

УДК 515.178.2+517.958+517.986

Сигма-функции и алгебры Ли операторов Шрёдингера¹

© 2020. В. М. БУХШТАБЕР, Е. Ю. БУНЬКОВА

*Посвящается памяти замечательного математика
Виктора Энольского (1945–2019)*

В работе В. М. Бухштабера и Д. В. Лейкина, опубликованной в 2004 г. в журнале «Функциональный анализ и его приложения», для каждого $g > 0$ определена система из $2g$ многомерных уравнений Шрёдингера в магнитных полях с квадратичными потенциалами. Такие системы эквивалентны системам уравнений теплопроводности в неголономном репере. Доказано, что такая система определяет сигма-функцию универсальной гиперэллиптической кривой рода g . Введена полиномиальная алгебра Ли, образующими которой являются $2g$ операторов Шрёдингера $Q_0, Q_2, \dots, Q_{4g-2}$.

В данной работе для каждого $g > 0$ получен явный вид операторов Q_0, Q_2, Q_4 и рекуррентные формулы для Q_{2k} при $k > 2$, выражающие эти операторы как элементы полиномиальной алгебры Ли при помощи скобок Ли операторов Q_0, Q_2 и Q_4 .

В качестве приложения получен явный вид операторов $Q_0, Q_2, \dots, Q_{4g-2}$ при $g = 1, 2, 3, 4$.

DOI: <https://doi.org/10.1134/faa3837>

§ 1. Введение

Уравнение теплопроводности, эквивалентное уравнению Шрёдингера, играет фундаментальную роль в теории абелевых функций. Например, гл. I монографии [2] начинается с характеристики эллиптической тэта-функции как периодического фундаментального решения одномерного уравнения теплопроводности.

Непосредственно из конструкции функции $\theta(z, \Omega)$, где $z \in \mathbb{C}^g$ и Ω — симметрическая $(g \times g)$ -матрица, следует, что эта функция удовлетворяет классической системе многомерных уравнений теплопроводности. В этой системе роль времен играют $g(g+1)/2$ независимых параметров многообразия симметрических $(g \times g)$ -матриц Ω . Векторные поля вдоль времен образуют голономный репер.

При $g > 3$ размерность многообразия симметрических $(g \times g)$ -матриц, являющихся матрицами периодов неособой римановой поверхности рода g , меньше числа $g(g+1)/2$. Возникает широко известная проблема Римана–Шоттки, которая была решена Шиотой (см. [3]) на основе гипотезы С. П. Новикова, в терминах уравнения Кадомцева–Петвиашвили.

В рамках проблемы Ф. Клейна по каждой неособой римановой поверхности V рода g строится целая функция на \mathbb{C}^g , а именно, многомерная сигма-функция. Ее логарифмические производные порядка 2 и выше порождают все поле мероморфных функций на якобиане кривой V (см. [4]). В первых конструкциях эта

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №20-11-19998).

многомерная сигма-функция вводилась как модификация многомерной тэта-функции. Эффективность ее реализации достигается за счет правильного выбора модели кривой. В результате получается целая функции, разложение которой в ряд по векторному аргументу $z \in \mathbb{C}^g$ приводит к ряду над кольцом полиномов от параметров уравнения кривой. Фиксируя семейство кривых (семейство гиперэллиптических кривых и более широкое семейство (n, s) -кривых), мы можем представить тэта-функции этих кривых как модифицированные сигма-функции этих кривых. Эффективное описание таких модификаций дает решение проблемы Римана–Шоттки, учитывающее специфику рассматриваемого семейства кривых. Но в этом случае мы не можем использовать классическую систему уравнений теплопроводности для характеристики полученных тэта-функций, так как векторные поля вдоль времен, соответствующих вариациям периодов, могут пересекать дискриминанты кривых. Это также связано с проблемой Римана–Шоттки.

В работе [1] была построена система уравнений теплопроводности, характеризующая многомерные сигма-функции. В этой системе векторные поля вдоль времен, соответствующих вариациям параметров уравнений кривых, образуют уже неголономный репер. Возникают уравнения Шрёдингера в магнитных полях.

Естественно встал вопрос об эффективном описании этой системы уравнений. Решению этого вопроса в случае семейства гиперэллиптических кривых посвящена настоящая работа.

§ 2. Постановка задачи в случае семейства гиперэллиптических кривых

Мы рассматриваем гиперэллиптические кривые рода $g \in \mathbb{N}$ в модели

$$\mathcal{V}_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = x^{2g+1} + \lambda_4 x^{2g-1} + \lambda_6 x^{2g-2} + \dots + \lambda_{4g} x + \lambda_{4g+2}\}. \quad (1)$$

Кривая зависит от параметров $\lambda = (\lambda_4, \lambda_6, \dots, \lambda_{4g}, \lambda_{4g+2}) \in \mathbb{C}^{2g}$. Пусть $\mathcal{B} \subset \mathbb{C}^{2g}$ — подпространство таких параметров λ , что кривая \mathcal{V}_λ невырождена. Тогда $\mathcal{B} = \mathbb{C}^{2g} \setminus \Sigma$, где Σ — дискриминантная гиперповерхность универсальной кривой.

Для мероморфной функции f в \mathbb{C}^g вектор $\omega \in \mathbb{C}^g$ является периодом, если $f(z + \omega) = f(z)$ для всех $z \in \mathbb{C}^g$. Если мероморфная функция f имеет $2g$ независимых периодов в \mathbb{C}^g , то она называется *абелевой функцией*. Таким образом, абелева функция — это мероморфная функция на комплексном торе $T^g = \mathbb{C}^g / \Gamma$, где Γ — решетка периодов.

Для каждого $\lambda \in \mathcal{B}$ набор периодов голоморфных дифференциалов на кривой \mathcal{V}_λ порождает решетку Γ_λ ранга $2g$ в \mathbb{C}^g . *Гиперэллиптической функцией* рода g (см. [5]–[7]) называется мероморфная функция в $\mathbb{C}^g \times \mathcal{B}$, такая, что для каждого $\lambda \in \mathcal{B}$ ее ограничение на $\mathbb{C}^g \times \lambda$ является абелевой функцией, где тор T^g — это якобиан $\mathcal{J}_\lambda = \mathbb{C}^g / \Gamma_\lambda$ кривой \mathcal{V}_λ . Обозначим через \mathcal{F} поле гиперэллиптических функций рода g . Свойства этого поля см. в [6], [7].

Обозначим координаты в \mathbb{C}^g через $z = (z_1, z_3, \dots, z_{2g-1})$. Индексы координат $z = (z_1, z_3, \dots, z_{2g-1}) \in \mathbb{C}^g$ и параметров $\lambda = (\lambda_4, \lambda_6, \dots, \lambda_{4g}, \lambda_{4g+2}) \in \mathbb{C}^{2g}$

определяют их градуировку: $\text{wt } z_k = -k$, $\text{wt } \lambda_k = k$. Обозначим через P кольцо полиномов от $\lambda \in \mathcal{B} \subset \mathbb{C}^{2g}$.

Мы рассматриваем полиномиальные алгебры Ли [8] векторных полей, касающихся дискриминанта Σ в \mathbb{C}^{2g} . Их образующие $L_0, L_2, L_4, \dots, L_{4g-2}$ — векторные поля

$$L_{2k} = \sum_{s=2}^{2g+1} v_{2k+2, 2s-2}(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda_{2k}}, \quad \text{где } v_{2k+2, 2s-2}(\lambda) \in P.$$

В точке $\lambda \in \mathcal{B}$ эти векторные поля определяют $2g$ -мерный неголономный репер. Структура алгебры Ли как P -модуля с образующими $1, L_0, L_2, L_4, \dots, L_{4g-2}$ определяется полиномиальными матрицами $V(\lambda) = (v_{2i, 2j}(\lambda))$, где $i, j = 1, \dots, 2g$, и $C(\lambda) = \{c_{2i, 2j}^{2k}(\lambda)\}$, где $i, j, k = 0, \dots, 2g - 1$, такими, что

$$[L_{2i}, L_{2j}] = \sum_{k=0}^{2g-1} c_{2i, 2j}^{2k}(\lambda) L_{2k}, \quad [L_{2i}, \lambda_{2q}] = v_{2i+2, 2q-2}(\lambda), \quad [\lambda_{2q}, \lambda_{2r}] = 0. \quad (2)$$

Здесь λ_q — оператор умножения на функцию λ_q в P .

Явные выражения для матрицы $V(\lambda)$ можно найти в [9, §4.1] (см. также [8] и [10, лемма 3.1]). Для удобства положим $\lambda_s = 0$ при $s \notin \{0, 4, 6, \dots, 4g, 4g + 2\}$ и $\lambda_0 = 1$. Для $k, m \in \{1, \dots, 2g\}$, $k \leq m$, положим

$$v_{2k, 2m}(\lambda) = \sum_{s=0}^{k-1} 2(k+m-2s)\lambda_{2s}\lambda_{2(k+m-s)} - \frac{2k(2g-m+1)}{2g+1}\lambda_{2k}\lambda_{2m},$$

а для $k > m$ положим $v_{2k, 2m}(\lambda) = v_{2m, 2k}(\lambda)$.

Векторное поле L_0 — эйлерово векторное поле, а именно, поскольку $\text{wt } \lambda_{2k} = 2k$, имеем

$$[L_0, \lambda_{2k}] = 2k\lambda_{2k}, \quad [L_0, L_{2k}] = 2kL_{2k}. \quad (3)$$

Эти выражения определяют веса векторных полей L_k , а именно, $\text{wt } L_{2k} = 2k$. Структура алгебры Ли, описанная выше, дает в этом случае градуированную полиномиальную алгебру Ли [8], которую мы обозначим через \mathcal{L}_L . Структурные полиномы $c_{2i, 2j}^{2s}(\lambda)$ описаны в [1, теорема 2.5].

Широко известна алгебра Ли–Витта W_{\geq} над полем комплексных чисел \mathbb{C} , порожденная операторами l_{2i} , где $i = 0, 1, 2, \dots$, и коммутационными соотношениями

$$[l_{2i}, l_{2j}] = 2(j-i)l_{2(i+j)}.$$

Относительно скобки $[\cdot, \cdot]$ алгебра Ли–Витта W_{\geq} порождена тремя операторами l_0, l_2, l_4 . Градуированная полиномиальная алгебра Ли \mathcal{L}_L над P является деформацией алгебры Ли–Витта W_{\geq} . Она также порождена всего тремя операторами L_0, L_2 и L_4 . Имеет место соотношение (см. лемму 4.3)

$$[L_2, L_{2k}] = 2(k-1)L_{2k+2} + \frac{4(2g-k)}{(2g+1)}(\lambda_{2k+2}L_0 - \lambda_4L_{2k-2}).$$

Теперь мы вводим операторы Шрёдингера. Мы рассматриваем пространство \mathbb{C}^{3g} с координатами (z, λ) . Обозначим через $\mathcal{C}(z, \lambda)$ кольцо дифференцируемых функций по z и λ . Положим

$$Q_{2k} = L_{2k} - H_{2k}, \quad k = 0, 1, \dots, 2g - 1, \quad (4)$$

где

$$H_{2k} = \frac{1}{2} \sum (\alpha_{a,b}^{(k)}(\lambda) \partial_a \partial_b + 2\beta_{a,b}^{(k)}(\lambda) z_a \partial_b + \gamma_{a,b}^{(k)}(\lambda) z_a z_b) + \delta^{(k)}(\lambda) \quad (5)$$

и суммирование ведется по нечетным a, b от 1 до $2g - 1$. В [1] дано решение следующей задачи.

Задача 2.1. *Найти достаточные условия на $\{\alpha^{(i)}(\lambda), \beta^{(i)}(\lambda), \gamma^{(i)}(\lambda), \delta^{(i)}(\lambda)\}$, при которых операторы (4) дают представление алгебры Ли (2) в кольце операторов на $\mathcal{C}(z, \lambda)$.*

Определение 2.2. Система уравнений на $\varphi = \varphi(z, \lambda)$

$$Q_{2k}\varphi = 0 \quad (6)$$

называется *системой уравнений теплопроводности*. Операторы Q_{2k} называются *операторами Шрёдингера*.

Мы используем теорию гиперэллиптических функций Клейна (см. [6], [11], [12], [4], а также [13] для эллиптических функций). Возьмем координаты (z, λ) в $\mathbb{C}^g \times \mathcal{B} \subset \mathbb{C}^{3g}$. Пусть $\sigma(z, \lambda)$ — гиперэллиптическая сигма-функция (или эллиптическая сигма-функция в случае рода $g = 1$). Положим $\partial_k = \partial/\partial z_k$. Следуя работам [5], [7], [14], мы используем обозначения

$$\zeta_k = \partial_k \ln \sigma(z, \lambda), \quad \wp_{k_1, \dots, k_n} = -\partial_{k_1} \cdots \partial_{k_n} \ln \sigma(z, \lambda), \quad (7)$$

где $n \geq 2$, $k_s \in \{1, 3, \dots, 2g - 1\}$. Функции \wp_{k_1, \dots, k_n} дают примеры гиперэллиптических функций. Поле \mathcal{F} является полем частных кольца полиномов \mathcal{P} , порожденного функциями \wp_{k_1, \dots, k_n} , где $n \geq 2$, $k_s \in \{1, 3, \dots, 2g - 1\}$.

Как показано в [1], система уравнений теплопроводности (6) для операторов Q_{2k} , представляющих собой решение задачи 1.1, задает гиперэллиптическую сигма-функцию $\sigma(z, \lambda)$, что позволяет строить теорию гиперэллиптических функций Клейна, начиная с таких операторов.

Конструкция операторов Q_{2i} в [1] использует условие (см. [1, уравнение (1.3)]), что коммутатор операторов $[Q_{2i}, Q_{2j}]$ задается формулой над \mathcal{P} с теми же коэффициентами, что и в формуле для $[L_{2i}, L_{2j}]$. То есть полиномиальная алгебра, порожденная операторами Q_{2i} при $i = 0, 1, \dots$, является еще одной реализацией деформации алгебры Ли–Витта W_{\geq} . Таким образом, для эффективного описания полиномиальной алгебры Ли \mathcal{L}_Q необходимо получить явные формулы для операторов Q_0, Q_2 и Q_4 . Эти формулы являются основным результатом данной работы. В качестве приложения мы приводим явный вид дифференциальных операторов в случае универсальной гиперэллиптической кривой рода 4.

§ 3. Производящие функции для операторов Шрёдингера

В этом параграфе мы представляем в случае модели (1) явный вид решения задачи 2.1 из [1, теорема 2.6]. Мы заменим некоторые обозначения для согласования с формулами настоящей работы.

Обозначим через $q(a(x), b(x))$ частное при евклидовом делении полинома $a(x)$ на полином $b(x)$ и через $r(a(x), b(x))$ остаток при евклидовом делении полинома $a(x)$ на полином $b(x)$. Положим (см. (1))

$$f(x) = x^{2g+1} + \sum_{k=0}^{2g-1} \lambda_{2(2g+1-k)} x^k.$$

Определим производящие функции для операторов L_{2k} и H_{2k} по формулам

$$L(x) = x^{2g-1} \sum_{k=0}^{2g-1} x^{-k} L_{2k}, \quad H(x) = x^{2g-1} \sum_{k=0}^{2g-1} x^{-k} H_{2k}. \quad (8)$$

Для $R_i(x) = x^{g-i+1} \partial_x q(f(x), x^{2g-2i+2})$ мы полагаем

$$\begin{aligned} h(x) &= \sum_{i=1}^g x^{g-i} \partial_{2i-1} + R_i(x) z_{2i-1}, \\ t(x) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^g (g-i+1) z_{2i-1}^2 q(R_i(x), x^{g-i+2}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{g-1} \sum_{j=i+1}^g (g-j+1) z_{2j-1} q(x^{g-i} \partial_{2i-1} + R_i(x) z_{2i-1}, x^{g-j+2}). \end{aligned}$$

Тогда имеет место соотношение (см. [1, теорема 2.6])

$$H(x) = r \left(-\frac{1}{4} f''(x) + 2f(x)t(x) + \frac{1}{2} h(x) \circ h(x), f'(x) \right), \quad (9)$$

где \circ обозначает композицию операторов.

Функция $Q(x) = L(x) - H(x)$ является производящей функцией для операторов Шрёдингера.

Лемма 3.1. *Для операторов Шрёдингера в формуле (5)*

$$\begin{aligned} \alpha_{a,b}^{(k)}(\lambda) &= 1 \quad \text{при } a+b=2k, \ a, b \in 2\mathbb{N}+1, \\ \alpha_{a,b}^{(k)}(\lambda) &= 0 \quad \text{при } a+b \neq 2k, \ a, b \in 2\mathbb{N}+1, \\ \delta^{(k)}(\lambda) &= \left(-\frac{1}{4}(2g-k+1)(2g-k) + \frac{1}{2} \left(g + \left[\frac{k+1}{2} \right] - k \right) \left(g - \left[\frac{k+1}{2} \right] \right) \right) \lambda_{2k}. \end{aligned}$$

Доказательство. Коэффициент при $\partial_a \partial_b$ в $H(x)$ получается из слагаемого $\frac{1}{2} h(x) \circ h(x)$, в развернутом виде $\sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^g x^{2g-i-j} \partial_{2i-1} \partial_{2j-1}$, и мы получаем из (9) выражения для $\alpha_{a,b}^{(k)}(\lambda)$.

Выражение для $\delta^{(k)}(\lambda)$ получается из слагаемых $-\frac{1}{4}f''(x)$ и $\frac{1}{2}h(x) \circ h(x)$. Первое дает $-\frac{1}{4}(2g-k+1)(2g-k)\lambda_{2k}$, а второе дает $\frac{1}{2}(g + [\frac{k+1}{2}] - k)(g - [\frac{k+1}{2}])\lambda_{2k}$, что приводит к нужному результату.

Замечание 3.2. Далее мы покажем, что для операторов Шрёдингера в выражении (5)

$$\begin{aligned}\beta_{a,b}^{(k)}(\lambda) & \text{ — линейная функция по } \lambda, \\ \gamma_{a,b}^{(k)}(\lambda) & \text{ — квадратичная функция по } \lambda.\end{aligned}$$

См. лемму 4.2.

§ 4. Явный вид операторов Шрёдингера

Напомним, что в наших обозначениях $\lambda_s = 0$ для $s \notin \{0, 4, 6, \dots, 4g, 4g+2\}$ и $\lambda_0 = 1$.

Теорема 4.1. *Имеют место явные выражения*

$$\begin{aligned}H_0 &= \sum_{s=1}^g (2s-1)z_{2s-1}\partial_{2s-1} - \frac{g(g+1)}{2}, \\ H_2 &= \frac{1}{2}\partial_1^2 + \sum_{s=1}^{g-1} (2s-1)z_{2s-1}\partial_{2s+1} - \frac{4}{2g+1}\lambda_4 \sum_{s=1}^{g-1} (g-s)z_{2s+1}\partial_{2s-1} \\ & \quad + \sum_{s=1}^g \left(\frac{2s-1}{2}\lambda_{4s} - \frac{2(g-s+1)}{2g+1}\lambda_4\lambda_{4s-4} \right) z_{2s-1}^2, \\ H_4 &= \partial_1\partial_3 + \sum_{s=1}^{g-2} (2s-1)z_{2s-1}\partial_{2s+3} + \lambda_4 \sum_{s=1}^{g-1} (2s-1)z_{2s+1}\partial_{2s+1} \\ & \quad - \frac{6}{2g+1}\lambda_6 \sum_{s=1}^{g-1} (g-s)z_{2s+1}\partial_{2s-1} \\ & \quad + \sum_{s=1}^g \left((2s-1)\lambda_{4s+2} - \frac{3(g-s+1)}{2g+1}\lambda_6\lambda_{4s-4} \right) z_{2s-1}^2 \\ & \quad + \sum_{s=1}^{g-1} (2s-1)\lambda_{4s+4}z_{2s-1}z_{2s+1} - \frac{g(g-1)}{2}\lambda_4.\end{aligned}$$

Доказательство. Явные выражения для $\alpha_{a,b}^{(k)}(\lambda)$ и $\delta^{(k)}(\lambda)$ были получены в лемме 3.1. Мы видим, что для $k = 0, 1, 2$ они совпадают с представленными в теореме. Напомним, что $\lambda_0 = 1$, $\lambda_2 = 0$.

В (9) коэффициент при $z_{2j-1}\partial_{2i-1}$ равен

$$r(2(g-j+1)f(x)q(x^{g-i}, x^{g-j+2}) + x^{g-i}R_j(x), f'(x)).$$

Для выражения H_0 нам нужен коэффициент при x^{2g-1} в этом полиноме, для H_2 — коэффициент при x^{2g-2} , для H_4 — коэффициент при x^{2g-3} .

При $j < i + 1$ этот полином принимает вид

$$r(x^{g-i}R_j(x), f'(x)) = x^{g-i}R_j(x),$$

поскольку степень полинома $R_j(x)$ по x равна $g + j - 1$, а степень полинома $f'(x)$ равна $2g$. Таким образом, мы получаем коэффициент $2j - 1$ для $j = i$ в H_0 , для $j = i - 1$ в H_2 и для $j = i - 2$ в H_4 , а также коэффициент $(2j - 3)\lambda_4$ для $j = i \geq 2$ в H_4 ; остальные коэффициенты нулевые.

При $j = i + 1$ этот полином принимает вид

$$\begin{aligned} & r(x^{g-i}R_j(x), f'(x)) \\ &= r(x^{2g-2i}\partial_x q(f(x), x^{2g-2i}), f'(x)) \\ &= r((2i+1)x^{2g}, f'(x)) + \sum_{k=2g-2i+1}^{2g-1} (k-2g+2i)\lambda_{2(2g+1-k)}x^{k-1} \\ &= -\frac{2i+1}{2g+1} \sum_{k=0}^{2g-1} k\lambda_{2(2g+1-k)}x^{k-1} + \sum_{k=2g-2i+1}^{2g-1} (k-2g+2i)\lambda_{2(2g+1-k)}x^{k-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем, что коэффициент в H_0 нулевой, коэффициент в H_2 равен $-\frac{4}{2g+1}(g-i)\lambda_4$ и коэффициент в H_4 равен $-\frac{6}{2g+1}(g-i)\lambda_6$.

При $j \geq i + 2$ этот полином принимает вид

$$\begin{aligned} & r(2(g-j+1)x^{j-i-2}f(x) + x^{2g-i-j+1}\partial_x q(f(x), x^{2g-2j+2}), f'(x)) \\ &= r(f'(x)x^{j-i+1} + \sum_{k=0}^{2g-2j+2} (2g-2j+2-k)\lambda_{2(2g+1-k)}x^{k+j-i-2}, f'(x)) \\ &= \sum_{k=0}^{2g-2j+2} (2g-2j+2-k)\lambda_{2(2g+1-k)}x^{k+j-i-2}. \end{aligned}$$

Поскольку $j \geq i + 2 \geq 3$, коэффициенты в H_0 , H_2 и H_4 нулевые.

В (9) коэффициент при z_{2i-1}^2 равен

$$r\left((g-i+1)f(x)q(R_i(x), x^{g-i+2}) + \frac{1}{2}R_i(x)^2, f'(x)\right). \quad (10)$$

Для $i = 1$ обратим внимание, что $R_1(x) = x^g$ и выражение (10) принимает вид

$$\frac{1}{2}r(x^{2g}, f'(x)) = -\frac{1}{2(2g+1)} \sum_{k=1}^{2g-1} k\lambda_{2(2g+1-k)}x^{k-1}.$$

В этом выражении коэффициент при x^{2g-1} нулевой, коэффициенты при x^{2g-2} и x^{2g-3} дают соответствующие коэффициенты в H_2 и в H_4 при z_1^2 .

Для $i > 1$ имеем

$$\begin{aligned}
& r\left((g-i+1)f(x)q(R_i(x), x^{g-i+2}) + \frac{1}{2}R_i(x)^2, f'(x)\right) \\
&= r\left(\frac{1}{2}R_i(x)x^{-g+i-1}\left(2(g-i+1)x^{-1}f(x) + x^{g-i+1}R_i(x)\right)\right. \\
&\quad \left.-(g-i+1)f(x)x^{-1}r(x^{-g+i-1}R_i(x), x), f'(x)\right) \\
&= r\left(\frac{1}{2}R_i(x)x^{-g+i-1}\left(f'(x) + x^{-1}\sum_{k=0}^{2g-2i+1}(2g-2i+2-k)\lambda_{2(2g+1-k)}x^k\right)\right. \\
&\quad \left.-(g-i+1)f(x)x^{-1}r(x^{-g+i-1}R_i(x), x), f'(x)\right) \\
&= \frac{1}{2}R_i(x)x^{-g+i-1}\left(x^{-1}\sum_{k=0}^{2g-2i+1}(2g-2i+2-k)\lambda_{2(2g+1-k)}x^k\right) \\
&\quad -(g-i+1)r(x^{-g+i-1}R_i(x), x)x^{-1}(f(x) - x^{2g+1}) \\
&\quad -(g-i+1)r(x^{-g+i-1}R_i(x), x)r(x^{2g}, f'(x)) \\
&= \frac{1}{2}R_i(x)x^{-g+i-1}\left(x^{-1}\sum_{k=0}^{2g-2i+1}(2g-2i+2-k)\lambda_{2(2g+1-k)}x^k\right) \\
&\quad -(g-i+1)\lambda_{4(i-1)}x^{-1}\left(\sum_{k=0}^{2g-1}\lambda_{2(2g+1-k)}x^k\right) \\
&\quad + \frac{(g-i+1)}{(2g+1)}\lambda_{4(i-1)}\left(\sum_{k=1}^{2g-1}k\lambda_{2(2g+1-k)}x^{k-1}\right).
\end{aligned}$$

Это полином степени $2g-2$. Таким образом, коэффициент в H_0 нулевой. Коэффициенты в H_2 и H_4 совпадают с соответствующими коэффициентами в теореме.

В (9) коэффициент при $z_{2i-1}z_{2j-1}$, $j > i$, равен

$$\begin{aligned}
& r\left(R_i(x)x^{-g+j-2}\left(2(g-j+1)f(x) + x^{g-j+2}R_j(x)\right), f'(x)\right) \\
&= r\left(R_i(x)x^{-g+j-2}\left(xf'(x) + \sum_{k=0}^{2g-2j+1}(2g-2j+2-k)\lambda_{2(2g+1-k)}x^k\right), f'(x)\right) \\
&= R_i(x)x^{-g+j-2}\left(\sum_{k=0}^{2g-2j+1}(2g-2j+2-k)\lambda_{2(2g+1-k)}x^k\right).
\end{aligned}$$

Это полином степени $2g+i-j-2 \leq 2g-3$, причем равенство достигается при $j = i+1$. Таким образом, коэффициенты в H_0 и в H_2 нулевые, а коэффициент в H_4 для $j = i+1$ равен $(2i-1)\lambda_{4i+4}$.

Теорема доказана.

Лемма 4.2. Для операторов Шрёдингера в (5)

$$\begin{aligned}\beta_{a,b}^{(k)}(\lambda) & - \text{линейная функция по } \lambda, \\ \gamma_{a,b}^{(k)}(\lambda) & - \text{квадратичная функция по } \lambda.\end{aligned}$$

Доказательство следует из явных выражений в доказательстве теоремы 4.1.

Лемма 4.3. Имеет место соотношение

$$[L_2, L_{2k}] = 2(k-1)L_{2k+2} + \frac{4(2g-k)}{(2g+1)}(\lambda_{2k+2}L_0 - \lambda_4L_{2k-2}). \quad (11)$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}L_{2k} &= 2 \sum_{m=2}^{k+1} \left(\sum_{s=0}^{m-2} (k+m-2s)\lambda_{2s}\lambda_{2(k+m-s)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(m-1)(2g-k)}{2g+1}\lambda_{2(k+1)}\lambda_{2(m-1)} \right) \frac{\partial}{\partial \lambda_{2m}} \\ &+ 2 \sum_{m=k+2}^{2g+1} \left(\sum_{s=0}^k (k+m-2s)\lambda_{2s}\lambda_{2(k+m-s)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(k+1)(2g-m+2)}{2g+1}\lambda_{2(k+1)}\lambda_{2(m-1)} \right) \frac{\partial}{\partial \lambda_{2m}}, \\ L_2 &= \sum_{m=2}^{2g+1} \left(2(m+1)\lambda_{2(m+1)} - \frac{4(2g-m+2)}{2g+1}\lambda_4\lambda_{2(m-1)} \right) \frac{\partial}{\partial \lambda_{2m}}.\end{aligned}$$

Отсюда получаем (11) непосредственным вычислением коэффициентов.

Следствие 4.4. Для $k = 3, 4, 5, \dots, 2g-1$ имеет место равенство

$$Q_{2k} = \frac{1}{2(k-2)}[Q_2, Q_{2k-2}] - \frac{2(2g-k+1)}{(k-2)(2g+1)}(\lambda_{2k}Q_0 - \lambda_4Q_{2k-4}). \quad (12)$$

Это равенство рекуррентно задает операторы Q_{2k} для $k = 3, 4, 5, \dots, 2g-1$, мы получаем явные выражения для этих операторов.

Доказательство следствия 4.4. Операторы Q_{2k} по построению (см. §3) дают решение задачи 2.1. Равенство (12) совпадает с равенством (11), переписанным в терминах операторов Q_{2k} .

§ 5. Явные формулы для операторов Шрёдингера в неголономном репере

Следующие операторы можно найти в [1], [5], [15], [16] в случае рода $g = 1$, в [5], [15], [16] в случае рода $g = 2$ и в [10], [17] в случае рода $g = 3$. Случай рода $g = 4$ является новым. Формулы для рода $g = 4$ следуют из выражений, полученных в §4.

5.1. Операторы Шрёдингера для рода $g = 1$. В этом случае явные формулы для $\{H_{2k}\}$ в (4) следующие:

$$H_0 = z_1 \partial_1 - 1, \quad H_2 = \frac{1}{2} \partial_1^2 - \frac{1}{6} \lambda_4 z_1^2.$$

5.2. Операторы Шрёдингера для рода $g = 2$. В этом случае явные формулы для $\{H_{2k}\}$ в (4) следующие:

$$\begin{aligned} H_0 &= z_1 \partial_1 + 3z_3 \partial_3 - 3, \\ H_2 &= \frac{1}{2} \partial_1^2 - \frac{4}{5} \lambda_4 z_3 \partial_1 + z_1 \partial_3 - \frac{3}{10} \lambda_4 z_1^2 + \left(\frac{3}{2} \lambda_8 - \frac{2}{5} \lambda_4^2\right) z_3^2, \\ H_4 &= \partial_1 \partial_3 - \frac{6}{5} \lambda_6 z_3 \partial_1 + \lambda_4 z_3 \partial_3 - \frac{1}{5} \lambda_6 z_1^2 + \lambda_8 z_1 z_3 + (3\lambda_{10} - \frac{3}{5} \lambda_4 \lambda_6) z_3^2 - \lambda_4, \\ H_6 &= \frac{1}{2} \partial_3^2 - \frac{3}{5} \lambda_8 z_3 \partial_1 - \frac{1}{10} \lambda_8 z_1^2 + 2\lambda_{10} z_1 z_3 - \frac{3}{10} \lambda_4 \lambda_8 z_3^2 - \frac{1}{2} \lambda_6. \end{aligned}$$

5.3. Операторы Шрёдингера для рода $g = 3$. В этом случае явные формулы для $\{H_{2k}\}$ в (4) следующие:

$$\begin{aligned} H_0 &= z_1 \partial_1 + 3z_3 \partial_3 + 5z_5 \partial_5 - 6, \\ H_2 &= \frac{1}{2} \partial_1^2 - \frac{8}{7} \lambda_4 z_3 \partial_1 + (z_1 - \frac{4}{7} \lambda_4 z_5) \partial_3 + 3z_3 \partial_5 - \frac{5}{14} \lambda_4 z_1^2 + \left(\frac{3}{2} \lambda_8 - \frac{4}{7} \lambda_4^2\right) z_3^2 \\ &\quad + \left(\frac{5}{2} \lambda_{12} - \frac{2}{7} \lambda_4 \lambda_8 \frac{5}{2}\right) z_5^2, \\ H_4 &= \partial_1 \partial_3 - \frac{12}{7} \lambda_6 z_3 \partial_1 + (\lambda_4 z_3 - \frac{6}{7} \lambda_6 z_5) \partial_3 + (z_1 + 3\lambda_4 z_5) \partial_5 - \frac{2}{7} \lambda_6 z_1^2 + \lambda_8 z_1 z_3 \\ &\quad + (3\lambda_{10} - \frac{6}{7} \lambda_4 \lambda_6) z_3^2 + 3\lambda_{12} z_3 z_5 + (5\lambda_{14} - \frac{3}{7} \lambda_6 \lambda_8) z_5^2 - 3\lambda_4, \\ H_6 &= \frac{1}{2} \partial_3^2 + \partial_1 \partial_5 - \frac{9}{7} \lambda_8 z_3 \partial_1 - \frac{8}{7} \lambda_8 z_5 \partial_3 + (\lambda_4 z_3 + 2\lambda_6 z_5) \partial_5 - \frac{3}{14} \lambda_8 z_1^2 + 2\lambda_{10} z_1 z_3 \\ &\quad + \left(\frac{9}{2} \lambda_{12} - \frac{9}{14} \lambda_4 \lambda_8\right) z_3^2 + \lambda_{12} z_1 z_5 + 6\lambda_{14} z_3 z_5 + \left(\frac{3}{2} \lambda_4 \lambda_{12} - \frac{4}{7} \lambda_8^2\right) z_5^2 - 2\lambda_6, \\ H_8 &= \partial_3 \partial_5 - \left(\frac{6}{7} \lambda_{10} z_3 - \lambda_{12} z_5\right) \partial_1 - \frac{10}{7} \lambda_{10} z_5 \partial_3 + \lambda_8 z_5 \partial_5 - \frac{1}{7} \lambda_{10} z_1^2 + 3\lambda_{12} z_1 z_3 \\ &\quad + (6\lambda_{14} - \frac{3}{7} \lambda_4 \lambda_{10}) z_3^2 + 2\lambda_{14} z_1 z_5 + \lambda_4 \lambda_{12} z_3 z_5 \\ &\quad + (3\lambda_4 \lambda_{14} + \lambda_6 \lambda_{12} - \frac{5}{7} \lambda_8 \lambda_{10}) z_5^2 - \lambda_8, \\ H_{10} &= \frac{1}{2} \partial_5^2 - \left(\frac{3}{7} \lambda_{12} z_3 - 2\lambda_{14} z_5\right) \partial_1 - \frac{5}{7} \lambda_{12} z_5 \partial_3 - \frac{1}{14} \lambda_{12} z_1^2 + 4\lambda_{14} z_1 z_3 \\ &\quad - \frac{3}{14} \lambda_4 \lambda_{12} z_3^2 + 2\lambda_4 \lambda_{14} z_3 z_5 + (2\lambda_6 \lambda_{14} - \frac{5}{14} \lambda_8 \lambda_{12}) z_5^2 - \frac{1}{2} \lambda_{10}. \end{aligned}$$

5.4. Операторы Шрёдингера для рода $g = 4$. В этом случае явные формулы для $\{H_{2k}\}$ в (4) следующие:

$$\begin{aligned} H_0 &= z_1 \partial_1 + 3z_3 \partial_3 + 5z_5 \partial_5 + 7z_7 \partial_7 - 10, \\ H_2 &= \frac{1}{2} \partial_1^2 + z_1 \partial_3 + 3z_3 \partial_5 + 5z_5 \partial_7 - \frac{4}{9} \lambda_4 (3z_3 \partial_1 + 2z_5 \partial_3 + z_7 \partial_5) - \frac{7}{18} \lambda_4 z_1^2 \\ &\quad + \left(\frac{3}{2} \lambda_8 - \frac{2}{3} \lambda_4^2\right) z_3^2 + \left(\frac{5}{2} \lambda_{12} - \frac{4}{9} \lambda_4 \lambda_8\right) z_5^2 + \left(\frac{7}{2} \lambda_{16} - \frac{2}{9} \lambda_4 \lambda_{12}\right) z_7^2, \\ H_4 &= \partial_1 \partial_3 + z_1 \partial_5 + 3z_3 \partial_7 + \lambda_4 (z_3 \partial_3 + 3z_5 \partial_5 + 5z_7 \partial_7) \\ &\quad - \frac{2}{3} \lambda_6 (3z_3 \partial_1 + 2z_5 \partial_3 + z_7 \partial_5) - \frac{1}{3} \lambda_6 z_1^2 + \lambda_8 z_1 z_3 + (3\lambda_{10} - \lambda_4 \lambda_6) z_3^2 \\ &\quad + 3\lambda_{12} z_3 z_5 + (5\lambda_{14} - \frac{2}{3} \lambda_6 \lambda_8) z_5^2 + 5\lambda_{16} z_5 z_7 + (7\lambda_{18} - \frac{1}{3} \lambda_6 \lambda_{12}) z_7^2 - 6\lambda_4, \\ H_6 &= \frac{1}{2} \partial_3^2 + \partial_1 \partial_5 - \frac{5}{3} \lambda_8 z_3 \partial_1 - \frac{16}{9} \lambda_8 z_5 \partial_3 + \frac{5}{3} (\lambda_4 z_3 + 2\lambda_6 z_5 - \frac{8}{9} \lambda_8 z_7) \partial_5 \\ &\quad + (z_1 + 3\lambda_4 z_5 + 4\lambda_6 z_7) \partial_7 - \frac{5}{18} \lambda_8 z_1^2 + 2\lambda_{10} z_1 z_3 + \lambda_{12} z_1 z_5 \\ &\quad - \left(\frac{5}{6} \lambda_4 \lambda_8 - \frac{9}{2} \lambda_{12}\right) z_3^2 + 6\lambda_{14} z_3 z_5 + 3\lambda_{16} z_3 z_7 + \left(\frac{3}{2} \lambda_4 \lambda_{12} - \frac{8}{9} \lambda_8^2 + \frac{15}{2} \lambda_{16}\right) z_5^2 \\ &\quad + 10\lambda_{18} z_5 z_7 - \left(\frac{4}{9} \lambda_8 \lambda_{12} - \frac{5}{2} \lambda_4 \lambda_{16}\right) z_7^2 - \frac{9}{2} \lambda_6, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_8 &= \partial_3 \partial_5 + \partial_1 \partial_7 - \left(\frac{4}{3} \lambda_{10} z_3 - \lambda_{12} z_5\right) \partial_1 - \frac{20}{9} \lambda_{10} z_5 \partial_3 + (\lambda_8 z_5 - \frac{10}{9} \lambda_{10} z_7) \partial_5 \\
&\quad + (\lambda_4 z_3 + 2 \lambda_6 z_5 + 3 \lambda_8 z_7) \partial_7 - \frac{2}{9} \lambda_{10} z_1^2 + 3 \lambda_{12} z_1 z_3 + 2 \lambda_{14} z_1 z_5 + \lambda_{16} z_1 z_7 \\
&\quad - \left(\frac{2}{3} \lambda_4 \lambda_{10} - 6 \lambda_{14}\right) z_3^2 + (\lambda_4 \lambda_{12} + 9 \lambda_{16}) z_3 z_5 + 6 \lambda_{18} z_3 z_7 \\
&\quad - \left(\frac{10}{9} \lambda_8 \lambda_{10} - \lambda_6 \lambda_{12} - 3 \lambda_4 \lambda_{14} - 10 \lambda_{18}\right) z_5^2 + 3 \lambda_4 \lambda_{16} z_5 z_7 \\
&\quad - \left(\frac{5}{9} \lambda_{10} \lambda_{12} - 2 \lambda_6 \lambda_{16} - 5 \lambda_4 \lambda_{18}\right) z_7^2 - 3 \lambda_8, \\
H_{10} &= \frac{1}{2} \partial_5^2 + \partial_3 \partial_7 - (\lambda_{12} z_3 - 2 \lambda_{14} z_5 - \lambda_{16} z_7) \partial_1 - \frac{5}{3} \lambda_{12} z_5 \partial_3 - \frac{4}{3} \lambda_{12} z_7 \partial_5 \\
&\quad + (\lambda_8 z_5 + 2 \lambda_{10} z_7) \partial_7 - \frac{1}{6} \lambda_{12} z_1^2 + 4 \lambda_{14} z_1 z_3 + 3 \lambda_{16} z_1 z_5 + 2 \lambda_{18} z_1 z_7 \\
&\quad - \left(\frac{1}{2} \lambda_4 \lambda_{12} - \frac{15}{2} \lambda_{16}\right) z_3^2 + (2 \lambda_4 \lambda_{14} + 12 \lambda_{18}) z_3 z_5 + \lambda_4 \lambda_{16} z_3 z_7 \\
&\quad - \left(\frac{5}{6} \lambda_8 \lambda_{12} - 2 \lambda_6 \lambda_{14} - \frac{9}{2} \lambda_4 \lambda_{16}\right) z_5^2 + (2 \lambda_6 \lambda_{16} + 6 \lambda_4 \lambda_{18}) z_5 z_7 \\
&\quad - \left(\frac{2}{3} \lambda_{12}^2 - \frac{3}{2} \lambda_8 \lambda_{16} - 4 \lambda_6 \lambda_{18}\right) z_7^2 - 2 \lambda_{10}, \\
H_{12} &= \partial_5 \partial_7 - \left(\frac{2}{3} \lambda_{14} z_3 - 3 \lambda_{16} z_5 - 2 \lambda_{18} z_7\right) \partial_1 - \left(\frac{10}{9} \lambda_{14} z_5 - \lambda_{16} z_7\right) \partial_3 - \frac{14}{9} \lambda_{14} z_7 \partial_5 \\
&\quad + \lambda_{12} z_7 \partial_7 - \frac{1}{9} \lambda_{14} z_1^2 + 5 \lambda_{16} z_1 z_3 + 4 \lambda_{18} z_1 z_5 - \left(\frac{1}{3} \lambda_4 \lambda_{14} - 9 \lambda_{18}\right) z_3^2 \\
&\quad + 3 \lambda_4 \lambda_{16} z_3 z_5 + 2 \lambda_4 \lambda_{18} z_3 z_7 - \left(\frac{5}{9} \lambda_8 \lambda_{14} - 3 \lambda_6 \lambda_{16} - 6 \lambda_4 \lambda_{18}\right) z_5^2 \\
&\quad + (\lambda_8 \lambda_{16} + 4 \lambda_6 \lambda_{18}) z_5 z_7 - \left(\frac{7}{9} \lambda_{12} \lambda_{14} - \lambda_{10} \lambda_{16} - 3 \lambda_8 \lambda_{18}\right) z_7^2 - \lambda_{12}, \\
H_{14} &= \frac{1}{2} \partial_7^2 - \left(\frac{1}{3} \lambda_{16} z_3 - 4 \lambda_{18} z_5\right) \partial_1 - \left(\frac{5}{9} \lambda_{16} z_5 - 2 \lambda_{18} z_7\right) \partial_3 - \frac{7}{9} \lambda_{16} z_7 \partial_5 - \frac{1}{18} \lambda_{16} z_1^2 \\
&\quad + 6 \lambda_{18} z_1 z_3 - \frac{1}{6} \lambda_4 \lambda_{16} z_3^2 + 4 \lambda_4 \lambda_{18} z_3 z_5 - \left(\frac{5}{18} \lambda_8 \lambda_{16} - 4 \lambda_6 \lambda_{18}\right) z_5^2 \\
&\quad + 2 \lambda_8 \lambda_{18} z_5 z_7 - \left(\frac{7}{18} \lambda_{12} \lambda_{16} - 2 \lambda_{10} \lambda_{18}\right) z_7^2 - \frac{1}{2} \lambda_{14}.
\end{aligned}$$

§ 6. Приложение: операторы дифференцирования для рода $g = 4$

Напомним, что \mathcal{F} — поле гиперэллиптических функций рода g . В этом параграфе мы изучаем задачу построения алгебры Ли дифференцирований поля \mathcal{F} , т. е. задачу нахождения $3g$ независимых дифференциальных операторов \mathcal{L} , таких, что $\mathcal{L}\mathcal{F} \subset \mathcal{F}$. Постановку этой задачи, а также общий подход к ее решению можно найти в работах [15], [16]. Обзор представлен в [7]. В [18], [5], [14] явное решение этой задачи получено в случаях $g = 1, 2, 3$. Здесь мы даем явный ответ в случае рода $g = 4$.

Введем кольцо функций \mathcal{R}_φ . Образующими этого градуированного кольца над $\mathbb{Q}[\lambda]$ являются функции $\psi_{k_1 \dots k_n} = -\partial_{k_1} \dots \partial_{k_n} \ln \varphi$, где $n \geq 2$, $k_s \in \{1, 3, \dots, 2g - 1\}$, и $\text{wt } \psi_{k_1 \dots k_n} = k_1 + \dots + k_n$, $\text{wt } \lambda_k = k$. Мы вводим операторы

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_0 &= L_0 - z_1 \partial_1 - 3z_3 \partial_3 - 5z_5 \partial_5 - 7z_7 \partial_7, \\
\mathcal{L}_2 &= L_2 - \psi_1 \partial_1 + \frac{4}{3} \lambda_4 z_3 \partial_1 - \left(z_1 - \frac{8}{9} \lambda_4 z_5\right) \partial_3 - \left(3z_3 - \frac{4}{9} \lambda_4 z_7\right) \partial_5 - 5z_5 \partial_7, \\
\mathcal{L}_4 &= L_4 - \psi_3 \partial_1 - \psi_1 \partial_3 - 2 \lambda_6 z_3 \partial_1 - \left(\lambda_4 z_3 - \frac{4}{3} \lambda_6 z_5\right) \partial_3 - \left(z_1 + 3 \lambda_4 z_5 - \frac{2}{3} \lambda_6 z_7\right) \partial_5 \\
&\quad - \left(3z_3 + 5 \lambda_4 z_7\right) \partial_7, \\
\mathcal{L}_6 &= L_6 - \psi_5 \partial_1 - \psi_3 \partial_3 - \psi_1 \partial_5 + \frac{5}{3} \lambda_8 z_3 \partial_1 + \frac{16}{9} \lambda_8 z_5 \partial_3 \\
&\quad - \left(\lambda_4 z_3 + 2 \lambda_6 z_5 - \frac{8}{9} \lambda_8 z_7\right) \partial_5 - \left(z_1 + 3 \lambda_4 z_5 + 4 \lambda_6 z_7\right) \partial_7, \\
\mathcal{L}_8 &= L_8 - \psi_7 \partial_1 - \psi_5 \partial_3 - \psi_3 \partial_5 - \psi_1 \partial_7 + \left(\frac{4}{3} \lambda_{10} z_3 - \lambda_{12} z_5\right) \partial_1 + \frac{20}{9} \lambda_{10} z_5 \partial_3 \\
&\quad - \left(\lambda_8 z_5 - \frac{10}{9} \lambda_{10} z_7\right) \partial_5 - \left(\lambda_4 z_3 + 2 \lambda_6 z_5 + 3 \lambda_8 z_7\right) \partial_7,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{10} &= L_{10} - \psi_7 \partial_3 - \psi_5 \partial_5 - \psi_3 \partial_7 + (\lambda_{12} z_3 - 2\lambda_{14} z_5 - \lambda_{16} z_7) \partial_1 \\
&\quad + \frac{5}{3} \lambda_{12} z_5 \partial_3 + \frac{4}{3} \lambda_{12} z_7 \partial_5 - (\lambda_8 z_5 + 2\lambda_{10} z_7) \partial_7, \\
\mathcal{L}_{12} &= L_{12} - \psi_7 \partial_5 - \psi_5 \partial_7 + \left(\frac{2}{3} \lambda_{14} z_3 - 3\lambda_{16} z_5 - 2\lambda_{18} z_7\right) \partial_1 \\
&\quad + \left(\frac{10}{9} \lambda_{14} z_5 - \lambda_{16} z_7\right) \partial_3 + \frac{14}{9} \lambda_{14} z_7 \partial_5 - \lambda_{12} z_7 \partial_7, \\
\mathcal{L}_{14} &= L_{14} - \psi_7 \partial_7 + \left(\frac{1}{3} \lambda_{16} z_3 - 4\lambda_{18} z_5\right) \partial_1 + \left(\frac{5}{9} \lambda_{16} z_5 - 2\lambda_{18} z_7\right) \partial_3 + \frac{7}{9} \lambda_{16} z_7 \partial_5.
\end{aligned}$$

Обозначим алгебру Ли с этими образующими через $\mathcal{L}_{\mathcal{L}}$.

Теорема 6.1. *Если функция φ удовлетворяет системе уравнений теплопроводности в неголомном репере для рода 4, то алгебра $\mathcal{L}_{\mathcal{L}}$ является алгеброй дифференцирований кольца \mathcal{R}_{φ} .*

Доказательство следует из доказательства теоремы 5.9 в [17].

Следствие 6.2. *Для $g = 4$ алгебра $\mathcal{L}_{\mathcal{L}}$ при $\varphi = \sigma$ является алгеброй дифференцирований поля \mathcal{F} .*

Положим

$$\begin{aligned}
w_{0,1} &= \psi_1, \quad w_{0,3} = 3\psi_3, \quad w_{2k,5} = 5\psi_5, \quad w_{0,7} = 7\psi_7, \\
w_{2,1} &= \frac{1}{2}\psi_{111} + \psi_3 - \frac{7}{9}\lambda_4 z_1, \\
w_{2,3} &= \frac{1}{2}\psi_{113} - \frac{4}{3}\lambda_4 \psi_1 + 3\psi_5 + \left(3\lambda_8 - \frac{4}{3}\lambda_4^2\right) z_3, \\
w_{2,5} &= \frac{1}{2}\psi_{115} - \frac{8}{9}\lambda_4 \psi_3 + 5\psi_7 + \left(5\lambda_{12} - \frac{8}{9}\lambda_4 \lambda_8\right) z_5, \\
w_{2,7} &= \frac{1}{2}\psi_{117} - \frac{4}{9}\lambda_4 \psi_5 + \left(7\lambda_{16} - \frac{4}{9}\lambda_4 \lambda_{12}\right) z_7, \\
w_{4,1} &= \psi_{113} + \psi_5 - \frac{2}{3}\lambda_6 z_1 + \lambda_8 z_3, \\
w_{4,3} &= \psi_{133} - 2\lambda_6 \psi_1 + \lambda_4 \psi_3 + 3\psi_7 + \lambda_8 z_1 + \left(6\lambda_{10} - 2\lambda_4 \lambda_6\right) z_3 + 3\lambda_{12} z_5, \\
w_{4,5} &= \psi_{135} - \frac{4}{3}\lambda_6 \psi_3 + 3\lambda_4 \psi_5 + 3\lambda_{12} z_3 + \left(10\lambda_{14} - \frac{4}{3}\lambda_6 \lambda_8\right) z_5 + 5\lambda_{16} z_7, \\
w_{4,7} &= \psi_{137} - \frac{2}{3}\lambda_6 \psi_5 + 5\lambda_4 \psi_7 + 5\lambda_{16} z_5 + \left(14\lambda_{18} - \frac{2}{3}\lambda_6 \lambda_{12}\right) z_7, \\
w_{6,1} &= \frac{1}{2}\psi_{133} + \psi_{115} + \psi_7 - \frac{5}{9}\lambda_8 z_1 + 2\lambda_{10} z_3 + \lambda_{12} z_5, \\
w_{6,3} &= \frac{1}{2}\psi_{333} + \psi_{135} - \frac{5}{3}\lambda_8 \psi_1 + \lambda_4 \psi_5 + 2\lambda_{10} z_1 - \left(\frac{5}{3}\lambda_4 \lambda_8 - 9\lambda_{12}\right) z_3 \\
&\quad + 6\lambda_{14} z_5 + 3\lambda_{16} z_7, \\
w_{6,5} &= \frac{1}{2}\psi_{335} + \psi_{155} - \frac{16}{9}\lambda_8 \psi_3 + 2\lambda_6 \psi_5 + 3\lambda_4 \psi_7 + \lambda_{12} z_1 + 6\lambda_{14} z_3 \\
&\quad + \left(3\lambda_4 \lambda_{12} - \frac{16}{9}\lambda_8^2 + 15\lambda_{16}\right) z_5 + 10\lambda_{18} z_7, \\
w_{6,7} &= \frac{1}{2}\psi_{337} + \psi_{157} - \frac{8}{9}\lambda_8 \psi_5 + 4\lambda_6 \psi_7 + 3\lambda_{16} z_3 + 10\lambda_{18} z_5 - \left(\frac{8}{9}\lambda_8 \lambda_{12} - 5\lambda_4 \lambda_{16}\right) z_7, \\
w_{8,1} &= \psi_{135} + \psi_{117} - \frac{4}{9}\lambda_{10} z_1 + 3\lambda_{12} z_3 + 2\lambda_{14} z_5 + \lambda_{16} z_7, \\
w_{8,3} &= \psi_{335} + \psi_{137} - \frac{4}{3}\lambda_{10} \psi_1 + \lambda_4 \psi_7 \\
&\quad + 3\lambda_{12} z_1 - \left(\frac{4}{3}\lambda_4 \lambda_{10} - 12\lambda_{14}\right) z_3 + \left(\lambda_4 \lambda_{12} + 9\lambda_{16}\right) z_5 + 6\lambda_{18} z_7, \\
w_{8,5} &= \psi_{355} + \psi_{157} + \lambda_{12} \psi_1 - \frac{20}{9}\lambda_{10} \psi_3 + \lambda_8 \psi_5 + 2\lambda_6 \psi_7 + 2\lambda_{14} z_1 \\
&\quad + \left(\lambda_4 \lambda_{12} + 9\lambda_{16}\right) z_3 - \left(\frac{20}{9}\lambda_8 \lambda_{10} - 2\lambda_6 \lambda_{12} - 6\lambda_4 \lambda_{14} - 20\lambda_{18}\right) z_5 + 6\lambda_4 \lambda_{16} z_7, \\
w_{8,7} &= \psi_{357} + \psi_{177} - \frac{10}{9}\lambda_{10} \psi_5 + 3\lambda_8 \psi_7 \\
&\quad + \lambda_{16} z_1 + 6\lambda_{18} z_3 + 3\lambda_4 \lambda_{16} z_5 - \left(\frac{10}{9}\lambda_{10} \lambda_{12} - 4\lambda_6 \lambda_{16} - 10\lambda_4 \lambda_{18}\right) z_7, \\
w_{10,1} &= \frac{1}{2}\psi_{155} + \psi_{137} - \frac{1}{3}\lambda_{12} z_1 + 4\lambda_{14} z_3 + 3\lambda_{16} z_5 + 2\lambda_{18} z_7,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_{10,3} &= \frac{1}{2}\psi_{355} + \psi_{337} - \lambda_{12}\psi_1 + 4\lambda_{14}z_1 - (\lambda_4\lambda_{12} - 15\lambda_{16})z_3 \\
&\quad + (2\lambda_4\lambda_{14} + 12\lambda_{18})z_5 + \lambda_4\lambda_{16}z_7, \\
w_{10,5} &= \frac{1}{2}\psi_{555} + \psi_{357} + 2\lambda_{14}\psi_1 - \frac{5}{3}\lambda_{12}\psi_3 + \lambda_8\psi_7 + 3\lambda_{16}z_1 + (2\lambda_4\lambda_{14} + 12\lambda_{18})z_3 \\
&\quad - (\frac{5}{3}\lambda_8\lambda_{12} - 4\lambda_6\lambda_{14} - 9\lambda_4\lambda_{16})z_5 + (2\lambda_6\lambda_{16} + 6\lambda_4\lambda_{18})z_7, \\
w_{10,7} &= \frac{1}{2}\psi_{557} + \psi_{377} + \lambda_{16}\psi_1 - \frac{4}{3}\lambda_{12}\psi_5 + 2\lambda_{10}\psi_7 + 2\lambda_{18}z_1 + \lambda_4\lambda_{16}z_3 \\
&\quad + (2\lambda_6\lambda_{16} + 6\lambda_4\lambda_{18})z_5 - (\frac{4}{3}\lambda_{12}^2 - 3\lambda_8\lambda_{16} - 8\lambda_6\lambda_{18})z_7, \\
w_{12,1} &= \psi_{157} - \frac{2}{9}\lambda_{14}z_1 + 5\lambda_{16}z_3 + 4\lambda_{18}z_5, \\
w_{12,3} &= \psi_{357} - \frac{2}{3}\lambda_{14}\psi_1 + 5\lambda_{16}z_1 - (\frac{2}{3}\lambda_4\lambda_{14} - 18\lambda_{18})z_3 + 3\lambda_4\lambda_{16}z_5 + 2\lambda_4\lambda_{18}z_7, \\
w_{12,5} &= \psi_{557} + 3\lambda_{16}\psi_1 - \frac{10}{9}\lambda_{14}\psi_3 + 4\lambda_{18}z_1 \\
&\quad + 3\lambda_4\lambda_{16}z_3 - (\frac{10}{9}\lambda_8\lambda_{14} - 6\lambda_6\lambda_{16} - 12\lambda_4\lambda_{18})z_5 + (\lambda_8\lambda_{16} + 4\lambda_6\lambda_{18})z_7, \\
w_{12,7} &= \psi_{577} + 2\lambda_{18}\psi_1 + \lambda_{16}\psi_3 - \frac{14}{9}\lambda_{14}\psi_5 + \lambda_{12}\psi_7 + 2\lambda_4\lambda_{18}z_3 \\
&\quad + (\lambda_8\lambda_{16} + 4\lambda_6\lambda_{18})z_7 - (\frac{14}{9}\lambda_{12}\lambda_{14} - 2\lambda_{10}\lambda_{16} - 6\lambda_8\lambda_{18})z_7, \\
w_{14,1} &= \frac{1}{2}\psi_{177} - \frac{1}{9}\lambda_{16}z_1 + 6\lambda_{18}z_3, \\
w_{14,3} &= \frac{1}{2}\psi_{377} - \frac{1}{3}\lambda_{16}\psi_1 + 6\lambda_{18}z_1 - \frac{1}{3}\lambda_4\lambda_{16}z_3 + 4\lambda_4\lambda_{18}z_5, \\
w_{14,5} &= \frac{1}{2}\psi_{577} + 4\lambda_{18}\psi_1 - \frac{5}{9}\lambda_{16}\psi_3 + 4\lambda_4\lambda_{18}z_3 - (\frac{5}{9}\lambda_8\lambda_{16} - 8\lambda_6\lambda_{18})z_5 + 2\lambda_8\lambda_{18}z_7, \\
w_{14,7} &= \frac{1}{2}\psi_{777} + 2\lambda_{18}\psi_3 - \frac{7}{9}\lambda_{16}\psi_5 + 2\lambda_8\lambda_{18}z_5 - (\frac{7}{9}\lambda_{12}\lambda_{16} - 4\lambda_{10}\lambda_{18})z_7.
\end{aligned}$$

Мы получаем для рода $g = 4$ теорему, аналогичную теоремам 4.1, 4.2 и 4.3 из [17]:

Теорема 6.3. *Для $g = 4$ решение φ системы уравнений теплопроводности (6) дает решение $(\psi_1, \psi_3, \psi_5, \psi_7) = (\partial_1 \ln \varphi, \partial_3 \ln \varphi, \partial_5 \ln \varphi, \partial_7 \ln \varphi)$ системы нелинейных дифференциальных уравнений, которые мы называем аналогом уравнения Бюргера для рода $g = 4$:*

$$\mathcal{L}_{2k}(\psi_1, \psi_3, \psi_5, \psi_7) = (w_{2k,1}, w_{2k,3}, w_{2k,5}, w_{2k,7}), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. \quad (13)$$

Доказательство можно получить непосредственным вычислением.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, *Уравнения теплопроводности в неголономном репере*, Функци. анализ и его прил., **38**:2 (2004), 12–27.
- [2] Д. Мамфорд, *Лекции о тэта-функциях*, Мир, М., 1988.
- [3] T. Shiota, *Characterization of Jacobian varieties in terms of soliton equations*, Invent. Math., **83**:2 (1986), 333–382.
- [4] V. M. Buchstaber, V. Z. Enolskii, D. V. Leikin, *Hyperelliptic Kleinian functions and applications*, in: *Solitons, Geometry, and Topology: On the Crossroad*, v. 179, Adv. Math. Sci., Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, vol. 33, Providence, RI, 1997, 1–34.
- [5] В. М. Бухштабер, *Полиномиальные динамические системы и уравнение Кортевега-де Фриза*, в кн.: *Современные проблемы математики, механики и математической физики. II, Сборник статей, Тр. МИАН*, т. 294, МАИК, М., 2016, 191–215.
- [6] V. M. Buchstaber, V. Z. Enolskii, D. V. Leikin, *Multi-dimensional sigma-functions*, arXiv: 1208.0990.

- [7] V. M. Buchstaber, V. Z. Enolski, D. V. Leykin, σ -functions: *Old and new results*, in: *Integrable Systems and Algebraic Geometry*, v. 2, LMS Lecture Note Series, vol. 459, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2019, 175–214; [arXiv: 1810.11079](https://arxiv.org/abs/1810.11079).
- [8] В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, *Полиномиальные алгебры Ли*, Функци. анализ и его прил., **36**:4 (2002), 18–34.
- [9] V. I. Arnold, *Singularities of Caustics and Wave Fronts*, Mathematics and its Applications, vol. 62, Kluwer Academic Publisher Group, Dordrecht, 1990.
- [10] J. C. Eilbeck, J. Gibbons, Y. Onishi, S. Yasuda, *Theory of heat equations for sigma functions*, [arXiv: 1711.08395](https://arxiv.org/abs/1711.08395).
- [11] H. F. Baker, *On the hyperelliptic sigma functions*, Amer. J. Math., **20**:4 (1898), 301–384.
- [12] V. M. Buchstaber, V. Z. Enolskii, D. V. Leikin, *Kleinian functions, hyperelliptic Jacobians and applications*, Rev. Math. Math. Phys., **10**:2 (1997), 3–120.
- [13] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Reprint of 4th (1927) ed., Vol 2. Transcendental functions, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996.
- [14] Е. Ю. Бунькова, *Differentiation of genus 3 hyperelliptic functions*, Eur. J. Math., **4**:1 (2018), 93–112; [arXiv: 1703.03947](https://arxiv.org/abs/1703.03947).
- [15] В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, *Дифференцирование абелевых функций по параметрам*, УМН, **62**:4(376) (2007), 153–154.
- [16] В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, *Решение задачи дифференцирования абелевых функций по параметрам для семейств (n, s) -кривых*, Функци. анализ и его прил., **42**:4 (2008), 24–36.
- [17] В. М. Бухштабер, Е. Ю. Бунькова, *Алгебры Ли операторов теплопроводности в неголономном репере*, Матем. заметки, **108**:1 (2020), 17–32.
- [18] F. G. Frobenius, L. Stickelberger, *Über die Differentiation der elliptischen Functionen nach den Perioden und Invarianten*, J. Reine Angew. Math., **92** (1882), 311–337.

В. М. Бухштабер

Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук, Москва, Россия
E-mail: buchstab@mi-ras.ru

Поступила в редакцию
21 августа 2020 г.
После доработки
21 августа 2020 г.

Е. Ю. Бунькова

Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук, Москва, Россия
E-mail: bunkova@mi-ras.ru

Принята к публикации
3 сентября 2020 г.