А. С. Антипин, Б. А. Будак, Ф. П. Васильев, Методы решения задач равновесного программирования,
Дифференц. уравнения, 2005, том 41, номер 1, 3–11

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 1, с. 3–11

ОБЗОРНЫЕ СТАТЬИ

УДК 517.988.68: 519.85

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ РАВНОВЕСНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

© 2005 г. А. С. Антипин, Б. А. Будак, Ф. П. Васильев

1. Десятилетия интенсивного развития идей оптимизации привели к тому, что задачи такого типа стали привычным инструментом математического моделирования ситуаций принятия решений одним лицом. Однако все чаще и чаще стали встречаться ситуации со многими участниками, интересы которых противоречивы, и решением такой ситуации является компромисс, который, вообще говоря, не может быть оптимальным для всех участников одновременно. Математическое моделирование такой ситуации приводит к необходимости рассмотрения систем задач оптимизации или, в более общем контексте, экстремальных отображений, которые порождают задачи поиска неподвижных точек этих отображений. В других контекстах эти точки также известны как равновесные решения, например, применительно к теории игр это фактически есть равновесия по Нэшу.

В связи с этим возникает необходимость развития теории методов решения равновесных задач, в определенном смысле обобщающей теорию методов решения задач оптимизации.

Базовые подходы методов оптимизации – это прежде всего идея проксимального, градиентного и ньютоновского методов, а также идея метода штрафных функций. Авторами этой статьи была предпринята попытка перенести эти фундаментальные идеи оптимизации на вычисление равновесных решений. В настоящей работе предлагается обзор разработанных коллективом авторов методов решения задач равновесного программирования.

Основную задачу равновесного программирования можно сформулировать следующим образом. Пусть имеется некоторая функция $\Phi(v,w)$, $(v,w)\in W\times W$, где W – заданное множество из пространства E^n. Требуется найти точку $v_*\in W$, удовлетворяющую неравенству

$$\Phi(v_*,v_*)\le\Phi(v_*,w)\quad\forall w\in W. \tag{1}$$

Такую точку v_* называют неподвижной точкой или равновесной точкой задачи (1). Многие важные проблемы исследования операций, вычислительной математики и математической экономики могут быть сведены к задаче (1). Если функция $\Phi(v,w)$ не зависит от переменной v, то задача (1) превращается в обычную задачу минимизации.

К настоящему времени достаточно хорошо изучена проблема существования точек равновесия, равносильная проблеме существования неподвижных точек $v\in W(v)$ экстремального отображения $W(v)$ функции $\Phi(v,w)$ на W, определяемого из условия

$$\Phi(v,W(v))=\min_{w\in W}\Phi(v,w),\quad v\in W,\quad W(v)\in W.$$

Экстремальное отображение, как правило, является многозначным и при доказательстве существования неподвижной точки обычно пользуются теоремами Какутани, Fan Ky, Oettli, обобщающими классические теоремы о неподвижных точках для многозначных отображений.

Что касается конструктивных методов поиска точек равновесия, пригодных для использования на вычислительной технике, то здесь значительные результаты до недавнего времени были получены лишь для отдельных классов задач (1) таких, как задачи оптимизации, седловые задачи, вариационные неравенства. Однако эти методы разрабатывались и исследовались при значительных ограничениях на функцию $\Phi(v,w)$ (требования типа выпуклости по переменной w и вогнутости по переменной v, нулевой суммы игры, сильной монотонности оператора в вариационных неравенствах и т.п.). Между тем многие практически важные задачи математической экономики, теории игр не удовлетворяют этим ограничениям и ранее разработанные методы к этим задачам не вполне применимы. Поэтому необходимо было разрабатывать методы решения достаточно общих задач вида (1).

При разработке методов решения задачи (1) следовало еще учитывать, что эта задача, вообще говоря, неустойчива к возмущениям функции $\Phi(v,w)$ и множества W, и для ее решения нужно использовать специальные методы, называемые методами регуляризации.

Пример. Пусть $\Phi(v,w)=vw$, $W=\{w: w\in E^1,\ |w|\le 1\}$. При таких условиях задача (1) имеет единственное решение $v_*=(0,0)$. Допустим, что вместо точной функции $\Phi(v,w)$ известно ее приближение $\Phi_\delta(v,w)=vw-\delta w^2$, где $\delta>0$ – параметр погрешности. Тогда вместо задачи (1) кажется естественным рассмотреть задачу: найти точку v_δ из условий $v_\delta\in W$, $\Phi(v_\delta,v_\delta)\le\Phi(v_\delta,w)$ $\forall w\in W$, надеясь, что такая точка при малых $\delta>0$ будет близка к решению исходной задачи. Однако нетрудно видеть, что возмущенная задача не имеет решения при любых сколь угодно малых $\delta>0$. Это означает, что рассматриваемая задача заведомо неустойчива, и для поиска ее решения такая наивно построенная возмущенная задача непригодна.

В рассмотренном примере множество W предполагается известным точно. Ситуация еще более ухудшится, когда множество W также задано неточно. Так, например, если множество W имеет вид

$$W=\{w\in W_0 : g_i(w)\le 0,\ i=1,\dots,m,\ g_i(w)=0,\ i=m+1,\dots,s\},$$

где W_0 – точно заданное множество из E^n (возможно, $W_0=E^n$), $g_i(w)$ – некоторые функции на W_0, то небольшие возмущения функций $g_i(w)$ могут привести к большим изменениям множества W, вплоть до того, что возмущенное множество может стать пустым.

2. Развитие идей оптимизации на равновесные задачи было начато А.С. Антипиным. Одной из проблем, возникшей при исследованиях, была необходимость некой трансформации свойства монотонности градиента целевой функции, играющего определяющую роль в доказательствах сходимости различных методов оптимизации. Эта проблема была решена с помощью введения свойства кососимметричности функции $\Phi(v,w)$ на множестве W:

$$\Phi(v,v)-\Phi(v,w)-\Phi(w,v)+\Phi(w,w)\ge 0 \quad \forall v,w\in W. \tag{2}$$

Сначала для решения задачи (1) с точно заданными данными им были предложены так называемые управляемые методы проекции градиента или экстраградиентные методы, основанные на следующей идее: известно, что неподвижная точка v_* задачи (1) является одновременно решением как вариационного неравенства $\langle\nabla_w\Phi(v_*,v_*),w-v_*\rangle\ge 0$ $\forall w\in W$, так и операторного уравнения $v_*=\pi_W(v_*-\gamma\nabla_w\Phi(v_*,v_*))$, где $\pi_W(\dots)$ – оператор проектирования некоторого вектора на множество W. Оба соотношения эквивалентны и являются необходимым условием минимума функции $\Phi(v_*,w)$ на множестве W.

Преобразование $\pi_W(v-\gamma\nabla_w\Phi(v,v))-v$ можно трактовать как векторное поле скоростей, которое получается, если каждому вектору v поставить в соответствие образ этого преобразования. При этом точке v_* будет соответствовать нуль, т.е. неподвижная точка имеет нулевую скорость. Во многих случаях, а именно в случае градиентных полей, порожденных задачами оптимизации, векторы поля направлены к неподвижной точке v_*, т.е. к точке с нулевой скоростью. Если приближаться к этой точке по некоторой траектории, то длины векторов скоростей будут уменьшаться до нуля. Поэтому ожидается, что если из некоторой стартовой точки v_0 провести траекторию $v(t)$ так, чтобы касательный вектор этой траектории совпадал с вектором поля в каждой точке этой траектории, то со временем траектория попадет в сколь угодно малую окрестность неподвижной точки. Эту ситуацию можно описать с помощью дифференциального уравнения

$$\dot v+v=\pi_W(v-\gamma\nabla_w\Phi(v,v)),\quad v(0)=v_0,$$

правая часть которого удовлетворяет всем условиям теоремы существования и единственности, следовательно, при любых v_0 и всех $t\ge 0$ существует траектория $v(t)$, которая сходится в случае задачи оптимизации к оптимальному решению. В этом случае целевая функция выступает в роли потенциала (как правило, выпуклого), который обеспечивает сходимость траектории к решению задачи. К сожалению, в общем случае ситуации равновесия потенциальность отсутствует, что приводит к тому, что траектория дифференциального уравнения не сходится к решению задачи. Для обеспечения сходимости траектории рассматривается управляемая с помощью обратных связей дифференциальная система. Вводимые обратные связи компенсируют отсутствующее свойство потенциальности (потенциальной энергии). Можно выделить две наиболее простые обратные связи: управление по производной $u = \dot{v}$, порождающее неявное дифференциальное уравнение, и управление по невязке $u = \pi_W(v - \nabla_w \Phi(v, v)) - v$. Применение этой идеи приводит нас к такому методу [1]:

$$\dot{v}(t) + v(t) = \pi_W(v(t) - \gamma \nabla_w \Phi(u(t), u(t))), \quad u(t) = \pi_W(v(t) - \gamma \nabla_w \Phi(v(t), v(t))), \quad v(0) = v_0. \quad (3)$$

Здесь нахождение точки $u(t)$ можно толковать как прогноз, т.е. значение градиента функции $\Phi(v, w)$ по переменной w в основном уравнении метода берется не в текущей точке $v(t)$, а в некой спрогнозированной точке $u(t)$.

Одним из недостатков этого метода является то, что на каждом шаге приходится вычислять проекции точек на некоторое множество W, что, вообще говоря, является трудоемкой задачей, требующей большого количества вычислений. Чтобы избежать этого, для задачи равновесного программирования, поставленной в виде

$$\Phi(v_*, v_*) \le \Phi(v_*, w) \quad \forall w \in W, \quad (4)$$

$$W = \{w \in W_0 \, : \, g_i(w) \le 0, \ i = 1, \dots, l\}, \quad (5)$$

был разработан так называемый метод линеаризации прогнозного типа [2], основанный на следующей идее: на каждом шаге исходное множество W заменяется многогранным множеством $S(v)$, нахождение проекции на которое уже является задачей квадратичного программирования, решаемой относительно просто.

Сам метод имеет следующий вид:

$$\begin{gathered} \dot{v}(t) + v(t) = \pi_{S(v(t))}[v(t) - \gamma \nabla_w \Phi(u(t), u(t))], \\ u(t) = \pi_{S(v(t))}[v(t) - \gamma \nabla_w \Phi(v(t), v(t))], \quad v(0) = v_0, \quad t \ge 0, \\ S(v(t)) = \{w \in W_0 \mid \langle g_i'(v(t)), w - v(t) \rangle + g_i(v(t)) \le 0, \ i = 1, \dots, l\}. \end{gathered} \quad (6)$$

Однако практическое применение этих методов затруднено тем, что зачастую целевая функция задается не аналитически, а в виде набора значений, поэтому требовать от нее какой-либо гладкости трудно. Чтобы избавиться от этого условия, был предложен и изучен так называемый проксимальный метод прогнозного типа

$$\begin{gathered} \dot{v}(t) + v(t) = \operatorname{Arg} \min_{w \in W} \{2^{-1} \|w - v(t)\| + \gamma \Phi(u(t), w)\}, \\ u(t) = \operatorname{Arg} \min_{w \in W} \{2^{-1} \|w - v(t)\| + \gamma(t) \Phi(v(t), w)\}, \quad v(0) = v_0, \quad t \ge 0. \end{gathered} \quad (7)$$

В условия сходимости этого метода уже не входит требование гладкости функции $\Phi(v, w)$. Отметим, что если она все-таки дифференцируема по переменной w, то указанный метод можно переписать в альтернативной форме (фактически он превращается в неявный экстраградиентный метод):

$$\dot{v}(t) + v(t) = \pi_W[v(t) - \gamma \Phi(u(t), \dot{v}(t) + v(t))], \quad u(t) = \pi_W[v(t) - \gamma \Phi(v(t), u(t))], \quad v(0) = v_0, \quad t \ge 0.$$

Далее, теоретические и численные исследования подтвердили, что такие методы медленно сходятся в тех случаях, когда поверхности уровня функции $\Phi(v, v)$ сильно вытянуты и эта функция переменной v имеет так называемый овражный характер. Геометрически это можно интерпретировать так: ее поверхности уровня похожи на сильно вытянутые эллипсоиды.

Один из способов ускорения сходимости заключается в выборе такой подходящей замены переменных, чтобы в пространстве новых переменных поверхности уровня стали бы близки к сферам. Таким образом появляется новый параметр метода – симметричная положительно-определенная матрица или, если замена переменных делается в текущий момент времени, семейство таких матриц. С помощью симметричной положительно-определенной матрицы в пространстве можно задать новое скалярное произведение и соответствующую ему метрику. В литературе методы такого типа называются методами с переменной метрикой или методами с растяжением пространства. То, что на этом пути можно добиться существенного улучшения сходимости, подтверждает, например, хорошо известный метод Ньютона для решения задач оптимизации. Однако его применяют в тех случаях, когда вычисление матрицы вторых производных целевой функции не представляет трудностей. Поэтому существует ряд так называемых квазиньютоновских методов, в которых матрица-параметр метода выбирается близкой к матрице вторых производных. Также для решения задач оптимизации были разработаны методы с переменной метрикой, не требующие вычисления матрицы вторых производных или ее аппроксимаций.

На основании этой идеи Б.А. Будаком для решения задач равновесного программирования был предложен и исследован ряд методов, обобщающих методы, приведенные выше. Первым по порядку идет экстраградиентный метод с переменной метрикой, имеющий следующий вид [3]:

$$\begin{gathered}\dot v(t)+v(t)=\pi_W^{G(v(t))}[v(t)-\gamma(t)G^{-1}(v(t))\nabla_w\Phi(u(t),u(t))],\\ u(t)=\pi_W^{G(v(t))}[v(t)-\gamma(t)G^{-1}(v(t))\nabla_w\Phi(v(t),v(t))],\quad v(0)=v_0,\quad t\ge 0,\end{gathered}\tag{8}$$

где $\pi_W^{G(v(t))}[\dots]$ – так называемая G-проекция точки на множество W [4, с. 308], v_0 – любая фиксированная точка из E^n, $\nabla_w\Phi(v,w)$ – градиент функции $\Phi(v,w)$ по переменной w, $\gamma(t)\ge 0$ – параметр метода; $G(v)$ для каждого v – заданная симметричная положительно-определенная матрица. Заметим, что если $G(v)\equiv I$ – единичная матрица, то метод (8) превращается в метод (3). Приведем условия, обеспечивающие сходимость траектории этого метода ко множеству решений задачи (1).

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $W\subseteq E^n$ – выпуклое замкнутое множество, множество решений задачи (1) W^* непусто;

2) функция $\Phi(v,w)$ выпукла, дифференцируема по w на E^n при любом v из E^n; удовлетворяет условию кососимметричности (2) на W; сужение ее частного градиента по w на диагональ множества $E^n\times E^n$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|\nabla_w\Phi(u,u)-\nabla_w\Phi(v,v)\|\le L_w\|u-v\|\quad \forall u,v\in E^n;$$

3) $G(v)$ – симметричная положительно-определенная матрица при любом v из E^n; существуют сильно выпуклая дважды дифференцируемая функция $\Psi(v)$ и положительные константы m, M, $m\le M$, такие, что $G(v)\equiv\Psi''(v)$; $m\|w\|^2\le\langle G(v)w,w\rangle\le M\|w\|^2$ $\forall v,w\in E^n$;

4) $\gamma(t)>0$; $\lim\limits_{t\to\infty}\gamma(t)=\gamma_0$; $0<\gamma_0<m/(3L_w)$.

Тогда существует такая точка v' из множества решений W^* задачи (1), что

$$\lim_{t\to\infty}\|v(t)-v'\|=0;\quad \lim_{t\to\infty}\|\dot v(t)\|=0.$$

Далее применение идеи введения переменной метрики позволило получить и аналоги метода линеаризации и проксимального метода. Приведем их формулировки вместе с теоремами, указывающими условия сходимости траекторий этих методов. Начнем с метода линеаризации с переменной метрикой [5], который применяется для решения задачи равновесного программирования, поставленной в форме (4), (5):

$$\dot v(t)+v(t)=\pi_{S(v(t))}^{G(v(t))}[v(t)-\gamma(t)G^{-1}(v(t))\nabla_w\Phi(u(t),u(t))],$$
$$u(t)=\pi_{S(v(t))}^{G(v(t))}[v(t)-\gamma(t)G^{-1}(v(t))\nabla_w\Phi(v(t),v(t))],\quad v(0)=v_0,\quad t\ge 0, \tag{9}$$
$$S(v(t))=\{w\in W_0\mid \langle g_i'(v(t)),w-v(t)\rangle+g_i(v(t))\le 0,\ i=1,\dots,l\}.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $W_0\subseteq E^n$ – выпуклое замкнутое множество, множество решений задачи (4), (5) W^* непусто, множество W является регулярным, т.е. существует $w_c\in W$: $g_i(w_c)<0$, $i=1,\dots,l$;

2) функция $\Phi(v,w)$ выпукла, дифференцируема по w на E^n при любом v из E^n; удовлетворяет условию кососимметричности (2) на W_0; сужение ее частного градиента по второй переменной на диагональ множества $E^n\times E^n$ удовлетворяет условию Липшица $\|\nabla_w\Phi(u,u)-\nabla_w\Phi(v,v)\|\le L_0\|u-v\|$ $\forall u,v\in E^n$; функции $g_i(w)$ выпуклы, дифференцируемы по w на E^n, их градиенты удовлетворяют условию Липшица $\|g_i'(u)-g_i'(v)\|\le L_i\|u-v\|$ $\forall u,v\in E^n$, $i=1,\dots,l$;

3) условие 3) теоремы 1;

4) параметр $\gamma(t)$ удовлетворяет условиям

$$\gamma_{\max}\ge\gamma(t)>0;\quad \lim_{t\to\infty}\gamma(t)=\gamma_0;\quad 0<\gamma_0<m\Big/\left(6L_0+2\sum_{i=1}^{s}\lambda_i^*L_i\right),$$

где $v^*\in W^*$, $\lambda^*=(\lambda_1^*,\dots,\lambda_l^*)\ge 0$, (v^*,λ^*) – седловая точка функции Лагранжа задачи (4), (5);

5) решение системы (9) существует и единственно для любого $t\ge 0$.

Тогда существует такая точка v' из множества решений W^* задачи (4), (5), что $\lim\limits_{t\to\infty}\|v(t)-v'\|=0$; $\lim\limits_{t\to\infty}\|\dot v(t)\|=0$.

Обзор непрерывных методов с переменной метрикой закончим проксимальным методом

$$\dot v(t)+v(t)=\operatorname{Arg}\min_{w\in W}\{2^{-1}\|w-v(t)\|^2_{G((v(t))}+\gamma(t)\Phi(u(t),w)\},$$
$$u(t)=\operatorname{Arg}\min_{w\in W}\{2^{-1}\|w-v(t)\|^2_{G(v(t))}+\gamma(t)\Phi(v(t),w)\},\quad v(0)=v_0,\quad t\ge 0. \tag{10}$$

Теорема 3. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) условие 1) теоремы 1;

2) функция $\Phi(v,w)$ непрерывна по совокупности переменных (v,w) на E^n, выпукла по w на W при любом v из E^n, удовлетворяет условию кососимметричности (2) на W и условию Липшица

$$|(\Phi(v+h,w+k)-\Phi(v+h,w))-(\Phi(v,w+k)-\Phi(v,w))|\le L\|h\|\|k\|\quad \forall v,v+h\in E^n,\quad w,w+k\in W;$$

3) условие 3) теоремы 1;

4) параметр $\gamma(t)$ удовлетворяет условиям $\gamma(t)>0$; $\lim\limits_{t\to\infty}\gamma(t)=\gamma_0$; $0<\gamma_0<m/(3L)$;

5) решение $v(t)$ системы (10) существует и единственно при всех $t\ge 0$.

Тогда справедливо утверждение теоремы 1.

Отметим, что теоремы о сходимости методов без переменной метрики получаются из теорем о сходимости методов с переменной метрикой, если формально положить $G(v)\equiv I$.

Также коллективом авторов для задач с точно заданными данными был разработан ряд других методов, основанных на перечисленных идеях, в том числе дискретные методы, а также методы более высоких порядков. Подробнее с ними можно ознакомиться в работах [7–16].

3. Помимо упомянутых выше методов в последнее десятилетие разработаны и исследованы методы решения неустойчивых задач равновесного программирования. Эти методы идейно восходят к методам регуляризации, которые ранее разрабатывались применительно к различным классам обратных задач, к операторным уравнениям, к задачам оптимизации [17]; применительно к задачам оптимизации эти методы подробно изложены в [4]. На задачи (4), (5) с неточными входными данными А.С. Антипиным и Ф.П. Васильевым были обобщены три основных общих метода регуляризации – методы стабилизации, невязки, квазирешений [21, 22]. Эти обобщения основывались на сочетании идей регуляризации либо с методом штрафных функций, либо с методом расширения множества. Суть указанных методов заключалась в сведении исходной задачи к устойчивым вспомогательным равновесным задачам и доказывалось, что решения вспомогательных задач сходятся ко множеству решений исходной задачи. Однако в [18–22] конкретные методы решения вспомогательных равновесных задач не рассматривались.

Приведем несколько методов, основанных на сочетаниях метода стабилизации с экстраградиентными методами, методами линеаризации и проксимальными методами. Эти методы дают решение задачи равновесного программирования, поставленной в виде

$$\begin{gathered} v_* \in W = \{w \in W_0 \mid g_i(w) \le 0,\ i = 1,\dots,l;\ g_i(w) = 0,\ i = l+1,\dots,s\}; \\ \Phi(v_*, v_*) \le \Phi(v_*, w) \quad \forall w \in W. \end{gathered} \tag{11}$$

Начнем с регуляризованного экстраградиентного метода с переменной метрикой [23]. Для учета ограничений типа равенств и неравенств в (11) используется простейшая штрафная функция

$$P(w) = \sum_{i=1}^{s} (g_i^+(w))^p, \quad p > 1, \quad w \in E^n, \tag{12}$$

где $g_i^+(w) = \max\{0; g_i(w)\}$ при $i = 1,\dots,l$; $g_i^+(w) = |g_i(w)|$ при $i = l+1,\dots,s$. Также вводится функция Тихонова

$$T(v, w) = \Phi(v, w) + A(t)P(w) + \alpha(t)\langle v, w\rangle, \quad v, w \in E^n, \tag{13}$$

где $A(t) > 0$, $\alpha(t) > 0$ – некоторые заданные функции. Тогда указанный метод примет вид

$$\begin{gathered} \dot v(t) + v(t) = \pi_{W_0}^{G(v(t))}[v(t) - \gamma(t)G^{-1}(v(t))\nabla_w T^\delta(u(t), u(t), t)], \\ u(t) = \pi_{W_0}^{G(v(t))}[v(t) - \gamma(t)G^{-1}(v(t))\nabla_w T^\delta(v(t), v(t), t)], \quad v(0) = v_0, \quad t \ge 0, \end{gathered} \tag{14}$$

где $\nabla_w T^\delta(v, w, t) = \nabla_w \Phi(v, w, t) + A(t)P'(w, t) + \alpha(t)v$ – приближение точного градиента функции Тихонова.

Теорема 4. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) W_0 – выпуклое замкнутое множество из E^n; множество W_* решений задачи (11) непусто; функция $\Phi(v, w)$ непрерывна по v на E^n при каждом w из E^n, выпукла и непрерывно дифференцируема по w на E^n при каждом v из E^n, удовлетворяет условию кососимметричности (2) на W_0, функции $g_i(w)$, $i = 1,\dots,l$, выпуклы и непрерывно дифференцируемы на E^n, функции $g_i(w)$, $i = l+1,\dots,s$, аффинны, т.е. $g_i(w) = \langle a_i, w\rangle - b_i$, $a_i \in E^n$, b_i – действительные числа;

2) существуют положительные постоянные η, c_i, $i = 1,\dots,s$, такие, что

$$\Phi(v_*, v_*) \le \Phi(v_*, w) + \sum_{i=1}^{s} c_i (g_i^+(w))^\eta \quad \forall w \in W_0,$$

где v_* – нормальное решение задачи (11), параметр p штрафной функции (12) удовлетворяет условиям $p > 1$, $p \ge \eta$;

3) сужение градиента $\nabla_w \Phi(v, w)$ на диагональ множества $E^n \times E^n$ и градиент $P'(w)$ удовлетворяют условию Липшица

$$\max\{\|\nabla_w \Phi(u, u) - \nabla_w \Phi(v, v)\|, \|P'(u) - P'(v)\|\} \le L\|u - v\| \quad \forall u, v \in E^n;$$

4) вместо точных значений градиентов $\nabla_w\Phi(v,w)$ *и* $P'(w)$ *известны их приближения* $\nabla_w\Phi(v,w,t)$ *и* $P'(w,t)$, *для которых выполнены условия*

$$\max\{\|\nabla_w\Phi(w,w,t)-\nabla_w\Phi(w,w)\|, \|P'(w,t)-P'(w)\|\} \le \delta(t)(1+\|w\|) \quad \forall w \in E^n, \tag{15}$$

5) условие 3) теоремы 1;

6) параметры $\alpha(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$, $A(t)$ *метода (14) таковы, что* $\alpha(t),\gamma(t),A(t) \in C^1[0;+\infty)$; $\delta(t) \in C[0;+\infty)$; $\alpha(t),\gamma(t),A(t) > 0$; $\delta(t) \ge 0$; $\alpha(t)$ *– выпуклая функция,* $\alpha'(t) \le 0$; $A(t)$ *– вогнутая функция,* $A'(t) \ge 0$; $\gamma'(t) \le 0$;

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\alpha(t)+\gamma(t)+\delta(t)+\frac{A(t)\delta(t)}{\alpha(t)}\right)=0; \quad \lim_{t\to+\infty} A(t)=+\infty;$$

$$\lim_{t\to+\infty} A(t)\gamma(t)=0; \quad \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{|\alpha'(t)|+A'(t)}{\alpha^2(t)\gamma(t)}+\frac{|\gamma'(t)|}{\alpha(t)\gamma^2(t)}\right)=0; \quad \lim_{t\to+\infty}\alpha(t)(A(t))^{\eta/(p-\eta)}=+\infty$$

(при $p=\eta$ *последнее равенство не нужно).*

Тогда

$$\lim_{t\to+\infty}\|v(t)-v_*\|=0; \quad \lim_{t\to+\infty}\|\dot v(t)\|=0, \tag{16}$$

где v_* *– нормальное решение задачи (11), причем сходимость в (16) равномерная относительно выбора* $\nabla_w\Phi(v,w,t)$ *и* $P'(w,t)$ *из (15).*

Следующим по порядку идет регуляризованный проксимальный метод

$$\dot v(t)+v(t)=\operatorname{Arg}\min_{w\in W_0}\{2^{-1}\|w-v(t)\|^2_{G((v(t))}+\gamma(t)(\Phi(u(t),w,t)+A(t)P(w,t)+\alpha(t)\langle u(t),w\rangle)\},$$

$$u(t)=\operatorname{Arg}\min_{w\in W_0}\{2^{-1}\|w-v(t)\|^2_{G(v(t))}+\gamma(t)(\Phi(v(t),w,t)+A(t)P(w,t)+\alpha(t)\langle v(t),w\rangle)\}, \tag{17}$$

$$v(0)=v_0, \quad t\ge 0,$$

где v_0 – любая фиксированная точка из E^n, $\alpha(t)$, $\gamma(t)$, $A(t)$ – параметры метода; $G(v)$ для каждого v – заданная симметричная положительно-определенная матрица, $\|x\|^2_{G(v(t))} = \langle G(v(t))x,x\rangle$.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия:*

1) условие 1) теоремы 4;

2) условие 2) теоремы 4;

3) функции $\Phi(v,w)$ *и* $P(w)$ *удовлетворяют условию Липшица по переменной* w *на множестве* W_0

$$|\Phi(v,w_1)-\Phi(v,w_2)| \le L\|w_1-w_2\| \quad \forall v\in E^n, \quad w_1,w_2\in W_0,$$

$$|P(w_1)-P(w_2)| \le L\|w_1-w_2\| \quad \forall w_1,w_2\in W_0;$$

4) вместо точных значений функций $\Phi(v,w)$ *и* $P(w)$ *известны их выпуклые, полунепрерывные снизу приближения* $\Phi(v,w,t)$, $P(w,t)$, *для которых выполнены условия*

$$\begin{gathered}|\Phi(v,w,t)-\Phi(v,w)| \le \delta(t)(1+\|v\|+\|w\|),\\ |P(w,t)-P(w)| \le \delta(t)(1+\|w\|) \quad \forall v,w\in E^n, \quad \forall t>0;\end{gathered} \tag{18}$$

5) условие 3) теоремы 1;

6) параметры $\alpha(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$, $A(t)$ *удовлетворяют условиям:* $\alpha(t),\gamma(t),A(t)\in C^1[0;+\infty)$; $\delta(t)\in C[0;+\infty)$; $\alpha(t),\gamma(t),A(t)>0$; $\delta(t)\ge 0$; $\alpha(t)$ *– выпуклая функция,* $\alpha'(t)\le 0$; $A(t)$ *– вогнутая функция,* $A'(t)\ge 0$;

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\alpha(t)+\gamma(t)+\delta(t)+\frac{\delta^2(t)A^2(t)}{\alpha(t)\gamma^{1/2}(t)}\right)=0;\quad \lim_{t\to+\infty}A(t)=+\infty;$$
$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\gamma^{1/2}(t)}{\alpha(t)}=0;\quad \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{|\alpha'(t)|+|A'(t)|}{\alpha^2(t)\gamma(t)}+\frac{|\gamma'(t)|}{\alpha(t)\gamma^2(t)}\right)=0;\quad \lim_{t\to+\infty}\alpha(t)(A(t))^{\eta/(p-\eta)}=+\infty \tag{19}$$

(при $p=\eta$ последнее равенство не нужно);

7) решение системы (17) существует и единственно для любого $t\geq 0$.

Тогда

$$\lim_{t\to+\infty}\|v(t)-v_*\|=0;\quad \lim_{t\to+\infty}\|\dot v(t)\|=0, \tag{20}$$

где v_* – нормальное решение задачи (11), причем сходимость в (20) равномерная относительно выбора $\Phi(v,w,t)$ и $P(w,t)$ из (18).

Наконец, приведем регуляризованный вариант метода линеаризации. Он применим для задачи, поставленной в виде (4), (5).

Заметим, что необходимость введения штрафной функции здесь отсутствует. Указанный метод запишем в виде

$$\dot v(t)+v(t)=\pi^{G(v(t))}_{S(v(t),t)}[v(t)-\gamma(t)G^{-1}(v(t))(\nabla_w\Phi(u(t),u(t),t)+\alpha(t)u(t))],$$
$$u(t)=\pi^{G(v(t))}_{S(v(t),t)}[v(t)-\gamma(t)G^{-1}(v(t))(\nabla_w\Phi(v(t),v(t),t)+\alpha(t)v(t))],\quad v(0)=v_0,\quad t\geq 0, \tag{21}$$
$$S(v(t),t)=\{w\in W_0\mid g_i(v(t),t)+\langle g_i'(v(t),t),w-v(t)\rangle\leq\theta(t)(1+\|v(t)\|^2)\}.$$

Теорема 6. *Пусть выполнены условия:*

1) условие 1) теоремы 2;

2) функция $\Phi(v,w)$ непрерывна по v на E^n при любом w из E^n; выпукла и непрерывно дифференцируема по w на E^n при любом v из E^n; удовлетворяет условию кососимметричности (2) на W_0; сужение ее частного градиента по w на диагональ множества $E^n\times E^n$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|\nabla_w\Phi(u,u)-\nabla_w\Phi(v,v)\|\leq L_w\|u-v\|\quad \forall u,v\in E^n;$$

функции $g_i(w)$ выпуклы, дифференцируемы по w на E^n, их градиенты удовлетворяют условию Липшица $\|g_i'(u)-g_i'(v)\|\leq L_i\|u-v\|$ $\forall u,v\in E^n$, $i=1,\dots,l$;

3) условие 3) теоремы 1;

4) приближения $\nabla_w\Phi(v,w,t)$, $g_i(w,t)$, $g_i'(w,t)$ удовлетворяют условиям

$$\|\nabla_w\Phi(w,w,t)-\nabla_w\Phi(w,w)\|\leq\delta(t)(1+\|w\|)\quad\forall w\in E^n;$$
$$|g_i(w,t)-g_i(w)|\leq\delta(t)(1+\|w\|^2)\quad\forall w\in E^n,\quad i=1,\dots,l; \tag{22}$$
$$\|g_i'(w,t)-g_i'(w)\|\leq\delta(t)(1+\|w\|)\quad\forall w\in E^n,\quad i=1,\dots,l;$$

5) параметры $\alpha(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$, $\theta(t)$ удовлетворяют условиям

$$\alpha(t),\gamma(t)\in C^1[0;+\infty);\quad \delta(t),\theta(t)\in C[0;+\infty);\quad \alpha(t),\gamma(t)>0;$$

$\alpha(t)$ – выпуклая функция, $\alpha'(t)\leq 0$, $\gamma'(t)\leq 0$; $\delta_{\max}\geq\delta(t)>0$; $\theta(t)\geq 0$; $\delta(t)(3+\|w_c\|^2)\leq\theta(t)$;

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\alpha(t)+\gamma(t)+\delta(t)+\theta(t)+\frac{\delta(t)}{\alpha(t)}+\frac{\theta(t)}{\alpha(t)}\right)=0;\quad \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{|\alpha'(t)|}{\alpha^2(t)\gamma(t)}+\frac{|\gamma'(t)|}{\alpha(t)\gamma^2(t)}\right)=0;$$

6) решение системы (21) существует и единственно для любого $t\geq 0$.

Тогда $\lim\limits_{t\to+\infty}\|v(t)-v_*\|=0$; $\lim\limits_{t\to+\infty}\|\dot v(t)\|=0$, *где* v_* *– нормальное решение задачи (4), (5), т.е.* $\|v_*\|=\inf\limits_{v\in W^*}\|v\|$, *причем сходимость равномерная относительно выбора* $\nabla_w\Phi(v,w,t)$, $g_i(w,t)$, $g_i'(w,t)$ *из (22).*

Во всех формулировках теорем о сходимости перечисленных методов требовалось стремление к нулю параметра погрешности $\delta(t)$. Такая ситуация, конечно, очень редко встречается в практике. В таких случаях для всех рассмотренных методов были сформулированы правила останова, доказаны соответствующие теоремы, построены регуляризующие операторы. Отметим также, что регуляризованные методы уже обеспечивают сходимость траекторий методов к вполне определенной точке из множества решений задачи – ее нормальному решению.

Примеры других непрерывных регуляризованных методов можно найти, например, в [24, 25]. Разработаны и дискретные варианты регуляризованных методов [26].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Антипин А.С.* // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 11. С. 1451–1461.
2. *Антипин А.С.* // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 11. С. 1445–1458.
3. *Антипин А.С., Будак Б.А., Васильев Ф.П.* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычислит. математика и кибернетика. 2003. № 1. С. 37–41.
4. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М., 2002.
5. *Будак Б.А.* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычислит. математика и кибернетика. 2004. № 2. С. 20–26.
6. *Будак Б.А.* Непрерывные методы решения задач равновесного программирования: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 2003.
7. *Антипин А.С.* // Автоматика и телемеханика. 1997. № 8. С. 166–178.
8. *Антипин А.С.* // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 5. С. 590–599.
9. *Антипин А.С.* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2000. Т. 40. № 8. С. 1142–1162.
10. *Antipin A.S.* // Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. 481. Berlin, 2000. P. 1–24.
11. *Антипин А.С.* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1997. Т. 37. № 11. С. 1327–1339.
12. *Антипин А.С.* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1995. Т. 35. № 5. С. 688–704.
13. *Антипин А.С.* // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 11. С. 1846–1861.
14. *Antipin A.S.* // Recent Advances in Optimization: Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Berlin, 1997. P. 1–18.
15. *Antipin A.* // Preceedings of the International Conference "Parametric optimization and related topics. V". 1997.
16. *Будак Б.А.* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычислит. математика и кибернетика. 2003. № 2. С. 27–32.
17. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М., 1986.
18. *Васильев Ф.П., Антипин А.С.* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычислит. математика и кибернетика. 1998. № 1. С. 11–14.
19. *Васильев Ф.П., Антипин А.С.* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1999. Т. 39. № 11. С. 1779–1786.
20. *Васильев Ф.П., Антипин А.С.* // Вестн. РУДН. Математика. 2001. № 8. С. 10–16.
21. *Васильев Ф.П., Антипин А.С.* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2001. Т. 41. № 1. С. 3–8.
22. *Антипин А.С., Васильев Ф.П.* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2002. Т. 42. № 8. С. 1158–1165.
23. *Антипин А.С., Будак Б.А., Васильев Ф.П.* // Вычислит. методы и программирование. 2002. Т. 3. № 2. С. 118–128.
24. *Антипин А.С., Будак Б.А., Васильев Ф.П.* // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 12. С. 1587–1595.
25. *Будак Б.А.* // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 2. С. 154–168.
26. *Антипин А.С., Васильев Ф.П., Шпирко С.В.* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2003. Т. 43. № 10. С. 1451–1458.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова,
Вычислительный центр РАН, г. Москва

Поступила в редакцию
02.11.2004 г.