МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ 2004 год, том 16, номер 2, стр. 23-30

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ТИПА

© *В.В.Терновский, А.М.Хапаев*

Московский Государственный Университет

В поле плоской волны с произвольной фазовой скоростью определяется энергетическое состояние релятивистского заряда как функция длины пролета. Для соответствующей начально-краевой задачи находится условие существования единственного решения и методом Фурье строится решение.

SIMULATION OF A DYNAMIC SYSTEM WITH NONLINEAR VIBRATIONS

V.V.Ternovsky and A.M.Khapaev

The energy of a charged relativistic particle has been studied under influence of a plane wave as a function of the interaction range. The conditions of a uniform solution were determined by means of algebraic method. The method Fourier was used to obtain analytical solution.

Введение. В большинстве задач релятивистской электродинамики, связанных с определением изменения энергии заряда в электромагнитном поле, редко оказывается возможным получить точное решение в нужном представлении. Под представлением понимается выбор аргумента, функцией которого являются наблюдамые исследуемые величины. Целью настоящей статьи является решение начально-краевой задачи для системы уравнений Максвелла-Лоренца, описывающей движение заряда в поле циркулярно-поляризованной волны с произвольной фазовой скоростью (β_ϕ). Как будет показано ниже, она является примером динамической системы колебательного типа. Характеристики данной системы, т.е. энергия и координаты заряда, могут быть функциями собственного времени τ, длины пролета области существования заданного поля волны z, и аргумента плоской волны $\xi=t-z/(c\beta_\phi)$ (c –скорость света). В дальнейшем мы будем говорить, что анализ системы уравнений проводится в τ, ξ и z представлениях.

Данная работа является продолжением анализа задач колебательного типа. Общая схема исследования приведена в статье [1], в статьях [2], [3] была сделана попытка построить точное решение, описывающее изменение энергии заряда в волне с произвольной фазовой скоростью в τ–представлении. Однако построение аналитического решения для энергии заряда γ как функции собственного времени τ завершить не удалось. Работы [4], [5] описывают метод нахождения характеристик заряда в z–представлении в виде ряда Фурье, как решение уравнения Кеплера для одного фиксированного значения фазовой скорости волны $\beta_\phi=1$.

Постановка задачи. Начально-краевые условия. Система динамических уравнений. Пусть электрон с координатами

$$x_0 = R_0\cos\varphi, \qquad y_0 = R_0\sin\varphi, \qquad z_0 = 0, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi, \tag{1}$$

где R_0 – ларморовский радиус заряда при $z_0<z$, и с компонентами скорости

$$\beta_{x0} = \beta_{\perp 0}\sin\varphi, \qquad \beta_{y0} = -\beta_{\perp 0}\cos\varphi, \qquad \beta_{z0} = \beta_{\|0}, \qquad \beta_{\perp 0} = \upsilon_{\perp 0}/c, \qquad \beta_{\|0} = \frac{\upsilon_{\|0}}{c},$$

начиная с момента $t=t_0$, $z_0<z$ попадает в область существования высокочастотного электромагнитного поля плоской электромагнитной волны с фазовой скоростью, отличной от единицы,

вектор-потенциал которой имеет вид

$$\mathbf{A} = A_0[\sin(\omega\xi+\varphi_0)\ \mathbf{e}_1 - g\cos(\omega\xi+\varphi_0)\ \mathbf{e}_2],$$
$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}A'_\xi(\xi), \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\beta_\phi}[\mathbf{e}_3\ \mathbf{E}], \quad (\mathbf{e}_3\ \mathbf{E}) = (\mathbf{e}_3\ \mathbf{H}) = 0, \tag{2}$$
$$\xi = t - \frac{z}{c\beta_\phi}, \quad A_0 = -\frac{cE_0}{\omega}, \quad g = \pm 1,$$

$\mathbf{e}_i$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ – единичные ортогональные векторы, φ_0 – начальная фаза волны, E_0 – амплитуда электрического поля, ω – частота.

Поле считается заданным, зависимость от поперечных координат не учитывается. Движение электрона предполагается релятивистским, поэтому задача определения энергии – γ, компонент скорости и координат заряда в z–представлении сводится обычно к численному интегрированию нелинейных дифференциальных уравнений движения:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e'\sqrt{1-\beta^2}\left[\mathbf{E} + \frac{1}{c}\left[\mathbf{v}\mathbf{H}\right] - \frac{\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{H})}{c^2}\right],$$
$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \quad e' = \frac{|e_0|}{m_0}, \tag{3}$$

e_0 – заряд, m_0 – масса покоя, $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$ – координаты электрона. Причем считается очевидным, что решение поставленной задачи существует и единственно, независимо от представления. В действительности данный постулат является справедливым только для t, τ – представлений.

Описание энергетического состояния заряда в поле (2) основано на совместном решении первого векторного уравнения системы (3) и уравнения баланса энергии. Перейдя в них к производной по собственному времени τ, связанному с t соотношением $dt/d\tau=\gamma$, запишем систему, определяющую закон изменения энергии и компонент импульса $\mathbf{p}$,

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{e'}{c^3}(\gamma - \frac{c}{\beta_\phi}(\mathbf{p}\mathbf{e}_3)) + \frac{e'}{c^2\beta_\phi}(\mathbf{p}\mathbf{A}'_\xi)\mathbf{e}_3 + \frac{e'H}{c}\left[\mathbf{p}\mathbf{e}_3\right],$$
$$\dot{\gamma} = \frac{e'}{c^2}(\mathbf{p}\mathbf{A}'_\xi), \tag{4}$$

где $(\dot{\ })$ – производная по τ, e' – приведенный заряд электрона.

Интегралы движения. Преобразования системы уравнений (4), подобные проведенным в [2], [4] и других, позволяют получить два интеграла движения, следующие из симметрии задачи. Первый интеграл, связывающий энергию заряда γ и третью компоненту импульса, равен

$$\alpha = \frac{1-\beta_\phi\beta_\parallel}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta^2 = \beta_\parallel^2 + \beta_\perp^2. \tag{5}$$

Второй интеграл следует из закона сохранения обобщенного импульса. Следующие из него три скалярных уравнения и уравнение баланса энергии понижают порядок интегрируемой системы (4)

$$
\begin{aligned}
&\dot{x} = -c\varepsilon\sin(\omega\xi+\varphi_0)+c_x,\\
&\dot{y} = c\varepsilon g\cos(\omega\xi+\varphi_0)+c_y, \qquad \varepsilon = e'E_0/c\omega,\\
&\beta_\phi \ddot{z} = -c\varepsilon\omega\left(\dot{x}\cos(\omega\xi+\varphi_0)+g\,\dot{y}\sin(\omega\xi+\varphi_0)\right),\\
&\dot{\gamma} = \varepsilon\omega\left(\dot{x}\cos(\omega\xi+\varphi_0)+g\,\dot{y}\sin(\omega\xi+\varphi_0)\right).
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Начально-краевые условия (1) трансформируются в следующие

$$
\begin{aligned}
&c_x = \dot{x}_0 + c\varepsilon\sin\varphi_0, \quad \dot{x}_0 = c\beta_{x0}\gamma_0, \quad \gamma_0 = 1\Big/\sqrt{1-\beta_0^2},\\
&c_y = \dot{y}_0 - cg\varepsilon\cos\varphi_0, \quad \dot{y}_0 = c\beta_{y0}\gamma_0, \quad g = \pm 1.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Система динамических уравнений (6) плюс дисперсионное соотношение

$$
\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2 = c^2(\gamma^2 - 1) \tag{8}
$$

служат основой дальнейшего анализа энергетического состояния заряда как функции длины пролета z. Начально-краевые условия (1) и (7) соответствуют моменту времени t_0=0, z_0=0.

Условие отражения. Система уравнений (6) с помощью алгоритма, изложенного в [1], [3], [4], сводится к одному дифференциальному уравнению колебательного типа для энергии заряда в τ–представлении

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{d\gamma}{d\zeta}\right)^2 = \frac{1}{4}P_4(\gamma), \qquad \zeta = \omega\tau,\\
&P_4(\gamma) = -(\mu\gamma^2 + 2\sigma\gamma - q_+)(\mu\gamma^2 + 2\sigma\gamma - q_-),\\
&q_+ = 1 + (\varepsilon + c_\perp)^2 + \sigma^2, \quad \mu = 1 - \left(1/\beta_\phi^2\right),\\
&q_- = 1 + (\varepsilon - c_\perp)^2 + \sigma^2, \quad \sigma = \alpha/\beta_\phi^2,\\
&c_\perp = \sqrt{c_x^2 + c_y^2}.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Для дальнейшего анализа представляется целесообразным записать полином $P_4(\gamma)$ в виде многочлена по параметру μ:

$$
\begin{aligned}
&-P_4(\gamma) = \mu^2\gamma^4 + 4\mu\sigma\gamma^3 + (4\sigma^2 - \mu\sigma_+)\gamma^2 - 2\sigma\sigma_+\gamma + \sigma_-,\\
&\sigma_+ = 2(1 + \varepsilon^2 + \sigma^2 + c_\perp^2),\\
&\sigma_- = (1 + \varepsilon^2 + \sigma^2 + c_\perp^2)^2 - 4\varepsilon^2 c_\perp^2.
\end{aligned}
$$

Переход к z–представлению в уравнении (9) основан на связи между производными

$$
\frac{d\gamma}{d\omega\tau} = (\gamma - \alpha)\frac{d\gamma}{dn}, \qquad n = \frac{z\omega}{c},
$$

следующей из закона сохранения энергии-импульса (5). При этом (9) преобразуется:

$$
\left(\frac{d\gamma}{dn}\right)^2 = \frac{1}{4}\frac{P_4(\gamma)}{(\gamma - \alpha)^2}. \tag{10}
$$

Нелинейное дифференциальное уравнение (10) для энергии заряда в z–представлении содержит особые многообразия начальных параметров, на которых правая часть обращается в бесконечность, то есть электрон, попадающий в область действия электромагнитной волны (2), может быть захвачен ею. Такую совокупность начально-краевых условий называют притягивающей. Сингулярное многообразие уравнения (10) определяется условием $\gamma=\alpha$. В данной конфигурации поля выполнение этого условия возможно только при $\dot{z}=0$ или $\gamma\beta_{\|0}=0$, что приводит к трансформации системы (6) и дисперсионного соотношения (9) к виду

$$\dot{x} = -\ c\varepsilon\sin(\omega\xi+\varphi_0)+c_x,$$

$$\dot{y} = c\varepsilon g\cos(\omega\xi+\varphi_0)+c_y,$$

$$\dot{x}_0^2+\dot{y}_0^2 = c^2(\gamma^2-1).$$

Совместное решение этих уравнений, основанное на исключении $\dot{x}$, $\dot{y}$ и определении γ из интеграла энергии-импульса (5):

$$\gamma^2 = \gamma_0^2(1-\beta_\phi\beta_{\|0})^2,$$

приводит к следующему соотношению, задающему те начально-краевые условия, при которых существует отражение заряда в $-\vec{e}_3$ направлении

$$(\varepsilon-c_\perp)^2 = \gamma_0^2(1-\beta_\phi\beta_{\|0})^2-1. \qquad (11)$$

Выражение (11) есть алгебраическое уравнение, которое задает поверхности в пространстве начальных данных, то есть формирует особые многообразия.

На рис.1 приведено графическое изображение поверхности, соответствующей значениям $\beta_{x0}=0.7$, $\beta_{y0}=0.1$. По оси z отложено ε, которое меняется в диапазоне $0\le\varepsilon<1$; по оси x отложена фазовая скорость β_ϕ $(0.2<\beta_\phi<1.2)$; по оси y отложено β_{z0} $(0<\beta_{z0}\le0.25)$. Выбор параметров задачи, лежащих ниже построенной поверхности, приводит к движению с отражением, выше обыкновенное циклоидальное движение. Таким образом, можно утверждать, что эти поверхности разделяют входные параметры захваченных зарядов и зарядов, не попадающих в область притяжения сингулярных многообразий.

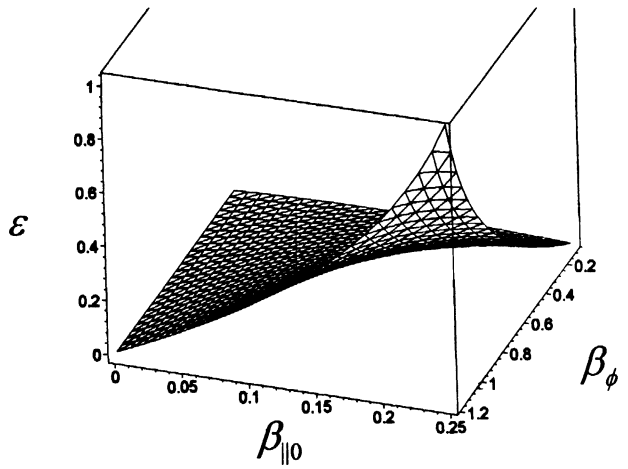

Рис.1. Поверхность "отражения".

Бифуркации и бифуркационное значение показателя преломления. Прежде чем находить аналитическое решение системы (6) в z-представлении мы выясним существуют ли

замкнутые траектории на плоскости $(\gamma, \dot{\gamma})$, сколько их и как они расположены, как влияет на их поведение показатель нелинейности, возникающий в уравнении (9). μ – безразмерная величина характеризует степень нелинейности полинома $P_4(\gamma, \mu)$ (9). При $\mu=0$, т.е. $\beta_\phi=1$, интегрирование системы (6) переходит в ранее решенную задачу [4], $P_4(\gamma, \mu)$ вырождается в $P_2(\gamma, 0)$. При $\mu\neq0$ нелинейность должна менять фазовый портрет данной динамической системы. Для наглядной иллюстрации предполагаемого влияния на рис.2 строится трехмерный график: по вертикали $\dot{\gamma}$, в горизонтальной плоскости – γ и $1-\beta_\phi^2$. Входные параметры выбраны произвольно: $g=+1$, $\varepsilon=0.3$, $\beta_{x0}=0.1$, $\beta_{y0}=-0.1$, $\beta_{z0}=0.9$, $\psi_0=1.5$. Как следует из трехмерного графика, наличие среды с показателем преломления $k=1/\beta_\phi\neq1$ приводит к качественному изменению динамики электрона.

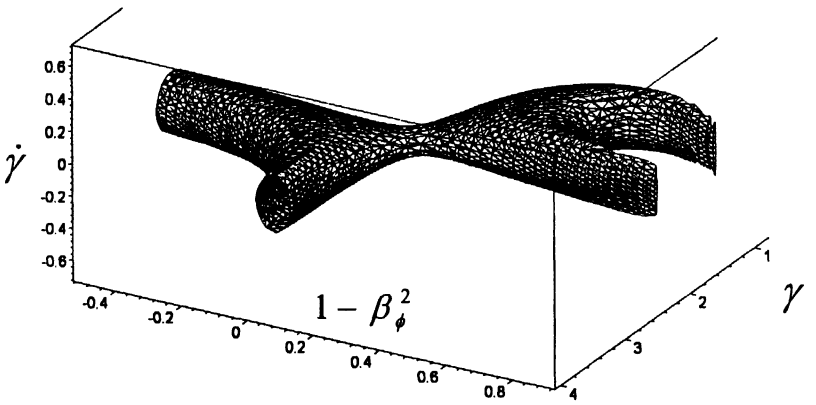

Рис.2. Фазовый портрет системы (9).

Запишем уравнение баланса энергии (9) в виде

$$\ddot{\gamma}+\frac{(\mu\gamma+\delta)^3+(\mu\gamma+\delta)(\mu s-\delta^2)}{2\mu}=0,$$
$$\delta=-\sqrt{1+\mu}\gamma_0(\sqrt{1+\mu}-\beta_{\|0}),\qquad s=1+\varepsilon^2+\sigma^2+c_\perp^2. \tag{12}$$

Это уравнение имеет 2 устойчивых положения равновесия типа центр:

$$\mu\gamma+\delta=0 \quad \text{и} \quad (\mu\gamma+\delta)^2=\delta^2-\mu s, \tag{13}$$

которые устойчивы, если $\mu s>\delta^2$ и $\mu s<\delta^2$ соответственно. Неустойчивые точки возврата определяются из условия $\gamma=-\delta/\mu\pm\sqrt{\delta^2-\mu s}/\sqrt{3/\mu}$. Ветви равновесия (13) показаны на рис.3, где круги обозначают устойчивые ветви. Точки пересечения вычисляются из условия $\delta^2-\mu s=0$, при этом одна из них – точка бифуркации. Аналогично проводится анализ зависимости динамики электрона от других параметров – ε, ψ_0.

Метод Фурье. Установив, при каких значениях параметров поля и заряда существует единственное решение системы (6), построим периодическое решение для $\gamma(z)$ методом Фурье, не решая непосредственно (10). Это связано с тем, что аналитический вид решения известен обычно в случае линейных систем, а при анализе нелинейных систем непосредственно найти их решение практически невозможно, поэтому ставится вопрос о нахождении решения в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда. Наиболее простым и наглядным способом является представление γ и z в виде двух параметрических уравнений, где параметром является аргумент волны $\omega\xi$. Для этого преобразуем систему (6) к одному уравнению для γ

$$\dot{\gamma} = -\varepsilon c_{\perp} \frac{\omega}{c} \cos\psi, \qquad \psi = \psi_з - \psi_в, \tag{14}$$

где $\psi_в = \omega\xi + \varphi_0$, $\psi_з = \arccos(c_x/c_{\perp})$ или $\psi_з = \arcsin g(c_y/c_{\perp})$.

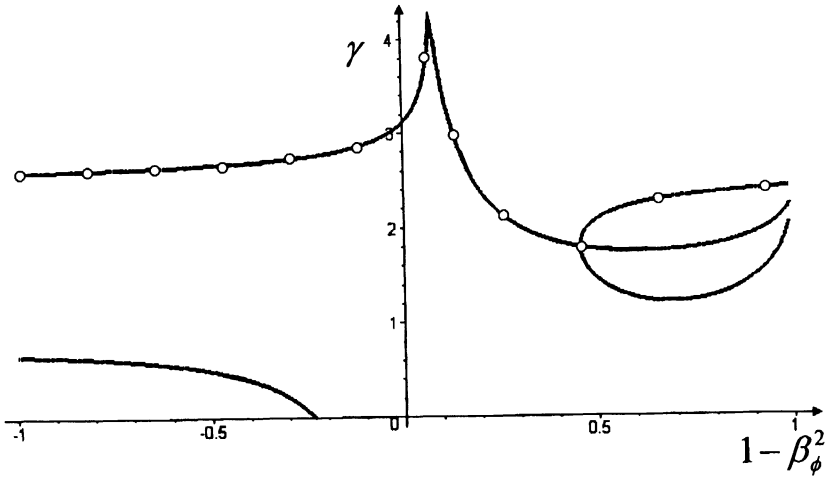

Рис.3. Ветви равновесия.

Переходя от дифференцирования по τ к производной по ψ, получим вместо (14) следующее выражение:

$$\left(\mu\gamma + \frac{\alpha}{\beta_ф^2}\right)\frac{d\gamma}{d\psi} = -\varepsilon\frac{c_{\perp}}{c}\cos\psi, \qquad \mu = 1 - \frac{1}{\beta_ф^2}. \tag{15}$$

Интегрирование по ψ выражает γ через элементарные функции от ξ

$$\left(\mu\gamma + \frac{\alpha}{\beta_ф^2}\right)^2 = \left(\mu\gamma_0 + \frac{\alpha}{\beta_ф^2}\right)^2 - 2\varepsilon\frac{c_{\perp}}{c}\mu^2(\sin\psi - \sin\psi_0). \tag{16}$$

Нетрудно показать, что знак γ определяется величиной фазовой скорости волны

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \gamma - \frac{1}{\beta_ф}\frac{\dot{z}}{c} = \mu\gamma + \frac{\alpha}{\beta_ф^2} = \gamma\left(1 - \frac{\beta_{\parallel}}{\beta_ф}\right),$$

то есть энергия заряда в ξ–представлении при $\beta_ф > 1$ равна

$$\gamma(\xi) = -\frac{\alpha}{\mu\beta_ф^2} + \left[\left(\gamma_0 + \frac{\alpha}{\mu\beta_ф^2}\right)^2 - 2\frac{c_{\perp}}{c}\mu^2(\sin\psi - \sin\psi_0)\right]^{1/2}.$$

При $\beta_ф < 1$ знак перед радикалом меняется на обратный.

Закон сохранения (5), связывающий третью компоненту импульса и энергию заряда, приводит к следующему соотношению для $z(\xi)$ после перехода от производной по τ к производной по ψ:

$$\frac{\omega}{c}\frac{dz}{d\psi}=\frac{1}{\mu\beta_{\phi}}-\frac{\alpha}{\mu\beta_{\phi}}\cdot\frac{1}{\mu\gamma+\alpha/\beta_{\phi}^{2}}.$$

Интегрирование по ψ приводит $(\omega z/c)$ к следующему каноническому виду:

$$\frac{\omega}{c}z=\frac{1}{\mu\beta_{\phi}}(\psi-\psi_0)-\frac{2\ \alpha}{\mu\beta_{\phi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{a+b}}\int\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}},\tag{17}$$

где верхний предел – $(\psi+\pi/2)/2$, а нижний – $(\psi_0+\pi/2)/2$. Константы a, b связывают γ (16) и z (17) с параметрами поля (2) и заряда (7)

$$a=\left(\gamma_0+\frac{\alpha}{\mu\beta_{\phi}^2}\right)^2+2\varepsilon\frac{c_{\perp}}{c}\sin\psi_0,\quad b=2\varepsilon\frac{c_{\perp}}{c},\quad k^2=\frac{2b}{a+b}.$$

Так как значение верхнего предела в эллиптическом интеграле в правой части (17) не должно превышать $\pi/2$, $z(\xi)$ приводится к разности неполных эллиптических интегралов и сумме m $K(k)$, где $K(k)$ – полный эллиптический интеграл I-го рода [6]. При условии, что модуль k^2 принимает значения из интервала $0<k<1$, $(\omega z/c)$ (17) принимает вид

$$\frac{\omega\ z}{c}=\frac{\beta_{\phi}}{\beta_{\phi}^2-1}(\psi-\psi_0)-\frac{2\ \alpha}{\mu\ \beta_{\phi}}\frac{1}{\sqrt{a+b}}\times\left[2mK(k)+F(\sin\theta,\ k)-F(\sin\theta_0,\ k)\right]\tag{18}$$

при $k^2>1$, эллиптические интегралы переходят в $(1/k)\cdot F(\sin\theta, k)$.

Итак, для определения зависимости γ от длины пролета зарядов z пространства взаимодействия с полем плоской волны (2) построена система параметрических уравнений (16), (18). В силу периодичности изменения γ по z период колебаний равен

$$T\left(\frac{\omega\ z}{c}\right)=\frac{\beta_{\phi}}{\beta_{\phi}^2-1}\left[2\pi+\frac{4K(k)}{\sqrt{a+b}}\gamma_0\left(\beta_{\|\phi}\beta_{\phi}-1\right)\ \beta_{\phi}\right],\tag{19}$$

то есть $\gamma(z)$ разложима в тригонометрический ряд Фурье, где коэффициенты a_0, a_k, b_k равны

$$\begin{aligned}
a_0&=\frac{2}{T_z}\int_{-T_z/2}^{T_z/2}\gamma(z)\,dz=\frac{2}{T_z}\int_{-\pi}^{\pi}\gamma(\psi)\frac{d\ z}{d\psi}d\psi,\\
a_k&=\frac{2}{T_z}\int_{-\pi}^{\pi}\gamma(\psi)\frac{dz}{d\psi}\cos\left(2\pi k\frac{z(\psi)}{T_z}\right)d\psi,\\
b_k&=\frac{2}{T_z}\int_{-\pi}^{\pi}\gamma(\psi)\frac{dz}{d\psi}\sin\left(2\pi k\frac{z(\psi)}{T_z}\right)d\psi.
\end{aligned}\tag{20}$$

Как следует из проведенного анализа, построение аналитического решения $\gamma(z)$, описывающего изменение энергии релятивистского заряда в плоской волне как функцию длины пролета при произвольных входных условиях и произвольной фазовой скорости, представляется сложной процедурой. Коэффициенты тригонометрического ряда Фурье (20) представляют собой эллиптические интегралы первого и второго рода. Поэтому особый интерес представляют те входные условия, которые позволяют упростить и сделать наглядным решение.

Пусть интеграл, связывающий энергию и z–компоненту импульса (5), принимает значение $\alpha=0$, то есть $\beta_{\|0}=1/\beta_{\phi}$. Так как $\beta_{\|0}$ меняется в интервале $0<\beta_{\|0}<1$, фазовая скорость волны должна меняться в диапазоне $1<\beta_{\phi}<\infty$. С учетом сделанного предположения система параметрических уравнений для $\gamma(\xi)$ (16); $z(\xi)$, (18) сводится к следующей

$$\gamma(\xi)=\left[\gamma_0^2-2\varepsilon\frac{c_\perp}{c}(\sin\psi-\sin\psi_0)\right],$$

$$\frac{\omega}{c}z=(\psi-\psi_0)\mu\beta_\phi,$$

то есть тригонометрический ряд Фурье (20) сводится к одному члену.

Заключение. Мы исследовали динамику заряда, т.е. изменение энергии релятивистского заряда при взаимодействии с полем циркулярно-поляризованной волны с произвольной фазовой скоростью. Проведенный анализ позволяет сделать заключение о существовании области изменения входных параметров, определяющих единственное решение (условие отражения (11), рис.1, если решение определяется в z-представлении.

Произвольная фазовая скорость $\beta_\phi\neq1$ существенно меняет характер движения. Появляются новые режимы изменения энергии. Нелинейное уравнение для $\gamma(z)$ при $\beta_\phi=1$ представляет собой колебательное уравнение с квадратичной нелинейностью в τ-представлении, при $\beta_\phi\neq1$ это есть уравнение Дюффинга с кубической нелинейностью (9).

Построено аналитическое представление для γ как функции z при произвольных входных условиях (15) в виде тригонометрического ряда Фурье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Терновский В.В., Хапаев А.М.* Постановка и решение одной задачи теории нелинейных колебаний. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1996, т.36, №6, с.114-122.
2. *Bourdier A., Gond S/* Dynamics of a charged particle in a circulary polarized traveling electromagnetic wave // Phys. Rev. E. 2000, v.62, №3, p.4189-4206.
3. *Володин Б.А., Хапаев А.М.* Решение одной задачи, связанной с динамикой электрона // Ж.вычисл.мат.и мат.физ. 1987, т.27, №2, с.245-251.
4. *Терновский В.В., Хапаев А.М.* Релятивистский заряд в электромагнитном поле // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001, т.41, №8, с.1263-1274.
5. *Володин Б.А., Хапаев А.М.* О решении некоторой задачи Коши, связанной с движением электрона в плоской волне//Дифференц.ур-ния.1985, т.21, №12, с.2036-2046.

Поступила в редакцию 12.05.2003.