1} - [d_n n(n+1)j_n(k_\tau r) + e_n k_l r j'_n(k_l r)]q_n^{-1}r; \\ a_n &= j_n(k_\tau r) + k_\tau r j'_n(k_\tau r); \\ b_n &= (\lambda_0 + 2\mu_0)k_l^2 r^2 j''_n(k_l r) + 2\lambda_0 k_l r j'_n(k_l r) - \lambda_0 n(n+1)j_n(k_l r); \\ c_n &= 2\mu_0 n(n+1)[j_n(k_\tau r) - k_\tau r j'_n(k_\tau r)]; \\ d_n &= 2\mu_0 [k_l j'_n(k_l r) - r^{-1}j_n(k_l r)]r^{-1}; \\ e_n &= \mu_0 [2 - n(n+1)]j_n(k_\tau r)r^{-2} - k_\tau^2 j''_n(k_\tau r). \end{aligned}$$

При выводе (4.13) использовались соотношения между компонентами тензора напряжений $\sigma_{rr}^{(0)}$, $\sigma_{r\theta}^{(0)}$ и компонентами вектора смещения $\mathbf{u}^{(0)}$ [23]

$$\sigma_{rr}^{(0)} = (\lambda_0 + 2\mu_0) \frac{\partial u_r^{(0)}}{\partial r} + \frac{\lambda_0}{r} \left(2u_r^{(0)} + \frac{\partial u_\theta^{(0)}}{\partial \theta} + u_\theta^{(0)} \operatorname{ctg} \theta \right),$$

$$\sigma_{r\theta}^{(0)} = \mu_0 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(0)}}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta^{(0)}}{\partial r} \right),$$

соотношения (3.8), (4.5), (4.12), а также выражение для вронскиана [20]

$$j_n(x)h'_n(x) - j'_n(x)h_n(x) = i/x^2.$$

Коэффициенты A_n , B_n и C_n могут быть вычислены лишь после решения краевой задачи (4.8), (4.13), то есть после определения поля смещений в неоднородном трансверсально-изотропном слое. Решение краевой задачи может быть найдено различными методами (например, [7, 8]).

В результате получаем аналитическое описание акустического поля, рассеянного шаром с неоднородным трансверсально-изотропным слоем в виде (4.2).

Заметим, что для получения решения задачи в случае изотропного упругого слоя следует положить

$$\lambda_{11} = \lambda_{22} = \lambda + 2\mu, \quad \lambda_{12} = \lambda_{23} = \lambda, \quad \lambda_{55} = \mu,$$

где λ и μ — коэффициенты Ламе изотропной среды.

Рассмотрим дальнюю зону акустического поля. Используя асимптотическое представление сферических функций Ганкеля при больших значениях аргумента [20]

$$h_n(kr) \simeq \frac{e^{ikr}}{kr} \quad (kr \gg 1),$$

получаем из (4.2) выражение для потенциала скорости рассеянной звуковой волны

$$\Psi_s = \frac{r_0}{2r} \exp(ikr) F(\theta),$$

где

$$F(\theta) = \frac{2}{kr_0} \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^{n+1} A_n P_n(\cos \theta)$$

5. Численные исследования

Были проведены расчеты амплитуды рассеяния $|F(\theta)|$ для однородного изотропного стального шара ($\rho_0 = 7,7 \cdot 10^3$ кг/м³, $\lambda_0 = 5,3 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\mu_0 = 2,6 \cdot 10^{10}$ Н/м²) с волновым размером $kr_0 = 7$. Полагалось, что тело помещено в воду ($\rho_1 = 10^3$ кг/м³, $c = 1485$ м/с), амплитуда падающей волны $A = 1$, а отношение внешнего радиуса r_1 трансверсально-изотропного сферического слоя к внутреннему r_0 равно 1.4.

Краевая задача (4.8), (4.13) решена методом сведения ее к задачам с начальными условиями (например, [7, 10, 12]). При расчетах суммирование членов ряда (4.2) проводилось по n до $n = 10kr_0$.

Рассматривались два типа анизотропных материалов слоя, изотропной базой которых является алюминий ($\bar{\rho} = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³, $\bar{\lambda}_{11} = 10,5 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\bar{\lambda}_{12} = 5,3 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\bar{\lambda}_{22} = 10,5 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\bar{\lambda}_{23} = 5,3 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\bar{\lambda}_{55} = 2,6 \cdot 10^{10}$ Н/м²).

Были выбраны следующие средние значения модулей упругости выбранных неоднородных анизотропных материалов:

тип 1 — $\bar{\lambda}_{11} = 5,74 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\bar{\lambda}_{12} = 3,28 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\bar{\lambda}_{22} = 16,4 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\bar{\lambda}_{23} = 5,3 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\bar{\lambda}_{55} = 2,54 \cdot 10^{10}$ Н/м².

тип 2 — $\bar{\lambda}_{11} = 16,4 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\bar{\lambda}_{12} = 0,82 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\bar{\lambda}_{22} = 5,74 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\bar{\lambda}_{23} = 5,3 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\bar{\lambda}_{55} = 2,95 \cdot 10^{10}$ Н/м².

Упругие характеристики трансверсально-изотропных материалов типов 1 и 2 таковы, что максимум фазовой скорости квазипродольных волн v_l в материале типа 1 достигается в направлении касательной к поверхности изотропии, а в материале типа 2 — в радиальном направлении. Причем максимальные (и минимальные) значения фазовых скоростей квазипродольных волн для материалов 1 и 2 совпадают, а отношение $v_{l\max}/v_{l\min} \approx 1,7$.

Расчеты проводились для неоднородного покрытия, механические характеристики которого менялись по толщине слоя по закону

$$\rho = \bar{\rho}f(r), \quad \lambda_{ij} = \bar{\lambda}_{ij}f(r), \quad f(r) = 1 + 4 \left(\frac{r - r_0}{r_1 - r_0} \right)^2.$$

На рисунке представлены диаграммы направленности рассеянного поля в дальней зоне. На лучах диаграмм отложены значения безразмерной амплитуды рассеяния $|F|$, вычисленной для соответствующих значений угла θ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$). Сплошная линия соответствует неоднородному изотропному слою, пунктирная и штриховая линии — неоднородным трансверсально-изотропным слоям типа 1 и 2 соответственно. Стрелкой показано направление распространения падающей плоской волны.

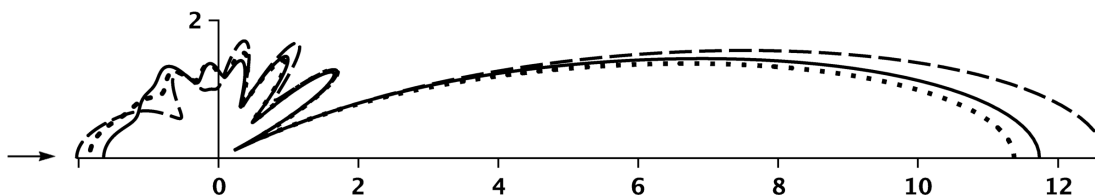


Рис. 1: Диаграммы направленности

Как показывают расчеты, анизотропия слоя, покрывающего шар существенно влияет на характер рассеяния звука.

6. Заключение

В настоящей работе получено аналитическое решение задачи дифракции плоской звуковой волны на упругом шаре с неоднородным трансверсально-изотропным слоем, позволяющее исследовать влияние материала покрытия с разными видами неоднородности и типами анизотропии на звукоотражающие характеристики тела при различных значениях волнового размера шара. На основе решения прямой задачи можно рассмотреть обратную задачу об определении законов неоднородности материала слоя, позволяющих получить требуемые звукоотражающие свойства сферического тела в заданных диапазонах частот и секторах наблюдения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Faran J. J. Sound scattering by solid cylinders and spheres // J. Acoust. Soc. Amer. 1951. Vol. 23, No. 4. P. 405 – 418.
2. Junger M. C. Sound scattering by thin elastic shells // J. Acoust. Soc. Amer. 1952. Vol. 24, No. 4. P. 366 – 373.
3. Flax L., Dragonette L. R., Uberall H. Theory of elastic resonance excitation by sound scattering // J. Acoust. Soc. Amer. 1978. V. 63. No. 3. P. 723 – 731.
4. Goodman R. D., Stern R. Reflection and transmission of sound by elastic spherical shells // J. Acoust. Soc. Amer. 1962. Vol. 34, No. 3. P. 338 – 344.

5. Приходько В. Ю., Тютюкин В. В. О собственных частотах и формах колебаний радиально-слоистых упругих тел // Прикл. механика. 1987. Т. 23, № 6. С. 9 – 14.
6. Шендеров Е. Л. Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение, 1989. 304 с.
7. Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Рассеяние звука неоднородным трансверсально-изотропным сферическим слоем // Акустический журн. 1995. Т. 41, № 6. С. 917 – 923.
8. Ларин Н. В., Толоконников Л. А. Рассеяние звука неоднородным термоупругим сферическим слоем // Прикладная математика и механика. 2010. Т. 74, вып. 4. С. 645 – 654.
9. Бригадирова Т. Е., Медведский А. Л. Дифракция нестационарной акустической волны на неоднородной трансверсально-изотропной полой сфере // Механика композ. матер. и конструкций. 2007. Т. 13. № 1. С. 119 – 130.
10. Толоконников Л. А. Рассеяние плоской звуковой волны упругим шаром с неоднородным покрытием // Прикладная математика и механика. 2014. Т. 78, вып. 4. С. 519 – 526.
11. Толоконников Л. А., Родионова Г. А. Дифракция сферической звуковой волны на упругом шаре с неоднородным покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2014. Вып. 3. С. 131 – 137.
12. Толоконников Л. А. Дифракция цилиндрических звуковых волн на упругой сфере с неоднородным покрытием // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79, вып. 5. С. 663 – 673.
13. Толоконников Л. А. Дифракция плоской звуковой волны на упругом шаре с неоднородным покрытием и произвольно расположенной сферической полостью // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2014. Вып. 2. С. 181 – 193.
14. Толоконников Л. А., Ларин Н. В., Скобельцын С. А. Моделирование неоднородного покрытия упругого шара с требуемыми звукоотражающими свойствами // Математическое моделирование. 2017. Т. 29, № 11. С. 89 – 98.
15. Ларин Н. В., Толоконников Л. А. Рассеяние звука термоупругим шаром с непрерывно-неоднородным покрытием в теплопроводной жидкости // Математическое моделирование. 2019. Т. 31, № 5. С. 20 – 38.
16. Толоконников Л. А. Моделирование непрерывно-неоднородного покрытия упругого шара системой однородных упругих слоев в задаче рассеяния звука // Прикладная математика и механика. 2017. Т. 81, вып. 6. С. 699 – 707.
17. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
18. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
19. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
20. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.: Физматгиз, 1963. 358 с.

REFERENCES

1. Faran, J. J. 1951, "Sound scattering by solid cylinders and spheres", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 23, no. 4, pp. 405 – 418.
2. Junger, M. C. 1952, "Sound scattering by thin elastic shells", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 24, no. 4, pp. 366 – 373.
3. Flax, L., Dragonette, L. R. & Uberall, H. 1978, "Theory of elastic resonance excitation by sound scattering", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 63, no. 3, pp. 723 – 731.
4. Goodman, R. D. & Stern, R. 1962, "Reflection and transmission of sound by elastic spherical shells", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 34, no 3, pp. 338 – 344.
5. Prikhod'ko, V. Yu. & Tyutekin, V. V. 1987, "Eigenfrequencies and normal modes of a radially layered elastic body", *Soviet Applied Mechanics*, vol. 23, no 6, pp. 518 – 522.
6. Shenderov, E. L. 1989, "Radiation and scattering of sound", Sudostroenie, Leningrad, 304 p., [in Russian].
7. Skobel'tsyn, S. A. & Tolokonnikov, L. A. 1995, "Sound scattering by an inhomogeneous transversely isotropic spherical layer", *Acoustical Physics*, vol. 41, no 6, pp. 812 – 818.
8. Larin, N. V. & Tolokonnikov, L. A. 2010, "Scattering of sound by an inhomogeneous thermoelastic spherical layer", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 74, no. 4, pp. 460 – 466.
9. Brigodirova, T.É. & Medvedskii A.Ĺ. 2007, "Diffraction of a nonstationary acoustic wave by an inhomogeneous transversely isotropic hollow sphere", *J. Mechanics of Composite Materials and Structures*, vol. 13, no. 1, pp. 119 – 130, [in Russian].
10. Tolokonnikov, L. A. 2014, "The scattering of a plane sound wave by an elastic sphere with an inhomogeneous coating", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 78, no. 4, pp. 367 – 373.
11. Tolokonnikov, L. A. & Rodionova, G. A. 2014, "Diffraction of a spherical acoustic wave by an elastic sphere with a non-uniform covering", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 3, pp. 131 – 137, [in Russian].
12. Tolokonnikov, L. A. 2015, "Diffraction of cylindrical sound waves by an elastic sphere with an inhomogeneous coating", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 79, no. 5, pp. 467 – 474.
13. Tolokonnikov, L. A. 2014, "Diffraction of a plane acoustic wave by an elastic sphere with a non-uniform covering and arbitrarily situated spherical vacuity", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 2, pp. 181 – 193, [in Russian].
14. Tolokonnikov, L. A., Larin, N. V. & Skobel'tsyn, S. A. 2018, "Modeling an inhomogeneous coating of an elastic sphere with the required sound reflecting properties", *Mathematical Models and Computer Simulations*, vol. 10, no. 3, pp. 333 – 340.
15. Larin, N. V. & Tolokonnikov, L. A. 2019, "Sound Scattering by a Thermoelastic Ball with a Continuously Inhomogeneous Coating in a Heat-Conducting Fluid", *Mathematical Models and Computer Simulations*, vol. 11, no. 6, pp. 1007 – 1018.
16. Tolokonnikov, L. A. 2017, "Modelling of a continuously inhomogeneous coating of an elastic sphere by a system of homogeneous elastic layers in the problem of sound scattering", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 81, no. 6, pp. 480 – 485.

17. Shenderov, E.L. 1972, "*Wave problems of underwater acoustics*", Sudostroenie, Leningrad, 352 p. [in Russian].
18. Nowacki, W. 1973, "*Teoria sprzystosci*", PWN, Warszawa.
19. Ivanov, E. A. 1968, "*Diffraction of electromagnetic waves by two bodies*", Nauka i tekhnika, Minsk, 584 p., [in Russian].
20. Lebedev, N. N. 1963, "*Special Functions and their Applications*", Fizmatgiz, Moscow, 358 p., [in Russian].

Получено 29.07.2021 г.

Принято в печать 6.12.2021 г.