Математические заметки СВФУ
Апрель—июнь, 2016. Том 23, № 2

УДК 517.946

О ПОВЕДЕНИИ ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ НА КОНЦАХ КОНТУРА ИНТЕГРИРОВАНИЯ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕМЕННОГО НАПРАВЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ

С. В. Попов

Аннотация. Рассматривается теорема Н. И. Мусхелишвили о поведении интеграла типа Коши на концах контура интегрирования и в точках разрыва плотности и ее приложение для краевых задач для $2n$-параболических уравнений с меняющимся направлением времени. Для параболических уравнений с меняющимся направлением времени гладкость начальных и граничных данных, вообще говоря, не обеспечивает принадлежность решения гёльдеровским пространствам. Применение теории сингулярных уравнений дает возможность наряду с гладкостью данных задачи указать дополнительно необходимые и достаточные условия, обеспечивающие принадлежность решения гёльдеровским пространствам. Более того, применением единого подхода при общих условиях сопряжения (склеивания) для таких уравнений можно показать, что нецелый показатель пространства может существенно влиять как на количество условий разрешимости, так и на гладкость решения исходного уравнения. В предлагаемой работе для доказательства разрешимости краевых задач для таких уравнений рассмотрены непрерывные условия склеивания, включая $(2n-1)$-ю производную. Отметим случай $n = 3$, когда гладкость входных данных с условиями разрешимости определяют принадлежность решения более гладким гёльдеровским пространствам вблизи концов контура интегрирования.

Ключевые слова: интеграл типа Коши, теорема Мусхелишвили, параболические уравнения с меняющимся направлением времени, условия склеивания, пространство Гёльдера, сингулярное интегральное уравнение.

1. Введение

Изучаются параболические уравнения с меняющимся направлением времени с помощью применения теории сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши [1–5], а также поведение интеграла типа Коши на концах контура интегрирования и в точках разрыва плотности в пространствах Гёльдера. Известно, что гёльдеровские классы решений параболических уравнений переменного направления времени существенно зависят от нецелого показателя

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2014–2016 гг. (код проекта 3047).

$p-[p]$. Некоторые предварительные результаты о связи гладкости решений параболических уравнений переменного типа с условиями склеивания и нецелым показателем гёльдеровских классов были установлены в [6–9].

Отметим также, что большое число работ посвящено изучению линейных уравнений второго порядка. Общая теория краевых задач для уравнений смешанного типа с произвольными коэффициентами и многообразием смены типа были предметом исследований многих авторов (см. [10–12] и имеющуюся там библиографию).

В настоящей работе изучается поведения интеграла типа Коши на концах контура интегрирования и в точках разрыва плотности, доказательство теоремы Н. И. Мусхелишвили, с помощью которой уточнены теоремы разрешимости краевых задач для параболических уравнений с меняющимся направлением времени.

2. Теорема Н. И. Мусхелишвили

Пусть $L = ab$ — гладкая разомкнутая дуга на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и $\varphi(\tau) \in H^\lambda(L)$, $0 < \lambda < 1$, концы a или b обозначим через c. Будем считать, что положительное направление на L ведет от a к b.

Рассмотрим интеграл типа Коши с плотностью, имеющей интегрируемую особенность:

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{(\tau-c)^\mu(\tau-t)}\,d\tau, \tag{1}$$

где $0 < \mu < 1$ и $\varphi(\tau) \in H^\lambda(L)$ вблизи c, включая c, $0 < \lambda < 1$.

Перепишем формулу (1) в виде

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)-\varphi(c)}{(\tau-c)^\mu(\tau-t)}\,d\tau + \frac{\varphi(c)}{2\pi i}\int\limits_L \frac{d\tau}{(\tau-c)^\mu(\tau-t)}\,d\tau \equiv F(t) + \varphi(c)\Omega(t), \tag{2}$$

где $\Omega(t)$ вблизи точки a определяется формулой

$$\Omega(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{d\tau}{(\tau-a)^\mu(\tau-t)}\,d\tau = \frac{1}{2i}\operatorname{ctg}(\mu\pi)(t-a)^{-\mu} + \Omega_1(t), \tag{3}$$

вблизи точки b — формулой

$$\Omega(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{d\tau}{(\tau-b)^\mu(\tau-t)}\,d\tau = -\frac{1}{2i}\operatorname{ctg}(\mu\pi)(t-b)^{-\mu} + \Omega_2(t), \tag{4}$$

здесь $\Omega_1(z)$ — аналитическая в окрестности точки a, а $\Omega_2(z)$ — аналитическая в окрестности точки b функции.

Введем обозначение

$$\Psi(t) = \frac{(t-c)^\mu}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\psi(\tau)}{(\tau-c)^\mu(\tau-t)}\,d\tau \equiv (t-c)^\mu F(t), \tag{5}$$

где
$$\psi(\tau) = \varphi(\tau) - \varphi(c) \in H^{\lambda}(L)$$
вблизи c, включая c.

Докажем теорему о гёльдеровости функции $\Psi(t)$ для точек контура L в окрестности точки c, включая c.

Теорема 1 (Н. И. Мусхелишвили). *Пусть $\varphi(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем λ вблизи c, $0 < \lambda < 1$, $0 < \mu < 1$. Тогда для точек контура ab интеграл типа Коши*
$$\Psi(t) = (t-c)^{\mu} \int\limits_{ab} \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - c)^{\mu}(\tau - t)}\, d\tau \tag{6}$$
удовлетворяет условию Гёльдера вблизи c, включая c, с показателем $\min\{\lambda, \mu\}$ при $\lambda \neq \mu$ и условию Гёльдера с показателем $\lambda - \varepsilon$ при $\lambda = \mu$, где ε — сколь угодно малая положительная постоянная.

Доказательство. Впервые теорема о гёльдеровости интеграла типа Коши $\Psi(t)$ для точек контура L была доказана в [4], но в несколько слабой форме и другим методом, чем она доказана в [2].

Лемма 1 [2, с. 82–88]. *Пусть $\varphi(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем λ вблизи c, $0 < \lambda < 1$ и $0 < \mu < 1$. Тогда для точек контура ab интеграл типа Коши*
$$\Psi(t) = (t-c)^{\mu} \int\limits_{ab} \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - c)^{\mu}(\tau - t)}\, d\tau \tag{7}$$
удовлетворяет условию Гёльдера вблизи c, включая c, с показателем μ при $\mu < \lambda$ и условию Гёльдера с показателем $\lambda - \varepsilon$ при $\lambda \leq \mu$, где ε — сколь угодно малая положительная постоянная.

Из леммы 1 имеем $\Psi(t) \in H^{\min\{\lambda,\mu\}-\varepsilon}(ab)$, но $\Psi(t) \in H^{\min\{\lambda,\mu\}}(ab)$ при $\lambda < \mu$.

Далее воспользуемся утверждением, доказанным в [3].

Лемма 2 [3, с. 14–17]. *Пусть $\varphi(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем λ вблизи c, $\frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{4}$ и $\mu = \frac{3}{4}$. Тогда для точек контура ab интеграл типа Коши $\Psi(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера вблизи c, включая c, с показателем λ.*

Из леммы 2 имеем $\Psi(t) \in H^{\lambda}(ab)$ при $\lambda < \frac{3}{4}$.

Перейдем к доказательству теоремы. Из утверждений лемм 1 и 2 следует, что для доказательства теоремы достаточно рассмотреть случай $\lambda < \mu$.

Пусть $\lambda < \mu$. Без ограничения общности предполагаем $a = 0$, $b = 1$ и $L = [0, 1]$. При $c = 0$ имеем
$$\Psi(t) = t^{\mu} \int\limits_0^1 \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{\tau^{\mu}(\tau - t)}.$$

Для доказательства принадлежности $\Psi(t) \in H^{\lambda}(0,1)$ достаточно показать, что функция $\Psi(t)$ удовлетворяет неравенству

$$|\Psi(t+h) - \Psi(t)| \le C \cdot h^{\lambda}$$

с постоянной C, не зависящей от h.

Если $0 < t < h$, то рассмотрим

$$\Psi(t) = t^{\mu} \int\limits_0^1 \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau^{\mu}(\tau - t)}\, d\tau + t^{\mu}\varphi(t) \int\limits_0^1 \frac{d\tau}{\tau^{\mu}(\tau - t)} = \Psi_1(t) + \Psi_2(t). \tag{8}$$

Покажем, что для первого интеграла $\Psi_1(t) = O(t^{\lambda})$ для t, близких к 0. В самом деле, справедливо неравенство

$$|\Psi_1(t)| \le C_1 t^{\mu} \int\limits_0^1 \frac{|\tau - t|^{\lambda - 1}}{\tau^{\mu}}\, d\tau,$$

из которого, произведя подстановку $\tau = \sigma \cdot t$, получим

$$|\Psi_1(t)| \le C_1 t^{\mu} \int\limits_0^{\frac{1}{t}} \frac{t^{\lambda-1}|1-\sigma|^{\lambda-1} t}{t^{\mu}\sigma^{\mu}}\, d\sigma \le C_1 t^{\lambda} \int\limits_0^{+\infty} \sigma^{-\mu}|1-\sigma|^{\lambda-1}\, d\sigma = C_2 t^{\lambda},$$

где последний интеграл сходится, поскольку на бесконечности имеем $1 - \lambda + \mu > 1$, а вблизи точки 0 имеем $\mu < 1$. Рассмотрим второй интеграл

$$\Psi_2(t) = t^{\mu}\varphi(t) \int\limits_0^1 \frac{d\tau}{\tau^{\mu}(\tau - t)} = t^{\mu}\varphi(t)\left[\frac{\pi \operatorname{ctg}[(1-\mu)\pi]}{t^{\mu}} + \frac{1}{\mu}F(\mu, 1, 1+\mu; t)\right]$$
$$= \varphi(t)\pi \operatorname{ctg}[(1-\mu)\pi] + \frac{t^{\mu}\varphi(t)}{\mu}F(\mu, 1, 1+\mu; t).$$

Очевидно, $\Psi_2(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем λ для t, близких к 0.

Рассмотрим промежуток $h \le t < 1$ при любом $h > 0$ и первый интеграл $\Psi_1(t)$ в (8). Имеем

$$\Psi_1(t+h) - \Psi_1(t) = t^{\mu}\varphi(t) \int\limits_0^1 \frac{d\tau}{\tau^{\mu}(\tau - t)} - (t+h)^{\mu}\varphi(t+h) \int\limits_0^1 \frac{d\tau}{\tau^{\mu}(\tau - t - h)}$$
$$- t^{\mu} \int\limits_0^1 \frac{\varphi(\tau)}{\tau^{\mu}(\tau - t)}\, d\tau + (t+h)^{\mu} \int\limits_0^1 \frac{\varphi(\tau)}{\tau^{\mu}(\tau - t - h)}\, d\tau$$
$$= [\varphi(t) - \varphi(t+h)]t^{\mu} \int\limits_0^1 \frac{d\tau}{\tau^{\mu}(\tau - t)} + [\varphi(t) - \varphi(t+h)]h \int\limits_0^{t+\frac{h}{2}} \frac{t^{\mu}}{\tau^{\mu}(\tau - t)(\tau - t - h)}\, d\tau$$

$$+\,[(t+h)^\mu-t^\mu]\int\limits_0^1\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t+h)}{\tau^\mu(\tau-t-h)}\,d\tau+t^\mu h\int\limits_0^{t+\frac{h}{2}}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau^\mu(\tau-t)(\tau-t-h)}\,d\tau$$

$$+\,t^\mu h\int\limits_{t+\frac{h}{2}}^1\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t+h)}{\tau^\mu(\tau-t)(\tau-t-h)}\,d\tau=[\varphi(t)-\varphi(t+h)]\left[t^\mu\int\limits_0^1\frac{d\tau}{\tau^\mu(\tau-t)}\right.$$

$$\left.+\,h\int\limits_0^{t+\frac{h}{2}}\frac{t^\mu-\tau^\mu}{\tau^\mu(\tau-t)(\tau-t-h)}\,d\tau+h\int\limits_0^{t+\frac{h}{2}}\frac{d\tau}{(\tau-t)(\tau-t-h)}\right]$$

$$+\,[(t+h)^\mu-t^\mu]\int\limits_0^1\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t+h)}{\tau^\mu(\tau-t-h)}\,d\tau+t^\mu h\int\limits_0^{t+\frac{h}{2}}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau^\mu(\tau-t)(\tau-t-h)}\,d\tau$$

$$+\,t^\mu h\int\limits_{t+\frac{h}{2}}^1\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t+h)}{\tau^\mu(\tau-t)(\tau-t-h)}\,d\tau=[\varphi(t)-\varphi(t+h)][I_1+I_2+I_3]+J_1+J_2+J_3.$$

Так как $|\varphi(t)-\varphi(t+h)|\le Ch^\lambda$, в полученном равенстве в первых трех слагаемых достаточно доказать ограниченность интегралов I_1, I_2, I_3. Ограниченность I_1 очевидна, так как

$$I_1=t^\mu\int\limits_0^1\frac{d\tau}{\tau^\mu(\tau-t)}=\pi\,\mathrm{ctg}[(1-\mu)\pi]+\frac{t^\mu}{\mu}F(\mu,1,1+\mu;t).$$

Рассмотрим интегралы I_2, I_3. Имеем

$$|I_2|=h\left|\int\limits_0^{t+\frac{h}{2}}\frac{t^\mu-\tau^\mu}{\tau^\mu(\tau-t)(\tau-t-h)}\,d\tau\right|\le C_3h\int\limits_0^{t+\frac{h}{2}}\frac{|\tau-t|^{\mu-1}}{\tau^\mu|\tau-t-h|}\,d\tau.$$

Подставляя $\sigma=\frac{\tau-t}{h}$, получим

$$|I_2|\le C_2h\int\limits_{-\frac{t}{h}}^{\frac12}\frac{h^{\mu-1}|\sigma|^{\mu-1}h\,d\sigma}{(t+h\sigma)^\mu|h\sigma-h|}=C_2h^\mu\int\limits_{-\frac{t}{h}}^{0}\frac{(-\sigma)^{\mu-1}}{(t+h\sigma)^\mu(1-\sigma)}\,d\sigma$$

$$+\,C_2h^\mu\int\limits_0^{\frac12}\frac{\sigma^{\mu-1}}{(t+h\sigma)^\mu(1-\sigma)}\,d\sigma=C_2h^\mu\int\limits_0^{\frac{t}{h}}\frac{\sigma^{\mu-1}}{(t-h\sigma)^\mu(1+\sigma)}\,d\sigma$$

$$+\,C_2h^\mu\int\limits_0^{\frac12}\frac{\sigma^{\mu-1}}{(t+h\sigma)^\mu(1-\sigma)}\,d\sigma\le C_2h^\mu\int\limits_0^{\frac{t}{h}}\frac{\sigma^{\mu-1}}{(t-h\sigma)^\mu}\,d\sigma+2C_2h^\mu\int\limits_0^{\frac12}\frac{\sigma^{\mu-1}}{(t+h\sigma)^\mu}\,d\sigma$$

$$=C_2\int\limits_0^1\frac{\tau^{\mu-1}}{(1-\tau)^\mu}\,d\tau+2\,C_2\left(\frac{h}{t}\right)^\mu\int\limits_0^{\frac12}\sigma^{\mu-1}\,d\sigma\le C_3.$$

Рассмотрим интеграл I_3. Произведя подстановку $\sigma = -\frac{\tau - t}{h}$, получим

$$I_3 = h \int\limits_0^{t+\frac{h}{2}} \frac{d\tau}{(\tau - t)(\tau - t - h)} = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{t}{h}} \frac{d\sigma}{\sigma(1+\sigma)} = \ln \frac{t}{h+t} \le C_3,$$

где последний интеграл существует в смысле главного значения по Коши при $h \le t$.

Остается исследовать три последних интеграла J_1, J_2 и J_3. В интеграле J_1 сделаем подстановку $\tau = (t+h)\sigma$:

$$|J_1| \le |(t+h)^\mu - t^\mu| \int\limits_0^1 \frac{|\varphi(\tau) - \varphi(t+h)|}{\tau^\mu |\tau - t - h|}\, d\tau \le C_4 h^\mu \int\limits_0^1 \frac{|\tau - t - h|^{\lambda - 1}}{\tau^\mu}\, d\tau$$

$$= C_4 h^\mu \int\limits_0^{\frac{1}{t+h}} \frac{(t+h)^{\lambda-1} |\sigma - 1|^{\lambda - 1}}{(t+h)^\mu \sigma^\mu} (t+h)\, d\sigma$$

$$\le C_5 h^\mu (t+h)^{\lambda - \mu} \int\limits_0^{+\infty} \sigma^{-\mu} |\sigma - 1|^{\lambda - 1}\, d\sigma \le C_6 h^\lambda,$$

так как $\frac{h^{\mu-\lambda}}{(t+h)^{\mu-\lambda}} < 1$ при $t \ge h$ и $\mu > \lambda$.

Рассмотрим интеграл J_2. Имеем

$$|J_2| \le t^\mu h \int\limits_0^{t+\frac{h}{2}} \frac{|\varphi(\tau) - \varphi(t)|}{\tau^\mu |\tau - t||\tau - t - h|}\, d\tau \le C_7 t^\mu h \int\limits_0^{t+\frac{h}{2}} \frac{|\tau - t|^{\lambda-1}}{\tau^\mu |\tau - t - h|}\, d\tau.$$

Применяя подстановку $\sigma = \frac{\tau - t}{h}$, получим

$$|J_2| \le C_7 t^\mu h \int\limits_{-\frac{t}{h}}^{\frac{1}{2}} \frac{h^{\lambda-1} |\sigma|^{\lambda-1} h\, d\sigma}{(t+h\sigma)^\mu |h\sigma - h|}$$

$$= C_7 t^\mu h^\lambda \left[\int\limits_{-\frac{t}{h}}^{0} \frac{(-\sigma)^{\lambda-1}\, d\sigma}{(t+h\sigma)^\mu (1-\sigma)} + \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sigma^{\lambda-1}\, d\sigma}{(t+h\sigma)^\mu (1-\sigma)} \right]$$

$$= C_7 h^\lambda \left[\int\limits_0^{\frac{t}{h}} \frac{\sigma^{\lambda-1}\, d\sigma}{(1 - \frac{h}{t}\sigma)^\mu (1+\sigma)} + \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sigma^{\lambda-1}\, d\sigma}{(1 + \frac{h}{t}\sigma)^\mu (1-\sigma)} \right]$$

$$\le C_7 h^\lambda \left[2^\mu \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sigma^{\lambda-1}\, d\sigma}{1+\sigma} + \int\limits_{\frac{t}{2h}}^{\frac{t}{2}} \frac{\sigma^{\lambda-1}\, d\sigma}{(1 - \frac{h}{t}\sigma)^\mu (1+\sigma)} + 2 \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \sigma^{\lambda-1}\, d\sigma \right],$$

откуда, во втором интеграле применяя подстановку $\sigma = \frac{t}{h}\tau$, получим

$$|J_2| \le C_7 h^\lambda \left[C_0 + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(\frac{t}{h})^\lambda \tau^{\lambda-1}\, d\tau}{(1-\tau)^\mu (1 + \frac{t}{h}\tau)} \right] \le C_7 h^\lambda \left[C_0 + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\tau^{\lambda-2}\, d\tau}{(1-\tau)^\mu} \right] \le C_8\, h^\lambda,$$

где

$$\frac{(\frac{t}{h})^\lambda}{1+\frac{t}{h}\tau} = \frac{(\frac{h}{t})^{1-\lambda}}{\frac{h}{t}+\tau} \le \frac{1}{\frac{h}{t}+\tau} \le \frac{1}{\tau}.$$

Рассмотрим интеграл J_3. Имеем

$$|J_3| \le t^\mu h \int\limits_{t+\frac{h}{2}}^{1} \frac{|\varphi(\tau)-\varphi(t+h)|}{\tau^\mu|\tau-t||\tau-t-h|}\,d\tau \le C_9 t^\mu h \int\limits_{t+\frac{h}{2}}^{1} \frac{|\tau-t-h|^{\lambda-1}}{\tau^\mu|\tau-t|}\,d\tau,$$

откуда, применяя подстановку $\sigma=\frac{\tau-t}{h}$, получим

$$|J_3| \le C_9 t^\mu h^\lambda \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{1-t}{h}} \frac{|\sigma-1|^{\lambda-1}}{(h\sigma+t)^\mu\sigma}\,d\sigma = C_9\,h^\lambda \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{1-t}{h}} \frac{|\sigma-1|^{\lambda-1}}{(1+\frac{h\sigma}{t})^\mu\sigma}\,d\sigma$$

$$\le C_{10}h^\lambda \int\limits_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{|\sigma-1|^{\lambda-1}}{\sigma}\,d\sigma \le C_{11}h^\lambda.$$

Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Если $\mu=\lambda+\frac{1}{2}$, $0<\lambda<\frac{1}{2}$ и $\varphi(t)=O((t-c)^\lambda)$ для t, близких к c, то $\Psi(t)=O((t-c)^{\lambda+\frac{1}{2}})$ для t, близких к c, при этом $\Psi(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера вблизи c с показателем $\lambda+\frac{1}{2}$.

3. Параболические уравнения с меняющимся направлением времени

В области $Q=\Omega\times(0,T)$, $\Omega\equiv\mathbb{R}$, рассматривается параболическое уравнение $2n$-го порядка с меняющимся направлением времени

$$\operatorname{sgn} x\, u_t = (-1)^{n+1}\frac{\partial^{2n}u}{\partial x^{2n}}. \tag{9}$$

Решение уравнения ищется из пространства Гёльдера $H_{x\ t}^{p,p/2n}(Q^\pm)$, $p=2nl+\gamma$, $0<\gamma<1$, $l\ge 1$ — целое число. Пусть оно удовлетворяет следующим начальным условиям

$$u(x,0)=\varphi_1(x),\ x>0,\quad u(x,T)=\varphi_2(x),\ x<0, \tag{10}$$

и условиям склеивания

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^k}(-0,t)=\frac{\partial^k u}{\partial x^k}(+0,t),\quad 0<t<T,\ k=0,\dots,2n-1. \tag{11}$$

Теорема 2 [7, 8]. *Пусть $\varphi_1,\varphi_2\in H^p$ $(p=2nl+\gamma)$. Тогда при выполнении $2[p](1-1/2n)+2$ условий*

$$L_s(\varphi_1,\varphi_2)=0,\quad s=1,\dots,2[p](1-1/2n)+2, \tag{12}$$

существует единственное решение уравнения (9), *удовлетворяющее условиям* (10), (11), *из пространства* $H_{x\ t}^{p,p/2n}(Q^{\pm})$.

Методом параболических потенциалов простого слоя, построенных при помощи фундаментального решения, и элементарных решений Каттабрига [13, 14] краевая задача (9)—(11) при непрерывных условиях склеивания (11) приводится к решению системы сингулярных интегральных уравнений нормального типа

$$A\vec{\beta}(t) - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^T \frac{B(t,\tau)\vec{\beta}(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = \vec{Q}(t). \tag{13}$$

В классе функций, ограниченных на концах отрезка $(0, T)$, каноническая функция соответствующей краевой задачи Римана имеет вид

$$\chi(z) = z^{\frac{1}{4}}(z-1)^{\frac{3}{4}}, \quad \text{если } n \text{ нечетно},$$

$$\chi(z) = z^{\frac{3}{4}}(z-1)^{\frac{1}{4}}, \quad \text{если } n \text{ четно},$$

индекс задачи $\varkappa = -1$. Имеем $\min\left\{\frac{1}{4}, \frac{1+\gamma}{2n}\right\} = \frac{1+\gamma}{2n}$ при $n \geq 4$. С учетом этого и теоремы 1 количество условий разрешимости можно уменьшить до необходимых и достаточных $2nl$ условий. В случае $n = 2$ или $n = 3$ справедливы $4l$, $6l$ условий разрешимости при выполнении общих весовых условий склеивания

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^k}(-0, t) = \sigma_k \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(+0, t), \quad 0 < t < T,\ k = 0, \ldots, 2n-1, \tag{14}$$

где σ_k — действительные постоянные.

При $n = 2$ справедлива

Теорема 3 [9]. *Пусть* $\varphi_1, \varphi_2 \in H^p$ $(p = 4l + \gamma)$. *Тогда при выполнении* $4l$ *условий*

$$L_s(\varphi_1, \varphi_2) = 0, \quad s = 1, \ldots, 4l, \tag{15}$$

существует единственное решение уравнения (9), *удовлетворяющее условиям* (10), (11), *из пространства*

1) $H_{x\ t}^{p,p/4}$, *если* $0 < \gamma < 1 - 4\theta$;

2) $H_{x\ t}^{q,q/4}$, $q = 4l + 1 - 4\theta$, *если* $1 - 4\theta < \gamma < 1$;

3) $H_{x\ \ t}^{q-\varepsilon,(q-\varepsilon)/4}$, *если* $\gamma = 1 - 4\theta$, *где* ε — *сколь угодно малая положительная постоянная.*

Здесь

$$\theta = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left|\frac{a}{b}\right| < \frac{1}{4}, \quad a = \sigma_0\sigma_1 + \sigma_0\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2 + 2\sqrt{2}\sigma_0\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3,$$

$$b = \sigma_0\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2 + 2\sqrt{2}\sigma_1\sigma_2 - \sigma_0\sigma_1.$$

Замечание 2. Если выполнены условия теоремы при $\theta \geq \frac{1}{4}$, то из теоремы 3 следует существование единственного решения задачи (9)–(11) из пространства $H_{x\ t}^{p,p/4}$ при выполнении $6l + 2$ условий вида (15).

Примеры. Для уравнения (9) с начальными условиями (10) рассмотрим условия склеивания (11) при $\sigma_0 = 1$, $\sigma_1 = -1$, $\sigma_2 = 1$, $\sigma_3 = 1$. В этом случае единственное решение исходной задачи существует при выполнении $6l + 2$ условий вида (15), если же рассмотрим условия склеивания (11) при $\sigma_0 = \frac{1}{2}$, $\sigma_1 = -2$, $\sigma_2 = \frac{1}{2}$, $\sigma_3 = -2$, то

$$\theta = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}+4}{16\sqrt{2}+4} \approx 0,064 < 0,25,$$

тем самым находимся в условиях теоремы 3 и единственное решение исходной задачи существует при выполнении $4l$ условий (15).

Рассмотрим случай $n = 3$:

$$\operatorname{sgn} x \, u_t - \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} = 0. \tag{16}$$

Отметим, что в силу замечания 1 к теореме 1

$$\frac{3}{4} - \frac{1+\gamma}{2n} = \frac{1}{2} \Longrightarrow 2 < n < 4 \Longrightarrow n = 3 \quad \text{при } \gamma = \frac{1}{2}.$$

Теорема 4. *Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in H^p$ $(p = 6l + \gamma)$. Тогда при выполнении $10l + 2$ условий (12) существует единственное решение уравнения (16), удовлетворяющее условиям (10), (11) из пространства $H_{x\ t}^{p,p/6}(Q^\pm)$. При $\gamma = \frac{1}{2}$ вблизи $t = 0, T$ решение принадлежит пространству $H_{x\ t}^{q,q/6}(Q^\pm)$, $q = 6l + \frac{1}{2} + \varepsilon$, где ε — сколь угодно малая положительная постоянная.*

Доказательство. Для удобства вместо уравнения (16) будем рассматривать систему уравнений

$$u_t^1 = Lu^1, \quad -u_t^2 = Lu^2, \quad L \equiv \frac{\partial^6}{\partial x^6}, \tag{17}$$

в области Q^+. При этом начальные условия и условия склеивания будут иметь вид

$$u^1(x,0) = \varphi_1(x), \quad u^2(x,T) = \varphi_2(x), \quad x > 0, \tag{18}$$

$$\frac{\partial^k u^1}{\partial x^k}(0,t) = (-1)^k \frac{\partial^k u^2}{\partial x^k}(0,t), \quad k = 0,\dots,5. \tag{19}$$

Будем предполагать, что $\varphi_i(x) \in H^p(\mathbb{R})$, $i = 1,2$. Тогда функции

$$\omega_1(x,t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} U(x,t;\xi,0)\varphi_1(\xi)\, d\xi, \quad \omega_2(x,t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} U(\xi,T;x,t)\varphi_2(\xi)\, d\xi$$

являются решениями уравнений (17), удовлетворяющими условиям (18) в $\mathbb{R}$.

Будем пользоваться интегральным представлением решения для системы уравнений (17):

$$\begin{aligned} u^1(x,t) &= \int\limits_0^t U(x,t;0,\tau)\alpha_0(\tau)\, d\tau + \sum_{p=1}^{2} \int\limits_0^t V_p(x,t;0,\tau)\alpha_p(\tau)\, d\tau + \omega_1(x,t), \\ u^2(x,t) &= \int\limits_t^T U(0,\tau;x,t)\beta_0(\tau)\, d\tau + \sum_{p=1}^{2} \int\limits_t^T W_p(0,\tau;x,t)\beta_p(\tau)\, d\tau + \omega_2(x,t), \end{aligned} \tag{20}$$

где U — фундаментальное решение, V_p, W_p — элементарные решения Каттабрига [13, 14].

В силу общих результатов [15, 16] плотности α_k, β_k, $k = 0, 1, 2$, должны принадлежать пространству $H^q(0, T)$, $q = \frac{p-5}{6}$, причем

$$\alpha_k^{(s)}(0) = \beta_k^{(s)}(T) = 0, \quad s = 0, \dots, l-1. \tag{21}$$

Из условий склеивания (19) получим систему интегральных уравнений с операторами Абеля относительно α_k, β_k

$$\begin{gathered}
f^{(j)}(0) \int\limits_0^t \frac{\alpha_0(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1+j}{6}}}\, d\tau + \sum_{p=1}^{2} g_p^{(j)}(0) \int\limits_0^t \frac{\alpha_p(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1+j}{6}}}\, d\tau + \frac{\partial^j \omega_1}{\partial x^j}(0,t) \\
= \sigma_j \left[f^{(j)}(0) \int\limits_t^T \frac{\beta_0(\tau)}{(\tau-t)^{\frac{1+j}{6}}}\, d\tau + \sum_{p=1}^{2} h_p^{(j)}(0) \int\limits_t^T \frac{\beta_p(\tau)}{(\tau-t)^{\frac{1+j}{6}}}\, d\tau \right. \\
\left. + \frac{\partial^j \omega_2}{\partial x^j}(0,t) \right], \quad j = 0, \dots, 4, \\
\alpha_0(t) \int\limits_0^\infty f(\eta)\, d\eta + \sum_{p=1}^{2} \alpha_p(t) \int\limits_0^\infty g_p(\eta)\, d\eta - \frac{\partial^{2n-1} \omega_2}{\partial x^{2n-1}}(0,t) \\
+ \sigma_5 \left[\beta_0(t) \int\limits_{-\infty}^0 f(\eta)\, d\eta + \sum_{p=1}^{2} \beta_p(t) \int\limits_{-\infty}^0 h_p(\eta)\, d\eta \right. \\
\left. - \frac{\partial^{2n-1} \omega_1}{\partial x^{2n-1}}(0,t) \right] = 0.
\end{gathered} \tag{22}$$

Для удобства записи будем считать $T = 1$. Из системы (22) при помощи формул обращения оператора Абеля [1, 3] получим эквивалентные системы сингулярных интегральных уравнений шестого порядка:

$$\begin{gathered}
\frac{1}{\sin \frac{\pi(1+j)}{6}}\, A_j(t) + (-1)^j \operatorname{ctg} \frac{\pi(1+j)}{6}\, B_j(t) - \frac{(-1)^j}{\pi} \int\limits_0^1 \left(\frac{\tau}{t}\right)^{1-\frac{1+j}{6}} \frac{B_j(\tau)}{\tau - t}\, d\tau \\
= \frac{d}{dt} \int\limits_0^t \frac{\Phi_j(\tau)}{(t-\tau)^{1-\frac{1+j}{6}}}\, d\tau, \quad j = 0, \dots, 4, \\
3(\alpha_0(t) + \beta_0(t)) + (\alpha_1(t) + \beta_1(t)) = -\Phi_5(t),
\end{gathered} \tag{23}$$

$$\begin{gathered}
\frac{1}{\sin \frac{\pi(1+j)}{6}}\, B_j(t) + (-1)^j \operatorname{ctg} \frac{\pi(1+j)}{6}\, A_j(t) + \frac{(-1)^j}{\pi} \int\limits_0^1 \left(\frac{1-\tau}{1-t}\right)^{1-\frac{1+j}{6}} \frac{A_j(\tau)}{\tau - t}\, d\tau \\
= (-1)^j \frac{d}{dt} \int\limits_t^1 \frac{\Phi_j(\tau)}{(\tau-t)^{1-\frac{1+j}{6}}}\, d\tau, \quad j = 0, \dots, 4, \\
3(\alpha_0(t) + \beta_0(t)) + (\alpha_1(t) + \beta_1(t)) = -\Phi_5(t),
\end{gathered} \tag{24}$$

где

$$\Phi_j(t)=\frac{6}{\pi\Gamma(\frac{1+j}{6})}\Big[(-1)^j\frac{\partial^j\omega_2}{\partial x^j}(0,t)-\frac{\partial^j\omega_1}{\partial x^j}(0,t)\Big],\quad j=0,\dots,5,$$

$$A_j(t)=\bar f^{(j)}(0)\alpha_0(t)+\sum_{p=1}^{2}\bar g_p^{(j)}(0)\alpha_p(t),\quad B_j(t)=\bar f^{(j)}(0)\beta_0(t)+\sum_{p=1}^{2}\bar h_p^{(j)}(0)\beta_p(t).$$

Введем обозначения:

$$F_0^i(t)=\int\limits_0^t\frac{\Phi_0^{(i+1)}(\tau)-\Phi_0^{(i+1)}(0)}{(t-\tau)^{\frac56}}\,d\tau,\quad F_j^i(t)=\frac{d}{dt}\int\limits_0^t\frac{\Phi_j^{(i)}(\tau)-\Phi_j^{(i)}(0)}{(t-\tau)^{1-\frac{1+j}{6}}}\,d\tau,$$

$$F_5^i(t)=\Phi_5^{(i)}(t)-\Phi_5^{(i)}(0),$$

$$G_j^i(t)=(-1)^{1+j}\frac{d}{dt}\int\limits_t^1\frac{\Phi_j^{(i)}(1)-\Phi_j^{(i)}(\tau)}{(\tau-t)^{1-\frac{1+j}{6}}}\,d\tau,\quad i=0,\dots,l-1,\ j=1,\dots,4.$$

Так как [16] $\Phi_k^{l-1}\in H^{q_k}$, $q_k=1+\frac{\gamma-k}{6}$, функции $F_k^{l-1}(t)$, $G_k^{l-1}(t)$, $k=0,\dots,5$, принадлежат пространству $H^{(1+\gamma)/6}(0,1)$, причем $F_k^{l-1}(t)=O(t^{(1+\gamma)/6})$, $G_k^{l-1}(t)=O((1-t)^{(1+\gamma)/6})$ для малых t и $1-t$ соответственно.

Легко непосредственно проверить на основании формулы Лиувилля и того, что определитель Вронского от решений $f(\eta)$, $g_p(\eta)$, $h_p(\eta)$, $p=1,2$, однородного линейного уравнения $z^{(5)}(\xi)+\frac16\xi z(\xi)=0$ отличен от нуля, что определители матриц

$$\begin{pmatrix} f & g_1 & g_2\\ f'' & g_1'' & g_2''\\ f^{IV} & g_1^{IV} & g_2^{IV}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} g_1' & g_2'\\ g_1''' & g_2'''\end{pmatrix}$$

в нуле также отличны от нуля.

Проведя рассуждения, аналогичные [7, 8], приходим к следующему выводу. При выполнении $12l+2$ условий

$$\left\{\begin{aligned}
&\int\limits_0^1\frac{\sum\limits_{p=1}^{2}\bar h_p^{(j)}\beta_p(\tau)}{\tau^{\frac{1+j}{6}}}\,d\tau=\pi\Phi_j(0), && j=1,3;\\
&\int\limits_0^1\frac{B_j(\tau)}{\tau^{\frac{1+j}{6}}}\,d\tau=-\pi\Phi_j(0), && j=0,2,4;\\
&\frac{1+j}{6}\int\limits_0^1\frac{\sum\limits_{p=1}^{2}\bar h_p^{(j)}(0)(\beta_p^{(s)}(\tau)-\beta_p^{(s)}(0))}{\tau^{1+\frac{1+j}{6}}}\,d\tau=\sum_{p=1}^{2}\bar h_p^{(j)}(0)\beta_p^{(s)}(0)+\pi\Phi_j^{(s+1)}(0),\\
& && j=1,3,\ s=0,\dots,l-2;\\
&3\beta_0^{(s)}(0)+\beta_1^{(s)}(0)=-\Phi_5^{(s)}(0), && s=0,\dots,l-1;\\
&\frac{1+j}{6}\int\limits_0^1\Big\{\frac{\bar f^{(j)}(0)[\beta_0^{(s)}(\tau)-\beta_0^{(s)}(0)(1-\tau)]}{\tau^{1+\frac{1+j}{6}}}+\frac{\sum\limits_{p=1}^{2}\bar h_p^{(j)}(0)[\beta_p^{(s)}(\tau)-\beta_p^{(s)}(0)(1-\tau)]}{\tau^{1+\frac{1+j}{6}}}\Big\}\,d\tau\\
&\qquad=\frac{6}{5-j}B_j^{(s)}(0)-\pi\Phi_j^{(s+1)}(0),\\
& && j=0,2,4,\ s=0,\dots,l-2,\ \text{и } j=0,\ s=l-1,
\end{aligned}\right.\tag{25}$$

$$\begin{cases} \int\limits_0^1 \frac{\sum\limits_{p=1}^{2} \bar g_p^{(j)}\alpha_p(\tau)}{(1-\tau)^{\frac{1+j}{6}}}\,d\tau = \pi\Phi_j(1), & j=1,3;\\ \int\limits_0^1 \frac{A_j(\tau)}{(1-\tau)^{\frac{1+j}{6}}}\,d\tau = \pi\Phi_j(1), & j=0,2,4;\\ \frac{1+j}{6}\int\limits_0^1 \frac{\sum\limits_{p=1}^{2} \bar g_p^{(j)}(0)(\alpha_p^{(s)}(\tau)-\alpha_p^{(s)}(1))}{(1-\tau)^{1+\frac{1+j}{6}}}\,d\tau = \sum\limits_{p=1}^{2} \bar g_p^{(j)}(0)\alpha_p^{(s)}(1) - \pi\Phi_j^{(s+1)}(1), & \\ & j=1,3,\ s=0,\dots,l-2;\\ 3\alpha_0^{(s)}(1)+\alpha_1^{(s)}(1) = -\Phi_5^{(s)}(1), & s=0,\dots,l-1;\\ \frac{1+j}{6}\int\limits_0^1 \Big\{\frac{\bar f^{(j)}(0)[\alpha_0^{(s)}(\tau)-\alpha_0^{(s)}(1)\tau]}{(1-\tau)^{1+\frac{1+j}{6}}} + \frac{\sum\limits_{p=1}^{2} \bar g_p^{(j)}(0)[\alpha_p^{(s)}(\tau)-\alpha_p^{(s)}(1)\tau]}{(1-\tau)^{1+\frac{1+j}{6}}}\Big\}\,d\tau & \\ \qquad = \frac{5}{5-j}A_j^{(s)}(1) + \pi\Phi_j^{(s+1)}(1), & \\ & j=0,2,4,\ s=0,\dots,l-2 \text{ и } j=0,\ s=l-1, \end{cases} \tag{26}$$

системы (23), (24) в матричной записи можно представить в виде

$$\begin{aligned} &A_1\alpha^{(l-1)}(t) + D_{11}A_1\tilde\beta^{(l-1)}(t) - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{D_{12}(\frac{t}{\tau})A_1\tilde\beta^{(l-1)}(\tau)}{\tau-t}\,d\tau = \mathscr{F}_1(t),\\ &A_2\alpha^{(l-1)}(t) + D_{21}A_2\tilde\beta^{(l-1)}(t) - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{D_{22}(\frac{t}{\tau})A_2\tilde\beta^{(l-1)}(\tau)}{\tau-t}\,d\tau = \mathscr{F}_2(t), \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} &A_1\beta^{(l-1)}(t) + D_{11}A_1\tilde\alpha^{(l-1)}(t) + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{D_{12}(\frac{1-t}{1-\tau})A_1\tilde\alpha^{(l-1)}(\tau)}{\tau-t}\,d\tau = \mathscr{G}_1(t),\\ &A_2\beta^{(l-1)}(t) + D_{21}A_2\tilde\alpha^{(l-1)}(t) + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{D_{22}(\frac{1-t}{1-\tau})A_2\tilde\alpha^{(l-1)}(\tau)}{\tau-t}\,d\tau = \mathscr{G}_2(t), \end{aligned} \tag{28}$$

где $\alpha^{(l-1)}(t)$, $\beta^{(l-1)}(t)$ — векторы с компонентами $\alpha_j^{(l-1)}(t)$, $\beta_j^{(l-1)}(t)$, $j=0,1,2$, соответственно;

$$\tilde\beta^{(l-1)}(t) = \beta^{(l-1)}(t) - \beta^{(l-1)}(0)(1-t),$$

$$\tilde\alpha^{(l-1)}(t) = \alpha^{(l-1)}(t) - \alpha^{(l-1)}(1)t;$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} \bar f(0) & \bar g_1(0) & \bar g_2(0)\\ \bar f^{(2)}(0) & \bar g_1^{(2)}(0) & \bar g_2^{(2)}(0)\\ \bar f^{(4)}(0) & \bar g_1^{(4)}(0) & \bar g_2^{(4)}(0) \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \bar g_1'(0) & \bar g_2'(0)\\ 0 & \bar g_1^{(3)}(0) & \bar g_2^{(3)}(0)\\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

D_{ij}, $i,j=1,2,$ — диагональные матрицы:

$$D_{11} = \frac{\sqrt3}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D_{12}\Big(\frac{t}{\tau}\Big) = \frac12\Big(\frac{t}{\tau}\Big)^{\frac16}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 2\big(\frac{t}{\tau}\big)^{\frac13} & 0\\ 0 & 0 & \big(\frac{t}{\tau}\big)^{\frac23} \end{pmatrix},$$

$$D_{21}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix},\quad D_{22}\Big(\frac{t}{\tau}\Big)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Big(\frac{t}{\tau}\Big)^{\frac{1}{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&(\frac{t}{\tau})^{\frac{1}{3}}&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$\mathscr{F}_1(t)$ и $\mathscr{G}_1(t)$ — векторы с компонентами $\sin\frac{\pi(1+j)}{6}\overline{F}_j^{l-1}(t)$ и $\sin\frac{\pi(1+j)}{6}\overline{G}_j^{l-1}(t)$, $j=0,2,4$; $\mathscr{F}_2(t)$ и $\mathscr{G}_2(t)$ — векторы с компонентами $\sin\frac{\pi(1+j)}{6}\overline{F}_j^{l-1}(t), \overline{F}_5^{l-1}(t)$ и $-\sin\frac{\pi(1+j)}{6}\overline{G}_j^{l-1}(t)$, $\overline{G}_5^{l-1}(t)$, $j=1,3$.

Отметим, что функции

$$\overline{F}_0^{l-1}(t)=F_0^{l-1}(t)-\frac{36}{5}B_0^{(l-1)}(0)\Big[F\Big(-\frac{5}{6},1,\frac{7}{6};t\Big)-1\Big]t^{1/6},$$

$$\overline{F}_j^{l-1}(t)=F_j^{l-1}(t)-\frac{(-1)^j36}{(5-j)(1+j)}B_j^{(l-1)}(0)F\Big(\frac{-5+j}{6},1,\frac{7+j}{6};t\Big)t^{(1+j)/6},$$

$$\overline{F}_5^{l-1}(t)=-F_5^{l-1}(t)+3\beta_0^{(l-1)}(0)+\beta_1^{(l-1)}(0),$$

$$\overline{G}_0^{l-1}(t)=G_0^{l-1}(t)-\frac{36}{5}A_0^{(l-1)}(1)\Big[F\Big(-\frac{5}{6},1,\frac{7}{6};1-t\Big)-1\Big](1-t)^{1/6},$$

$$\overline{G}_j^{l-1}(t)=G_j^{l-1}(t)-\frac{(-1)^j36}{(5-j)(1+j)}A_j^{(l-1)}(1)F\Big(\frac{-5+j}{6},1,\frac{7+j}{6};1-t\Big)(1-t)^{(1+j)/6},$$

$$\overline{G}_5^{l-1}(t)=-G_5^{l-1}(t)+3\alpha_0^{(l-1)}(1)+\alpha_2^{(l-1)}(1),\quad j=1,\dots,4,$$

принадлежат пространству $H^{\frac{1+\gamma}{6}}$, причем $\overline{F}_j^{l-1}(t)=O(t^{\frac{1+\gamma}{6}})$, $\overline{G}_j^{l-1}(t)=O((1-t)^{\frac{1+\gamma}{6}})$, $j=0,\dots,5$, для малых t и $1-t$ соответственно.

Легко видеть на основании сказанного выше замечания, что определители матриц A_1 и A_2 не равны тождественно нулю.

Значения $\beta_i^{(s)}(0)$, $\alpha_i^{(s)}(1)$, $i=0,1,2$, $s=0,\dots,l-1$, однозначно определяются из уравнений

$$A_2\beta^{(s)}(0)=\mathscr{F}_3^s,\quad A_2\alpha^{(s)}(1)=\mathscr{G}_3^s,\quad s=0,\dots,l-1,$$

где $\mathscr{F}_3^s$, $\mathscr{G}_3^s$ — векторы с компонентами

$$\frac{1}{\pi}\sin^2\frac{\pi(1+j)}{6}\Bigg(\int\limits_0^1\frac{F_j^s(\tau)}{(1-\tau)^{\frac{1+j}{6}}\tau}\,d\tau+G_j^s(0)\Bigg),\ (-1)^n\Phi_5^{(s)}(0),$$

$$\frac{1}{\pi}\sin^2\frac{\pi(1+j)}{6}\Bigg(\int\limits_0^1\frac{G_j^s(\tau)}{\tau^{\frac{1+j}{6}}(1-\tau)}\,d\tau+F_j^s(1)\Bigg),\ -\Phi_5^{(s)}(1),\quad j=1,3.$$

Исключим $\alpha^{(l-1)}(t)$ из системы (27), а $\beta^{(l-1)}(t)$ — из системы (28). Имеем

$$K_1\vec{\beta}\equiv A\vec{\beta}(t)-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\frac{B(t,\tau)\vec{\beta}(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=\vec{Q}_1(t), \tag{29}$$

$$K_2\vec{\alpha} \equiv A\vec{\alpha}(t) + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{B(1-t,1-\tau)\vec{\alpha}(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = \vec{Q}_2(t), \tag{30}$$

где

$$\tilde{\beta}^{(l-1)}(t) \equiv \vec{\beta}(t), \quad \tilde{\alpha}^{(l-1)}(t) \equiv \vec{\alpha}(t),$$

$$A = A_1^{-1}D_{11}A_1 - A_2^{-1}D_{21}A_2, \quad B(t,\tau) = A_1^{-1}D_{12}\left(\frac{t}{\tau}\right)A_1 - A_2^{-1}D_{22}\left(\frac{t}{\tau}\right)A_2,$$

$$\vec{Q}_1(t) = A_1^{-1}\mathscr{F}_1(t) - A_2^{-1}\mathscr{F}_2(t), \quad \vec{Q}_2(t) = A_1^{-1}\mathscr{G}_1(t) - A_2^{-1}\mathscr{G}_2(t),$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t,t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Характеристическая часть операторов K_i определяется формулами

$$K_1^0\vec{\beta} \equiv \vec{\beta}(t) + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{\vec{\beta}(\tau)}{\tau - t}\,d\tau, \quad K_2^0\vec{\alpha} \equiv \vec{\alpha}(t) - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{\vec{\alpha}(\tau)}{\tau - t}\,d\tau. \tag{31}$$

Полученные системы сингулярных уравнений будем решать в классе функций, ограниченных на концах отрезка $(0,1)$:

$$K_1^0\vec{\beta} = \vec{G}_1, \quad K_2^0\vec{\alpha} = \vec{G}_2, \tag{32}$$

где

$$\vec{G}_1 = -B^{-1}(\vec{Q}_1 - k_1\vec{\beta}), \quad \vec{G}_2 = -B^{-1}(\vec{Q}_2 - k_2\vec{\alpha}),$$

$$k_1\vec{\beta} = (A+B)\vec{\beta}(t) + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{B - B(t,\tau)}{\tau - t}\vec{\beta}(\tau)\,d\tau,$$

$$k_2\vec{\alpha} = (A+B)\vec{\alpha}(t) + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{B(t,\tau) - B}{\tau - t}\vec{\alpha}(\tau)\,d\tau.$$

Для этого введем кусочно голоморфные функции

$$\vec{\Psi}_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^1 \frac{\vec{\beta}(\tau)}{\tau - z}\,d\tau, \quad \vec{\Psi}_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^1 \frac{\vec{\alpha}(\tau)}{\tau - z}\,d\tau.$$

Согласно общей теории [1, 2]

$$\begin{aligned} \vec{\beta}(t) &= \vec{\Psi}_1^+(t) - \vec{\Psi}_1^-(t) = \frac{1}{2}\vec{G}_1(t) - \frac{\chi_1(t)}{2\pi}\int\limits_0^1 \frac{\vec{G}_1(\tau)\,d\tau}{\chi_1(\tau)(\tau - t)}, \\ \vec{\alpha}(t) &= \vec{\Psi}_2^+(t) - \vec{\Psi}_2^-(t) = \frac{1}{2}\vec{G}_2(t) + \frac{\chi_2(t)}{2\pi}\int\limits_0^1 \frac{\vec{G}_2(\tau)\,d\tau}{\chi_2(\tau)(\tau - t)}, \end{aligned} \tag{33}$$

где

$$\chi_1(z) = z^{\frac{1}{4}}(z-1)^{\frac{3}{4}}, \quad \chi_2(z) = z^{\frac{3}{4}}(z-1)^{\frac{1}{4}},$$

индекс задачи $\varkappa = -1$.

Подставляя в (33) значения $\vec{G}_k(t)$, приходим к системе уравнений Фредгольма

$$\vec{\beta} + K_1^* k_1 \vec{\beta} = \vec{Q}_1^*, \quad \vec{\alpha} + K_2^* k_1 \vec{\alpha} = \vec{Q}_2^*, \tag{34}$$

где

$$K_1^* k_1 \vec{\beta} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 M(t,\tau) \vec{\beta}(\tau)\, d\tau, \quad K_2^* k_2 \vec{\alpha} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 M(1-t, 1-\tau) \vec{\alpha}(\tau)\, d\tau.$$

Исследуем ядра $M(t,\tau)$, $M(1-t,1-\tau)$ и свободные члены $\vec{Q}_k^*$ уравнений Фредгольма (34), полученных в результате регуляризации исходных сингулярных уравнений (29), (30). Функции $\vec{Q}_k^*$ будут, очевидно, удовлетворять условию Гёльдера во всех точках контура $(0,1)$, отличных от концов. Функции $M(t,\tau)$, $M(1-t,1-\tau)$ имеют интегрируемые особенности при $t=\tau$ во всех точках контура $(0,1)$, отличных от концов.

В силу теоремы 1 Н. И. Мусхелишвили легко вывести, что $M(t,\tau)$, $\vec{Q}_1^*(t)$ на концах 0, 1 будут вести себя как $t^{\frac{1}{6}}(1-t)^{\frac{1+\gamma}{6}}$, а функции $M(1-t,1-\tau)$, $\vec{Q}_2^*(t)$ — как $t^{\frac{1+\gamma}{6}}(1-t)^{\frac{1}{6}}$. Из указанных свойств ядер $M(t,\tau)$, $M(1-t,1-\tau)$ и свободных членов $\vec{Q}_k^*$ следует, что всякие ограниченные и интегрируемые решения систем уравнений Фредгольма (34) на концах 0, 1 ведут себя как $t^{\frac{1}{6}}(1-t)^{\frac{1+\gamma}{6}}$ и $t^{\frac{1+\gamma}{6}}(1-t)^{\frac{1}{6}}$ и [2, § 51] $\vec{\alpha}(t) \in H^{\frac{1+\gamma}{6}}(0,1-\delta)$, $\vec{\beta}(t) \in H^{\frac{1+\gamma}{6}}(\delta,1)$, где δ — фиксированное малое число.

При $\gamma = \frac{1}{2}$ свободные члены $\vec{Q}_1^*(t)$, $\vec{Q}_2^*(t)$ согласно формул (3), (4) на концах 0, 1 ведут себя как $t^{\frac{1}{6}}(1-t)^{\frac{1}{4}+\varepsilon}$, $t^{\frac{1}{4}+\varepsilon}(1-t)^{\frac{1}{6}}$ соответственно.

С другой стороны, из систем уравнений (27), (28) следует, что полученные решения уравнений Фредгольма (34) принадлежат пространству $H^{\frac{1+\gamma}{6}}(0,1)$.

Таким образом, системы уравнений (34) эквивалентны исходной системе уравнений (22) при выполнении условий (25), (26). Разрешимость систем уравнений Фредгольма (34) следует из доказанной единственности решения основной задачи (16), (10), (11) и однозначности представления их через потенциалы. Подставим найденные по формуле Тейлора значения функций

$$\vec{\beta}^{(s)}(t) = \sum_{k=s}^{l-2} \frac{\vec{\beta}^{(k)}(0)}{(k-s)!}\, t^{k-s} + \frac{1}{(l-2-s)!} \int_0^t (t-\tau)^{l-2-s} \vec{\beta}^{(l-1)}(\tau)\, d\tau,$$

$$\vec{\alpha}^{(s)}(t) = \sum_{k=s}^{l-2} (-1)^{k-s} \frac{\vec{\alpha}^{(k)}(1)}{(k-s)!}\, (1-t)^{k-s} + \frac{(-1)^{l-1-s}}{(l-2-s)!} \int_t^1 (\tau-t)^{l-2-s} \vec{\alpha}^{(l-1)}(\tau)\, d\tau,$$

$s = 0, \ldots, l-2$, в условия (25), (26), получим $10l+2$ условий (12), что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.

2. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.

3. *Терсенов С. А.* Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985.

4. *Монахов В. Н.* Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск: Наука, 1977.

5. *Векуа Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1968.

6. *Попов С. В.* О гладкости решений параболических уравнений с меняющимся направлением эволюции // Докл. АН. 2005. Т. 400, № 1. С. 29–31.

7. *Попов С. В.* Разрешимость краевых задач для параболического уравнения с меняющимся направлением времени высокого порядка / Ред. журн. «Сиб. мат. журн.». Новосибирск, 1988. 56 с. Деп. в ВИНИТИ 07.12.88, № 8646–Б88.

8. *Попов С. В., Потапова С. В.* Гёльдеровские классы решений $2n$-параболических уравнений с меняющимся направлением эволюции // Докл. АН. 2009. Т. 424, № 5. С. 594–596.

9. *Попов С. В.* Гёльдеровские классы решений параболических уравнений четвертого порядка с меняющимся направлением времени с переменными условиями склеивания // Мат. заметки СВФУ. 2014. Т. 21, № 2. С. 81–93.

10. *Монахов В.Н., Попов С. В.* Контактные краевые задачи математической физики // Динамика сплошной среды. 2000. № 116. С. 62–72.

11. *Егоров И. Е., Пятков С. Г., Попов С. В.* Неклассические дифференциально-операторные уравнения. Новосибирск: Наука, 2000.

12. *Кислов Н. В., Пулькин И. С.* Краевая задача с обобщенными условиями склейки для уравнения параболического типа // Вестн. МЭИ. 2000. № 6. С. 51–59.

13. *Cattabriga L.* Problemi al contorno per equazioni paraboliche di ordine $2n$ // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. 1958. V. 28, N 2. P. 376–401.

14. *Cattabriga L.* Equazioni paraboliche in due variabili. I, II // Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari. 1961. V. 31, N 1–2. P. 48–79; 1962. V. 32, N 3–4. P. 254–267.

15. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

16. *Солонников В. А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1965. Т. 83. С. 3–163.

Статья поступила 10 марта 2016 г.

Попов Сергей Вячеславович
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
Институт математики и информатики,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
madu@ysu.ru

Математические заметки СВФУ
Апрель—июнь, 2016. Том 23, № 2

UDC 517.946

ON BEHAVIOR OF THE CAUCHY–TYPE INTEGRAL AT THE ENDPOINTS OF THE INTEGRATION CONTOUR AND ITS APPLICATION TO BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR PARABOLIC EQUATIONS WITH CHANGING DIRECTION OF TIME

S. V. Popov

Abstract. We consider N. I. Muskhelishvili's theorem about the behavior of Cauchy-type integrals at the endpoints of the integration contour and the discontinuity points of the density and its application to boundary value problems for $2n$-parabolic equations with changing direction of time. For parabolic equations with changing direction of time, the smoothness of initial and boundary data does not imply in general that the solution belongs to the Hölder spaces. Application of the theory of singular equations makes it possible to specify necessary and sufficient conditions for the solution to belong to the Hölder spaces. Moreover, under general gluing conditions, using unified approach we can show that for such equations the nonintegral exponent of the space may essentially affect both the number of solvability conditions and the smoothness of the solutions. To prove the solvability of boundary value problems for such equations, we consider continuous bonding gluing conditions with the $(2n-1)$-th derivative. Note that in the case of $n = 3$ the smoothness of the initial data and solvability conditions determine that the solution belongs to smoother Hölder spaces near the endpoints of the integration contour.
Keywords: Cauchy-type integral, Muskhelishvili's theorem, parabolic equation with changing direction of time, bonding gluing condition, Hölder space, singular integral equation.

REFERENCES

1. *Gakhov F. D.*, Boundary value problems, Addison-Wesley, Reading, MA (1966).
2. *Muskhelishvili N. I.*, Singular integral equations, Wolters-Noordhoff, Groningen (1972).
3. *Tersenov S. A.*, Parabolic equations with changing time direction [in Russian], Nauka, Novosibirsk (1985).
4. *Monakhov V. N.*, Free-surface boundary value problems for elliptic systems of equations [in Russian], Nauka, Novosibirsk (1977).
5. *Vekua N. P.*, Systems of singular integral equations, Noordhoff, Groningen (1967).
6. *Popov S. V.*, "On smoothness of solutions to parabolic equations with changing evolution direction," Dokl. Math., **400**, No. 1, 29–31 (2005).
7. *Popov S. V.*, "Solvability of boundary value problems for a parabolic equation of higher order with changing time direction," Ed. Sib. Mat. Zh. Novosibirsk, 1988. 56 p. Dep. v VINITI 07.12.88, № 8646–B88.
8. *Popov S. V. and Potapova S. V.*, "Hölder classes of solutions to $2n$-parabolic equations with a varying direction of evolution," Dokl. Math., **79**, No. 1, 100–102 (2009).
9. *Popov S. V.*, "Hölder classes of solutions of parabolic fourth-order equations of with changing direction of time and varying gluing conditions," Mat. Zamet. SVFU, **21**, No. 2, 81–93 (2014).

10. *Monakhov V. N. and Popov S. V.*, “Contact boundary value problems of mathematical physics,” Dyn. Splosh. Sredy, **116**, 62–72 (2000).

11. *Egorov I. E., Pyatkov S. G., and Popov S. V.*, Nonclassical differential operator equations [in Russian], Nauka, Novosibirsk (2000).

12. *Kislov N. V. and Pulkina I. S.*, “A boundary value problem with generalized gluing conditions for a parabolic type equation,” Vestn. MPEI, No. 6, 51–59 (2000).

13. *Cattabriga L.*, “Problemi al contorno per equazioni paraboliche di ordine $2n$,” Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **28**, No. 2, 376–401 (1958).

14. *Cattabriga L.*, “Equazioni paraboliche in due variabili,” I: Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari. **31**, No. 1, 48–79 (1961); II: Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari. **32**, No. 3–4, 254–267 (1962).

15. *Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., and Ural'ceva N. N.*, Linear and quasilinear equations of parabolic type, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1968) (Transl. Math. Monogr.; V. 23).

16. *Solonnikov V. A.*, “On boundary value problems for linear parabolic systems of differential equations of general form,” Proc. Steklov Inst. Math., **83**, 1–184 (1965).

Submitted March 10, 2016

Sergey Vyacheslavovich Popov
M. K. Ammosov North-Eastern Federal University,
Institute of Mathematics and Informatics,
Kulakovskogo st., 48, Yakutsk 677000 (Russia)
madu@ysu.ru