А. Г. Школьник, Цилиндр Шварца,
Матем. просв., 1936, выпуск 7, 37–41

https://www.mathnet.ru/mp633

Можно положить

$$u = \sin^{\frac{2}{3}} t, \quad v = \cos^{\frac{2}{3}} t.$$

Тогда

$$x = 3a \sin^{\frac{4}{3}} t \cos^{\frac{2}{3}} t, \qquad y' = 3a \sin^{\frac{2}{3}} t \cos^{\frac{4}{3}} t,$$

$$\frac{dx}{dt} = a\left(4 \sin^{\frac{1}{3}} t \cos^{\frac{5}{3}} t - 2 \sin^{\frac{7}{3}} t \cos^{-\frac{1}{3}} t\right),$$

$$y = 6a^2 \int (2 \sin t \cos^3 t - \sin^3 t \cos t)\, dt =$$

$$= -\frac{3}{2} a^2 (2 \cos^4 t + \sin^4 t) + C.$$

ЦИЛИНДР ШВАРЦА

(К вопросу о вычислении площадей кривых поверхностей)

А. Г. Школьник (Москва)

Как известно, в интегральном исчислении при выводе формулы для вычисления площади кривой поверхности мы рассматриваем ее как предел суммы площадок касательных плоскостей, проведенных в точках поверхности, а не пользуемся вписанными многогранниками, как это казалось бы естественным по аналогии с предшествующими выводами (например, длину дуги мы находим как предел периметра произвольным образом вписанной в дугу ломаной линии при неограниченном увеличении числа ее сторон). Причина этого заключается в том, что площадь вписанного в поверхность произвольным образом многогранника при неограниченном возрастании числа его граней (и неограниченном уменьшении их диаметра) может, вообще говоря, не стремиться ни к какому пределу. Примером служит так называемый цилиндр Шварца (H. A. Schwarz, 1843—1921)[1].

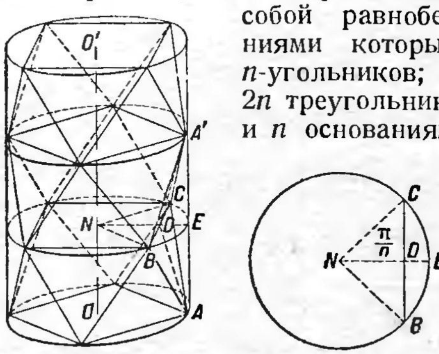
I

Возьмем часть прямого цилиндра радиуса R и высоты H (фиг. 1) и попытаемся вычислить площадь боковой поверхности (равную $2\pi RH$), рассматривая ее как предел площади боковой поверхности многогранника, который мы впишем в цилиндр нижеследующим образом. Равноотстоящими плоскостями, перпендикулярными оси цилиндра, делим его на m частей (на чертеже $m = 3$) и в каждую из получившихся в пересечении $m + 1$ окружностей вписываем правильный n-угольник (на чертеже $n = 4$) таким образом, чтобы вершины каждого многоугольника находились над серединами сторон лежащего под (и над) ним многоугольника (точнее: в плоскости, перпендикулярной стороне многоугольника и делящей ее пополам, так что образующая цилиндра, проходящая через вершину многоугольника, делит пополам дугу, стягивающую сторону лежащего ниже многоугольника).

---

[1]) См. H. A. Schwarz, Sur une définition erronée de l'aire d'une surface courbe, Ges. Math. Abh., т. II, стр. 309—311.

Вершины многоугольников соединяем отрезками с концами лежащих под ними сторон. В результате получаем искомый многогранник, боковые грани которого представляют равные между собой равнобедренные треугольники, основаниями которых служат стороны вписанных n-угольников; всех граней $2mn$ (m поясов по $2n$ треугольников в каждом n основаниями вниз и n основаниями вверх).



Фиг. 1.

Площадь боковой поверхности многогранника обозначим S_{mn} и вычислим ее. Найдем сначала площадь одной какой-либо грани, например, треугольника ABC. Пусть AD — высота этого треугольника. Тогда

$$\text{площ. } ABC = \frac{BC \cdot AD}{2}.$$

Вычислим BC:

$$BC = 2DC = 2NC \sin DNC = 2NC \sin \frac{BNC}{2} = 2R \sin \frac{\pi}{n}.$$

AD найдем из прямоугольного треугольника AED:

$$AD = \sqrt{AE^2 + DE^2}.$$

$AE = \frac{H}{m}$. Находим DE:

$$DE = NE - ND = R - R\cos\frac{\pi}{n} = R\left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right) = 2R\sin^2\frac{\pi}{2n}.$$

Таким образом

$$AD = \sqrt{\frac{H^2}{m^2} + 4R^2\sin^4\frac{\pi}{2n}} = \frac{1}{m}\sqrt{H^2 + 4R^2m^2\sin^4\frac{\pi}{2n}}.$$

Теперь находим площадь нашей грани:

$$\text{площ. } ABC = R\sin\frac{\pi}{n}\cdot\frac{1}{m}\sqrt{H^2 + 4R^2m^2\sin^4\frac{\pi}{2n}}.$$

Всю площадь боковой поверхности многогранника S_{mn} получим умножением на $2mn$:

$$S_{mn} = 2Rn\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{H^2 + 4R^2m^2\sin^4\frac{\pi}{2n}}.$$

Будем теперь искать предел найденного выражения при неограниченном возрастании m и n. При этом отрезок DE, как видно из чертежа и из полученного для него выражения, стремится к нулю. Стремится к нулю также BC. Точки поверхности многогранника, следовательно, неограниченно приближаются к поверхности цилиндра. Казалось бы, что при этих условиях и площадь поверхности многогранника должна неограниченно приближаться к площади поверхности цилиндра. Тем не менее, мы увидим, что это, вообще говоря, не так.

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}} S_{mn} = \lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}} 2Rn\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{H^2+4R^2m^2\sin^4\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}} 2Rn\sin\frac{\pi}{n}\cdot\lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}}\sqrt{H^2+4R^2m^2\sin^4\frac{\pi}{2n}} =$$

$$= 2R\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}}\sqrt{H^2+4R^2\cdot\lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}}\frac{\sin^4\frac{\pi}{2n}}{\frac{1}{m^2}}}.$$

При нахождении пределов отношений заменяем бесконечно малые синусы эквивалентными им дугами $\frac{\pi}{n}$ и $\frac{\pi}{2n}$.

Получаем:

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}} S_{mn} = 2R\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}}\cdot\sqrt{H^2+4R^2\cdot\lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}}\frac{\left(\frac{\pi}{2n}\right)^4}{\frac{1}{m^2}}}.$$

Окончательно упрощая, получаем:

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}} S_{mn} = 2\pi R\sqrt{H^2+\frac{R^2\pi^4}{4}\cdot\Big(\lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}}\frac{m}{n^2}\Big)^2}. \qquad (1)$$

Таким образом предел S_{mn} будет существовать, если будет существовать $\lim\frac{m}{n^2}$. Но нетрудно показать, что в общем случае предела величины $\alpha_{mn}=\frac{m}{n^2}$ не существует. Хотя и существуют в отдельности простые предельные переходы по каждому из индексов m и n, но двойного предела здесь нет. Действительно, хотя для какого угодно постоянного m существует предел при $n\to\infty$ (обозначим его a_m), $a_m=\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_{mn}=0$, и затем существует $\lim\limits_{m\to\infty}a_m=0$, но отсюда еще нельзя заключить, что и двойной предел существует и тоже равен 0, ибо α_{mn} при $n\to\infty$ не стремится к нулю равномерно относительно m. В самом деле, стоит только положить хотя бы $m=n^2$, и $\lim\alpha_{mn}$ будет иной, будет равен 1. Таким образом не существует двойного предела $\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\n\to\infty}}\frac{m}{n^2}$, а следовательно, не существует и предела S_{mn}. Площадь боковой поверхности нашего многогранника при неограниченном возрастании числа его граней (и одновременном неограниченном уменьшении их диаметра) не стремится ни к какому пределу.

II

Рассмотрим теперь подробнее поведение S_{mn} при возрастании m и n. Хотя и не существует, как мы показали, предела S_{mn} при произвольном характере неограниченного возрастания m и n, все же S_{mn} может стремиться к определенным пределам при специальном выборе m и n. Посмотрим, какие здесь могут представиться случаи:

$$1)\quad \lim \frac{m}{n^2} = 0.$$

Этот случай будет иметь место, если m возрастает медленнее чем n^2; например, m равно или пропорционально n, $m = kn$. В этом случае, как видно из формулы (1), $\lim S_{mn} = 2\pi RH$. Площадь поверхности многогранника имеет в данном случае пределом площадь поверхности цилиндра.

$$2)\quad \lim \frac{m}{n^2} = c = \text{const}. \qquad (c \neq 0).$$

Это будет иметь место, если m растет с той же скоростью, что и n^2, $m = kn^2$. В этом случае существует конечный предел S_{mn}, но предел этот не равен $2\pi RH$. Например, при $m = n^2$

$$\lim S_{mn} = 2\pi R \sqrt{H^2 + \frac{1}{4} R^2\pi^4}.$$

Площадь поверхности многогранника имеет предел, но предел этот больше площади поверхности цилиндра.

$$3)\quad \lim \frac{m}{n^2} = \infty.$$

Этот случай представится при возрастании m более быстром чем n^2, например, при $m = n^3$. В этом случае, очевидно, и $\lim S_{mn} = \infty$.

Площадь поверхности нашего многогранника неограниченно возрастает.

Как все это представить себе геометрически? Для этого проследим изменение угла, положим, ADA' между двумя находящимися одна над другой гранями многогранников ABC и $A'BC$ (см. чертеж). Возьмем половину этого угла ADE. Из прямоугольного треугольника AED

$$\operatorname{tg} ADE = \frac{AE}{ED} = \frac{\frac{H}{m}}{2R\sin^2\frac{\pi}{2n}} = \frac{H}{2R}\cdot\frac{\frac{1}{m}}{\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^2}.$$

Переходим далее к пределу:

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} \operatorname{tg} ADE = \frac{H}{2R}\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} \frac{\frac{1}{m}}{\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^2} = \frac{H}{2R}\cdot\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} \frac{\frac{1}{m}}{\frac{\pi^2}{4n^2}} =$$

$$= \frac{2H}{R\pi^2}\cdot\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} \frac{\frac{1}{m}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{2H}{R\pi^2}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}\left(\frac{m}{n^2}\right)}. \qquad (2)$$

Итак, величина $\lim \operatorname{tg} ADE$ зависит от $\lim \frac{m}{n^2}$. В общем случае такого предела, как мы знаем, не существует. По отношению же к рассмотренным нами выше случаям положение будет следующее:

1. Если $\lim \frac{m}{n^2} = 0$, то, как видно из (2), $\operatorname{tg} ADE \to \infty$, и, следовательно, $\angle ADE \to \frac{\pi}{2}$ и $\angle ADA' \to \pi$ или $180°$. В этом случае находящиеся одна над другой грани многогранника стремятся развернуть образуемый ими двугранный угол и слиться с поверхностью цилиндра. В рассматриваемом случае, как мы видели, пределом площади поверхности многогранника служит площадь поверхности цилиндра.

2. При $\lim \frac{m}{n^2} = c = \text{const.}\ (c \neq 0)$, $\operatorname{tg} ADE \to \text{const.}\ (\neq 0)$. В этом случае углы ADE и ADA' стремятся к некоторой постоянной, отличной от нуля и π. Характер предельного перехода в рассматриваемом случае таков, что грани многогранника стремятся остаться под некоторым постоянным углом друг к другу. Как мы видели выше, в этом случае площадь поверхности многогранника имеет предел, больший площади поверхности цилиндра.

3. В последнем случае, когда $\lim \frac{m}{n^2} = \infty$, $\operatorname{tg} ADE \to 0$. В этом случае углы ADE и ADA' стремятся к нулю. В стремлении к пределу грани многогранника, бесконечно умаляясь по своей величине, неограниченно приближаются своими плоскостями одна к другой, вместе с тем стремясь стать перпендикулярными к поверхности цилиндра. При таком характере изменения многогранника площадь поверхности его, как было показано выше, неограниченно возрастает.

Проведенное рассмотрение изменения угла между гранями дает наглядное представление о характере деформации поверхности многогранника в процессе стремления ее к пределу, но до достижения ею этого предела. В пределе, однако, собственно ни о каком угле между гранями говорить нельзя, ибо самые грани тогда уже не будут существовать.

Таков геометрический смысл рассмотренных выше различных, зависящих от характера изменения $\frac{m}{n^2}$, случаев стремления к пределу поверхности многогранника. Тем не менее, несмотря на все существующее различие в характере предельных переходов и различную для различных случаев величину предела площади поверхности многогранника, геометрическим пределом самой поверхности многогранника во всех случаех является поверхность цилиндра, так как все точки поверхности многогранника неограниченно к ней приближаются. Таким образом, несмотря на то, что пределом поверхности нашего многогранника служит поверхность цилиндра, площадь поверхности его имеет (во втором и третьем случаях) предел, отличный от площади поверхности цилиндра. Мы имеем, таким образом, здесь пример того, когда *предел площади поверхности не равен площади предела.*