Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. Д. Брюно, Система, подобная нормальной форме, *Матем. заметки*, 1990, том 48, выпуск 3, 20–31

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.91
21 марта 2025 г., 17:28:17

Математические заметки

том 48 выпуск 3 сентябрь 1990

СИСТЕМА, ПОДОБНАЯ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ

А. Д. Брюно

1. Введение. Будем рассматривать формальные комплексные системы

$$\dot{X} = AX + \Phi(X), \tag{1}$$

где $X = (x_1, \ldots, x_n)$, A — комплексная матрица, $\Phi(X) = (\varphi_1(X), \ldots, \varphi_n(X))$ — векторный формальный (т. е. сходящийся или расходящийся) степенной ряд с комплексными коэффициентами без свободного и линейных членов. Согласно [1; 2, гл. III, § 1] посредством обратимой формальной замены координат $X \to Y$ система (1) приводится к (*резонансной*) *нормальной форме*

$$\dot{Y} = CY + \Psi(Y), \tag{2}$$

выделяемой двумя свойствами:

а) матрица C является жордановой нормальной формой с диагональю $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$;

б) в разложениях

$$\psi_i = y_i \sum g_{iQ} Y^Q \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

имеются только резонансные члены, для которых

$$\langle Q, \Lambda \rangle \stackrel{\Delta}{=} q_1\lambda_1 + \ldots + q_n\lambda_n = 0. \tag{4}$$

Здесь $Q = (q_1, \ldots, q_n)$, $Y^Q = y_1^{q_1} \ldots y_n^{q_n}$.

Определение. Система (1) *подобна нормальной форме*, если она переводится в нормальную форму (2) линейной заменой

$$X = BY, \quad \det B \neq 0. \tag{5}$$

В настоящей заметке изучаются свойства систем, подобных резонансной нормальной форме, и эти системы сравниваются с другими определениями нормальных форм. Рассмотрена также система Гамильтона, подобная нормальной форме. В некоторых задачах система, подобная нормальной форме, может быть удобнее, чем сама нормальная форма. Так, вещественная нормальная форма

© А. Д. Брюно, 1990

[3; 2, гл. III, § 1] является частным случаем системы, подобной нормальной форме.

2. Основные свойства.

Обозначения. A — произвольная n-матрица, C — ее жорданова нормальная форма, $A = BCB^{-1}$, $L = \operatorname{diag} C = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ — матрица, образованная диагональю матрицы C, $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — вектор, образованный диагональю матрицы C, $M = C - L$ — нильпотентная матрица (т. е. $M^n = 0$). Очевидно, $ML = LM$. $\partial\Phi/\partial X = (r_{ij})$, где $r_{ij} = \partial\varphi_i/\partial x_j$.

Теперь свойство б) нормальной формы можно записать в виде

$$(\partial\Psi/\partial Y)LY - L\Psi(Y) = 0. \tag{6}$$

Матрицу S будем называть *полупростой*, если она подобна диагональной, т. е. $S = B^{-1}LB$. Согласно теореме 7 § 8 гл. I [4], всякая матрица A единственным образом разлагается в сумму

$$A = S + N, \tag{7}$$

где S — полупростая и N — нильпотентная матрицы. При этом матрицы S и N перестановочны и выражаются в виде многочленов от матрицы A. Разложение (7) на *полупростую часть* $S = S(A)$ и *нильпотентную часть* $N = N(A)$ называется *разложением Жордана*. Оно обладает рядом свойств и излагается в учебниках [5, гл. 1, п. 4.1; 6, гл. 3, § 2, п. 1; 7] и др. Правда, в [4] единственность разложения Жордана доказывается без предположения о перестановочности S и N, а в [5; 6] — с этим предположением.

ТЕОРЕМА 1. *Система* (1) *подобна нормальной форме тогда и только тогда, когда*

$$(\partial\Phi/\partial X)SX - S\Phi(X) = 0, \tag{8}$$

где S — полупростая часть матрицы A.

Доказательство. Пусть замена (5) приводит матрицу A к жордановой форме $C = B^{-1}AB$. Эта замена переводит систему (1) в систему (3), где

$$\Psi(Y) = B^{-1}\Phi(BY), \tag{9}$$

а соотношение (8) переводит в (6) и обратно.

Если система (1) подобна нормальной форме, то некоторая замена (5) приводит ее к нормальной форме (2), для которой выполнено (6). Следовательно, выполнено и (8).

Если выполнено (8), то для любой замены (5) будет выполнено (6), т. е. система (2) будет нормальной формой. Следовательно, система (1) подобна нормальной форме. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Формальная система*

$$\dot Z = AZ + \widetilde{\Phi}(Z) \tag{10}$$

приводится к системе (1), *подобной нормальной форме, посредством формальной замены*

$$Z = X + \Xi(X), \tag{11}$$

где ряды $\Phi(Z)$ *и* $\Xi(X)$ *без свободных и линейных членов.*

Доказательство. Искомое преобразование (11) является результатом трех последовательных преобразований. (I) Замена $Z = BW$ приводит матрицу A к жордановой форме. (II) Нормализующая замена $W \to Y$ с тождественной линейной частью приводит к нормальной форме (2). Эта замена существует по теореме о нормальной форме [1; 2, гл. III, § 1]. (III) Замена $Y = B^{-1}X$ переводит нормальную форму (2) в систему (1), подобную нормальной форме. Теорема доказана.

3. Свойства определяющей системы. Независимо от (1) при некоторой матрице A рассмотрим систему уравнений для формального степенного ряда $\Phi(X)$:

$$(\partial\Phi/\partial X)AX - A\Phi(X) = 0. \tag{12}$$

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* (7) — *разложение Жордана. Система* (12) *эквивалентна паре систем*: (8) *и*

$$(\partial\Phi/\partial X)NX - N\Phi(X) = 0. \tag{13}$$

Доказательство. Поскольку $SN = NS$, то $e^{At} = e^{St}e^{Nt} = e^{Nt}e^{St}$. Для полупростой S имеем

$$e^{St} = \sum\nolimits_{j=1}^{n} S_j e^{\lambda_j t},$$

где λ_j — собственные числа матрицы S, S_j — постоянные матрицы. Для нильпотентной N имеем

$$e^{Nt} = \sum\nolimits_{k=0}^{n-1} (k!)^{-1} N^k t^k,$$

т. е. e^{St} — сумма экспонент t, а e^{Nt} — многочлен от t. Далее будем рассматривать формальные степенные ряды от X, коэффициенты которых суть гладкие функции от t. Для них арифметические операции, дифференцирование и подстановка ряда в ряд производятся также, как для сходящихся. Равенство двух таких рядов означает равенство всех коэффициентов при одинаковых степенях X. Согласно теореме 2 [8] система (12) равносильна системе

$$\Phi(e^{At}Z) = e^{At}\Phi(Z).$$

Положив $X = e^{Nt}Z$, запишем эту систему в виде

$$e^{-St}\Phi(e^{St}X) = e^{Nt}\Phi(e^{-Nt}X).$$

У левого ряда все коэффициенты при степенях X суть суммы экспонент от t, а у правого ряда — многочлены от t. Они могут быть равны, только если не зависят от t. Итак,

$$e^{-St}\Phi(e^{St}X) = \Phi(X) = e^{Nt}\Phi(e^{-Nt}X).$$

Согласно теореме 2 [8] эта система равносильна системе (8), (13). Теорема доказана.

Для случая жордановой матрицы A эта теорема в неявном виде содержится в п. 2.4 гл. III [2] и в теореме 9 [8]. Идея доказательства заимствована из [8]. Другой способ доказательства теоремы 3: свести систему (12) к системе

$$(\partial\Psi/\partial Y)CY - C\Psi\,(Y) = 0 \tag{14}$$

посредством замены $X = BY$, $\Phi = B\Psi$ и доказать, что решение системы (14) удовлетворяет системе (6).

Замечание 1. Решения систем (12) и (14) связаны формулой (9), поэтому достаточно решить одну из этих систем и найти матрицу B. Как правило, проще решать систему (14) (особенно ее подсистему (6), ибо ее решения имеют вид (3), (4)).

Замечание 2. Пусть $\varkappa R = T^{-1}AT$, где $\varkappa$ — скалярная постоянная, и $\Phi\,(X)$ — решение системы (12). Тогда ряд $\Delta\,(Y) = T^{-1}\Phi\,(TY)$ является решением системы

$$(\partial\Delta/\partial Y)RY - R\Delta\,(Y) = 0.$$

4. Нормальная форма Стрижак. Т. Г. Стрижак [8; 9, введение] назвала систему

$$\dot{X} = AX + \Theta\,(X) \tag{15}$$

нормальной формой, если ряд Θ удовлетворяет системе

$$(\partial\Theta/\partial X)AX - A\Theta\,(X) = 0. \tag{16}$$

Сравним это определение с определениями п. 1. Рассмотрим два случая.

1) Матрица A полупростая, т. е. $S\,(A) = A$, $N\,(A) = 0$. Тогда системы (8) и (16) совпадают. Согласно теореме 1 в этом случае нормальная форма Стрижак (15) является системой (1), подобной нормальной форме. Согласно теореме 2 в этом случае всякая система (10) заменой (11) приводится к нормальной форме Стрижак (15), т. е. теоремы 12 и 14 [8] следуют из теоремы 2.

2) $N\,(A) \neq 0$. Покажем, что в этом случае не всякая система (10) заменой вида (11) приводится к нормальной форме Стрижак (15).

Пример 1. Пусть $n = 2$ и $A = N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Здесь $S\,(A) = 0$, и (8) всегда выполнено, а (16) есть

$$\begin{pmatrix} \partial\theta_1/\partial x_1 & \partial\theta_1/\partial x_2 \\ \partial\theta_2/\partial x_1 & \partial\theta_2/\partial x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix},$$

т. е. $x_2\,(\partial\theta_1/\partial x_1) = \theta_2$, $x_2\,(\partial\theta_2/\partial x_1) = 0$. Следовательно,

$$\theta_1 = x_1\alpha\,(x_2) + x_2\beta\,(x_2), \quad \theta_2 = x_2\alpha\,(x_2), \tag{17}$$

где α и β — степенные ряды без свободных членов. Нормальная форма Стрижак (15) имеет вид

$$\dot{x}_1 = x_2 + x_1\alpha\,(x_2) + x_2\beta\,(x_2), \quad \dot{x}_2 = x_2\alpha\,(x_2) \tag{18}$$

(см. пример 4 [8]), Пусть система вида (10)

$$\dot{z}_1 = z_2 + \widetilde{\varphi}_1 (z_1, z_2), \quad \dot{z}_2 = \widetilde{\varphi}_2 (z_1, z_2), \tag{19}$$

где $\widetilde{\varphi}_i$ — квадратичные формы, переводится заменой (11) в нормальную форму Стрижак (15), (18). Тогда для членов первой и второй степени выполнены уравнения

$$\begin{aligned} &x_2 + \theta_1^{(2)} + x_2 (\partial\xi_1^{(2)}/\partial x_1) = x_2 + \xi_2^{(2)} + \widetilde{\varphi}_1, \\ &\theta_2^{(2)} + x_2 (\partial\xi_2^{(2)}/\partial x_1) = \widetilde{\varphi}_2, \end{aligned} \tag{20}$$

где $\theta_i^{(2)}$ и $\xi_i^{(2)}$ — квадратичные части рядов θ_i и ξ_i соответственно. Согласно (17) $\theta_2^{(2)} = ax_2^2$, поэтому второе уравнение (20) не имеет полиномиального решения $\xi_2^{(2)}$, если $\widetilde{\varphi}_2$ не делится на x_2. В этом случае система (19) не приводится к нормальной форме Стрижак (18) заменой вида (11).

Заметим, что сама Т. Г. Стрижак [8] доказывала приводимость системы к своей нормальной форме только в случае 1), т. е. при $N = 0$ (теоремы 12 и 14 [8]).

Пример 2. Покажем, что для $n = 2$ и $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ нормальная форма Стрижак (15) формально эквивалентна линейной системе. Согласно примеру 1 здесь нормальная форма Стрижак имеет вид (18), где ряды α и β без свободных членов. Покажем, что существует замена

$$y_i = x_i (1 + h_i (X)) \quad (i = 1, 2), \tag{21}$$

где h_i — степенные ряды, которая переводит систему (18) в систему

$$\dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = 0. \tag{22}$$

Дифференцируя (21) по t, подставляя туда значения $\dot{x}_i$ и $\dot{y}_i$ из (18) и (22) и выражая y_i через X по (21), получим для h_i систему уравнений

$$\begin{aligned} &(x_2 + x_1\alpha + x_2\beta)(1 + h_1) + x_1(\partial h_1/\partial x_1)(x_2 + \\ &\qquad + x_1\alpha + x_2\beta) + x_1 (\partial h_1/\partial x_2)x_2\alpha = x_2 (1 + h_2), \\ &x_2\alpha (1 + h_2) + x_2 \frac{\partial h_2}{\partial x_1} (x_2 + x_1\alpha + x_2\beta) + x_2 \frac{\partial h_2}{\partial x_2} x_2\alpha = 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Положим $h_2 = \sum_{k=0}^{\infty} x_1^k \xi_2 (x_2)$ и во втором уравнении (23) выпишем коэффициенты при $x_2 x_1^k$. Получим

$$\begin{aligned} &\alpha (1 + \xi_0) + \xi_1 x_2 + \xi_1 x_2\beta + \xi_0' x_2\alpha = 0 \quad (k = 0), \\ &\alpha\xi_k + (k + 1)\xi_{k+1} x_2 + k\xi_k\alpha + (k + 1)\xi_{k+1} x_2\beta + \\ &\qquad\qquad + \xi_k' x_2\alpha = 0 \qquad (k=1, 2, \ldots). \end{aligned}$$

Решения этих уравнений суть

$$\xi_1 = -\alpha\,(1 + \xi_0 + x_2\xi_0')x_2^{-1}\,(1 + \beta)^{-1},$$

$$\xi_{k+1} = -\alpha\,((k+1)\xi_k + x_2\xi_k')(k+1)^{-1}x_2^{-1}\,(1+\beta)^{-1} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Поскольку αx_2^{-1} и $(1 + \beta)^{-1}$ суть степенные ряды, то по этим формулам последовательно находим все степенные ряды $\xi_k\,(x_2)$, при этом ряд $\xi_0\,(x_2)$ произволен. Для решения первого уравнения (23) положим $h_1 = \sum_{k=0}^{\infty} x_1^k \eta_k\,(x_2)$, и выписывая коэффициенты при x_1^k, получим систему уравнений, которая приводится к виду

$$(1 + \beta)(1 + \eta_0) = 1 + \xi_0 \quad (k = 0),$$

$$(k + 1)x_2\,(1 + \beta)\eta_k = x_2\xi_k - \alpha\,(k\eta_{k-1} + x_2\eta_{k-1}') \quad (k=1,\ 2,\ldots).$$

Отсюда последовательно по $k = 0, 1, 2, \ldots$ находятся ряды $\eta_k\,(x_2)$.

Итак, согласно примеру 1 не всякая система приводится к нормальной форме Стрижак и согласно примеру 2 нелинейная нормальная форма Стрижак зачастую эквивалентна линейной системе. Поэтому мне кажется неудачным употребление термина «нормальная форма» для систем, введенных Т. Г. Стрижак.

5. **Нормальная форма Белицкого.** Г. Р. Белицкий [10; 11, гл. II; 12, гл. II] систему

$$\dot{X} = AX + \Delta\,(X) \tag{24}$$

назвал нормальной формой (в [11] — неполной), если ряд $\Delta\,(X)$ удовлетворяет системе

$$(\partial\Delta/\partial X)\bar{A}^*X - \bar{A}^*\Delta\,(X) = 0, \tag{25}$$

где черта означает комплексное сопряжение, а звездочка — транспонирование. При этом он доказал, что всякая система (10) заменой (11) приводится к системе (24) со свойством (25).

Если (7) — разложение Жордана, то $\bar{A}^* = \bar{S}^* + \bar{N}^*$ — также разложение Жордана, ибо $\bar{S}^* = \bar{B}^{-1*}\bar{L}\bar{B}^*$ — полупростая и $\bar{N}^* = \bar{B}^{-1*}\bar{M}^*\bar{B}^*$ — нильпотентная матрицы, а разложение Жордана единственно. Согласно теореме 3 система (25) эквивалентна паре систем

$$(\partial\Delta/\partial X)\bar{S}^*X - \bar{S}^*\Delta\,(X) = 0, \tag{26}$$

$$(\partial\Delta/\partial X)\bar{N}^*X - \bar{N}^*\Delta\,(X) = 0. \tag{27}$$

Сравним решения системы (26), (27) с решениями системы (8). Рассмотрим три случая.

1) Матрица A является жордановой нормальной формой, т. е. $A = C = L + M$, причем $L^* = L$, поэтому система (26) есть

$$(\partial\Delta/\partial X)\bar{L}X - \bar{L}\Delta\,(X) = 0. \tag{28}$$

Ее решения имеют вид

$$\delta_i = x_i \sum d_{iQ} X^Q \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{29}$$

где сумма берется по таким Q, что

$$\langle Q, \overline{\Lambda} \rangle = 0. \tag{30}$$

Но вещественные целочисленные решения Q уравнений (30) и (4) совпадают, поэтому система (28) равносильна системе

$$(\partial\Delta/\partial X) LX - L\Delta(X) = 0, \tag{31}$$

которая аналогична (6), т. е. в этом случае нормальная форма Белицкого (24) является резонансной нормальной формой, удовлетворяющей дополнительному ограничению (27) на структуру рядов Δ.

Пример 3. Пусть $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда $\bar{A}^* = T^{-1} A T$, где $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = T^{-1}$. Согласно замечанию 2 п. 3 решение системы (25) получается из решения (17) системы (16), которое было получено в примере 1, поэтому теперь

$$\delta_1 = x_1 \alpha(x_1), \quad \delta_2 = x_2 \alpha(x_1) + x_1 \beta(x_1),$$

т. е. в нормальной форме Белицкого (24) δ_1 и δ_2 описываются двумя рядами от одной координаты. В нормальной форме (2) ψ_1 и ψ_2 суть два ряда от двух координат.

Нормальная форма Белицкого является одним из вариантов вторичной нормализации (см. [2, § 2 гл. III]) с использованием $N(A)$ (другие варианты см. в [13—16]).

2) Матрица A не является жордановой нормальной формой, но $S(A)$ диагональна: $S = L$. В этом случае $\bar{S}^* = \bar{L}$, поэтому, как и в случае 1), ряды $\Delta(X)$ содержат только резонансные члены (29), (4). Теперь нормальная форма Белицкого не является резонансной нормальной формой п. 1, ибо не обладает свойством а), но является системой, подобной нормальной форме, ибо Δ удовлетворяет системе (31).

3) $S(A)$ недиагональна. В этом случае решение системы (26) может не удовлетворять системе (8), т. е. нормальная форма Белицкого может не быть системой, подобной нормальной форме (см. ниже пример 4). В дальнейшем для простоты будем предполагать, что матрица A вещественна, тогда S также вещественна и $\bar{S}^* = S^* = B^{-1*} L B^*$. Пусть $\Psi(Y)$ — решение системы (6). Согласно замечанию 1 п. 3 решения систем (8) и (26) суть

$$\Phi(X) = B\Psi(B^{-1}X), \quad \Delta(X) = B^{-1*}\Psi(B^* X). \tag{32}$$

В этом случае $S^* = T^{-1} S T$, где $T = BB^*$, и согласно замечанию 2 п. 3 $\Delta(X) = T^{-1}\Phi(TX)$.

Пример 4. Пусть $n = 2$, $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M = 0$, $A = S = BLB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Здесь $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, поэтому решения системы (6) имеют вид

$$\psi_1 = y_1\alpha\,(y_1y_2),\ \psi_2 = y_2\beta\,(y_1y_2), \tag{33}$$

где α и β суть степенные ряды одного аргумента y_1y_2 без свободных членов. Согласно формулам (32) решения Φ и Δ соответственно систем (8) и (32) имеют вид

$$\varphi_1 = \psi_1 + \psi_2 = (x_1 - x_2)\alpha_1\,((x_1 - x_2)x_2) + x_2\beta_1\,((x_1 - x_2)x_2),$$

$$\varphi_2 = \psi_2 = x_2\beta_1\,((x_1 - x_2)x_2)$$

и

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \psi_1 = x_1\alpha_2\,(x_1\,(x_1 + x_2)),\\ \delta_2 &= -\psi_1 + \psi_2 = -x_1\alpha_2\,(x_1\,(x_1 + x_2)) + (x_1 + {}\\ &\qquad + x_2)\beta_2\,(x_1\,(x_1 + x_2)).\end{aligned} \tag{34}$$

Несложный анализ (на осях координат) показывает, что равенства $\varphi_i = \delta_i$ $(i = 1, 2)$ возможны только при $\varphi_i = \delta_i = 0$. Следовательно, в случае 3) нормальная форма Белицкого (24) является системой (1), подобной нормальной форме, только если она линейна.

Если A — треугольная матрица, то ее диагональ состоит из собственных чисел $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \Lambda$, но ее полупростая часть S может не быть диагональной: $S\,(A) \neq L$. В работах Белицкого [11, гл. II, § 6, пример 1] и [12, гл. II, § 7, пример 7.1] сказано, что при треугольной матрице A в нормальной форме Белицкого (24) все δ_i содержат только резонансные члены (29), (4) (аналогичное утверждение имеется в [10] без требования треугольности матрицы A). Это неверно, как показано в примере 5.

Пример 5. В ситуации примера 4 матрица A треугольна, резонансные части выписаны в (33), а Δ из нормальной формы Белицкого — в (34). Они совпадают при $Y = X$, только если $\alpha = \beta = \alpha_2 = \beta_2 = 0$, т. е. только для линейной системы.

Итак, нормальная форма Белицкого (24) с треугольной не жордановой матрицей A может не быть резонансной нормальной формой п. 1 не только из-за нарушения условия а), но и из-за нарушения условия б). Она даже может быть системой, не подобной нормальной форме.

6. Система Гамильтона. Пусть $n = 2m$. Рассмотрим формальную систему Гамильтона

$$\dot{x}_k = \partial\gamma/\partial x_{k+m},\ \dot{x}_{k+m} = -\partial\gamma/\partial x_k \qquad (k = 1, \ldots, m) \tag{35}$$

с функцией Гамильтона

$$\gamma = \langle X, FX\rangle/2 + f\,(X), \tag{36}$$

где F — симметрическая матрица и f — скалярный степенной ряд, начинающийся с кубических членов. Пусть $J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0\end{pmatrix}$, где E — единичная матрица порядка m. Если записать систему (35), (36) в виде (1), то

$$A = JF. \tag{37}$$

Согласно [17, § 2] посредством формальной канонической замены $X \to Y$ всякая система (36), (35) приводится к (комплексной) резонансной *нормальной форме*

$$\dot{y}_k = \partial\gamma/\partial y_{k+m},\ \dot{y}_{k+m} = -\partial\gamma/\partial y_k \quad (k = 1, \ldots, m) \tag{38}$$

с гамильтонианом

$$\gamma = \langle Y, GY\rangle/2 + g(Y), \tag{39}$$

обладающим двумя свойствами: а) матрица $C = JG$ является гамильтоновой нормальной формой, указанной в п. 1.2 [17]; б) разложение $g = \sum g_Q Y^Q$ содержит только резонансные члены, для которых выполнено (4).

Определение. Система Гамильтона (35) *подобна нормальной форме*, если она приводится к гамильтоновой нормальной форме линейной канонической заменой (5), т. е. $B^*JB = J$.

Пусть A — *гамильтонова матрица*, т. е. $A = JF$, где F — симметрическая. Тогда в разложении Жордана (7) обе матрицы S и N гамильтоновы. Действительно, гамильтоновы матрицы образуют алгебру Ли группы симплектических матриц. Согласно п. 4.2 гл. I [5] и теореме 8 § 3 гл. 3 [6] матрицы $S(A)$ и $N(A)$ лежат в той же алгебре Ли, что и матрица A.

ТЕОРЕМА 4. *Система Гамильтона* (35), (36) *подобна нормальной форме тогда и только тогда, когда*

$$\langle SX, \partial f/\partial X\rangle = 0, \tag{40}$$

где S — полупростая часть матрицы (37).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Аналогично теореме 2 доказывается, что всякая система Гамильтона с гамильтонианом $\gamma = \langle Z, FZ\rangle/2 + \tilde{f}(Z)$ посредством канонической замены (11) приводится к гамильтоновой системе (35), (36), подобной нормальной форме.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть A — гамильтонова матрица, и* (7) — *ее разложение Жордана. Тогда уравнение*

$$\langle AX, \partial f/\partial X\rangle = 0 \tag{41}$$

эквивалентно системе двух уравнений

$$\langle SX, \partial f/\partial X\rangle = 0, \tag{42}$$

$$\langle NX, \partial f/\partial X\rangle = 0. \tag{43}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3. Уравнение (41) равносильно уравнению $f(e^{At}Z) = f(Z)$. Положив $X = e^{Nt}Z$, запишем это уравнение в виде $f(e^{St}X) = f(e^{-Nt}X)$, где слева — экспоненты от t, а справа — многочлены. Такое равенство возможно, только если обе части не зависят от t, т. е.

$$f(e^{St}X) = f(X) = f(e^{-Nt}X),$$

что равносильно системе (42), (43). Теорема доказана.

Белицкий [12, гл. II, § 7, пример 7.5] называет систему (35) с гамильтонианом

$$\gamma = \langle X, FX \rangle / 2 + h(X) \tag{44}$$

нормальной формой, если для матрицы (37)

$$\langle \bar{A}^* X, \partial h / \partial X \rangle = 0. \tag{45}$$

Согласно теореме 5 уравнение (45) эквивалентно системе двух уравнений

$$\langle \bar{S}^* X, \partial h / \partial X \rangle = 0, \tag{46}$$

$$\langle \bar{N}^* X, \partial h / \partial X \rangle = 0. \tag{47}$$

Сравним решения h этой системы с решениями f уравнения (40). Рассмотрим три случая матрицы (37).

1) Матрица (37) является гамильтоновой нормальной формой, т. е. $A = C = L + M$, при этом $L^* = L$, поэтому уравнение (46) есть

$$\langle \bar{L} X, \partial h / \partial X \rangle = 0. \tag{48}$$

Его решения суть

$$h = \sum h_Q X^Q \tag{49}$$

по (30). Очевидно, это тоже самое, что сумма по (4), т. е. уравнение (48) равносильно уравнению $\langle LX, \partial h / \partial X \rangle = 0$. В этом случае нормальная форма Белицкого (35), (44) является резонансной гамильтоновой нормальной формой, удовлетворяющей дополнительному ограничению (47) на структуру ряда h.

Пример 6. Пусть $m = 1$ и $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда $A = JF = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = N$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ и всякая система (35), (36) является резонансной гамильтоновой нормальной формой. Уравнение (47) есть $x_1 \partial h / \partial x_2 = 0$. Следовательно, $h = \alpha(x_1)$, и гамильтониан (44) есть $\gamma = (1/2) x_2^2 + \alpha(x_1)$, т. е. нормальная форма Белицкого описывается одним рядом от одной координаты.

Нормальная форма Белицкого является одним из вариантов вторичной нормализации систем Гамильтона (обзор других вариантов см. в конце § 2 [17]).

2) Матрица (37) не является гамильтоновой нормальной формой, но ее полупростая часть S диагональна: $S = L$. В этом случае $\bar{S}^* = \bar{L}$ и ряд (49) содержит только резонансные члены (4). Теперь нормальная форма Белицкого не является резонансной нормальной формой, но подобна ей.

3) Полупростая часть S матрицы (37) не диагональна. В этом случае решение h уравнения (46) может не удовлетворять уравнению (40). Пусть матрица A вещественна, т. е. $A = \bar{A}$, $\bar{S} = S = BLB^{-1}$, где L — диагональная матрица. Тогда $\bar{S}^* = S^* = B^{-1*}LB^*$. Пусть $g(Y)$ — решение уравнения

$$\langle LY, \partial g/\partial Y\rangle = 0. \tag{50}$$

Тогда решения уравнений (40) и (46) суть

$$f(X) = g(B^{-1}X) \text{ и } h(X) = g(B^*X). \tag{51}$$

Пример 7. Пусть $m = 1$, $L = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $M = 0$ (ср. пример 4), т. е. $A = S = \begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Все решения уравнения (50) имеют вид $g(Y) = \alpha(y_1y_2)$. Согласно (51) решения уравнений (40) и (46) суть

$$f(X) = \alpha_1((x_1 - x_2)x_2) \text{ и } h(X) = \alpha_2(x_1(x_1 + x_2)).$$

Сравнивая их на координатных осях, видим, что они совпадают только при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Следовательно, нормальная форма Белицкого подобна резонансной нормальной форме только в том случае, когда она линейна.

Основные результаты анонсированы в [18].

Институт прикладной математики АН СССР им. М. В. Келдыша

Поступило 20.02.89

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Брюно А. Д. Нормальная форма дифференциальных уравнений // ДАН СССР. 1964. Т. 157, № 4. С. 1276—1279.
[2] Брюно А. Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979.
[3] Брюно А. Д. Нормальная форма вещественных дифференциальных уравнений // Математические заметки. 1975. Т. 18, вып. 2. С. 227—241.
[4] Шевалле К. Теория групп Ли. Т. II. М.: ИЛ, 1958.
[5] Борель А. Линейные алгебраические группы. М.: Мир, 1972.
[6] Винберг Э. Б., Онищик А. Л. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. М.: Наука, 1988.
[7] Попов В. Л. Жордана разложение. 2 // Математическая энциклопедия. Т. 2. М.: Сов. энциклопедия, 1979. С. 421—423.
[8] Стрижак Т. Г. Методы нормальных форм в дифференциальных уравнениях / Препринт ИЭД АН УССР, № 357. Киев, 1983.
[9] Стрижак Т. Г. Асимптотический метод нормализации. Киев: Вища шк., 1984.
[10] Белицкий Г. Р. О нормальных формах локальных отображений // УМН. 1975. Т. 30, № 1. С. 223.
[11] Белицкий Г. Р. Нормальные формы относительно фильтрующегося действия группы // Тр. ММО. Т. 40. М.: Изд-во МГУ, 1979. С. 3—46.
[12] Белицкий Г. Р. Нормальные формы, инварианты и локальные отображения. Киев: Наук. Думка, 1979.
[13] Паламодов В. П. Деформации многообразий Хопфа и теорема Пуанкаре — Дюляка // Функцион. анализ и его прил. 1983. Т. 17, № 4. С. 7—16.

[14] Садовский А. П. Нормальные формы систем дифференциальных уравнений с ненулевой линейной частью // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 5. С. 827—832.
[15] Арнольд В. И., Ильяшенко Ю. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения // Современные проблемы математики. Итоги науки и техники. Т. 1. М.: ВИНИТИ, 1985. С. 7—149.
[16] Cushman R., Sanders J. A. Nilpotent normal forms and representation theory of sl(2, R) // Multi-parameter Bifurcation Theory // Contemporary Math. 56/Ed. M. Golubitsky and J. Gukenheimer. Providence: Amer. Math. Soc., 1986. P. 117—126.
[17] Брюно А. Д. Нормальная форма системы Гамильтона // УМН. 1988. Т. 43, № 1. С. 23—56.
[18] Брюно А. Д. О системе, подобной нормальной форме // Всесоюзная конференция «Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики». Тезисы докладов. Ч. I. Тернополь, 1989. С. 74—75.