А. И. Будкин, Группы с нильпотентными n-порожденными нормальными подгруппами,
Сиб. матем. журн., 2023, том 64, номер 4, 733–741

https://www.mathnet.ru/smj7793

Сибирский математический журнал
Июль—август, 2023. Том 64, № 4

УДК 512.544

ГРУППЫ С НИЛЬПОТЕНТНЫМИ n–ПОРОЖДЕННЫМИ НОРМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

А. И. Будкин

Аннотация. Пусть $L_n(\mathscr{N})$ — класс всех групп G, в которых нормальное замыкание любой n-порожденной подгруппы группы G принадлежит $\mathscr{N}$. Известно, что если $\mathscr{N}$ — квазимногообразие групп, то $L_n(\mathscr{N})$ — также квазимногообразие. В данной работе найдены условия на $\mathscr{N}$, при выполнении которых последовательность $L_1(\mathscr{N}), L_2(\mathscr{N}), \dots$ содержит бесконечное множество различных квазимногообразий. В частности, такими являются квазимногообразия $\mathscr{N}$, порожденные конечно-порожденной нильпотентной неабелевой группой.

DOI 10.33048/smzh.2023.64.406

Ключевые слова: нильпотентная группа, квазимногообразие, аксиоматический ранг, класс Леви.

Введение

Пусть $\mathscr{N}$ — класс групп. Через $L_n(\mathscr{N})$ будем обозначать класс всех групп G, в которых нормальное замыкание $\langle g_1, \dots, g_n\rangle^G$ любой n-порожденной подгруппы $\langle g_1, \dots, g_n\rangle$ группы G принадлежит $\mathscr{N}$. Оператор L_n для каждого натурального числа n введен в [1]. Оказалось [1], что если $\mathscr{M}$ — квазимногообразие групп, то $L_n(\mathscr{M})$ снова квазимногообразие групп. Возникает цепочка

$$L_1(\mathscr{N}) \supseteq L_2(\mathscr{N}) \supseteq L_3(\mathscr{N}) \supseteq \dots \supseteq \mathscr{N}, \tag{1}$$

в которой $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} L_n(\mathscr{N}) = \mathscr{N}$. Эту цепочку будем называть *бесконечной*, если она содержит бесконечное множество различных квазимногообразий $L_n(\mathscr{N})$.

Данная статья посвящена изучению таких цепочек. Несложно заметить, что если квазимногообразие $\mathscr{N}$ имеет конечный аксиоматический ранг (т. е. задается системой квазитождеств от конечного числа переменных), то цепочка (1) конечная. Справедливость обратного утверждения неизвестна. В частности, если $\mathscr{N}$ — любое квазимногообразие абелевых групп, то множество $\{L_n(\mathscr{N}) \mid n = 1, 2, \dots\}$ конечное.

К настоящему времени почти все работы по изучению классов $L_n(\mathscr{N})$ посвящены классам вида $L_1(\mathscr{N})$, называемыми *классами Леви, порожденными* $\mathscr{N}$. Особое внимание здесь было уделено нильпотентным квазимногообразиям $\mathscr{N}$ групп. Одними из первыми работами в этом направлении явились статьи [2, 3]. Затем было найдено (см., [4, 5] и библиографию в них) описание классов Леви почти абелевых квазимногообразий нильпотентных групп, т. е. неабелевых квазимногообразий групп, все собственные подквазимногообразия которых абелевы. Вопросы аксиоматизируемости классов Леви нильпотентных квазимногообразий групп изучались в [6–8]. В частности, в [6, 8] установлена конечная аксиоматизируемость классов Леви $L_1(\mathscr{N})$ для ряда квазимногообразий $\mathscr{N}$, порожденных конечными нильпотентными группами. В [7] доказано, что если $\mathscr{N}$ — квазимногообразие, порожденное неабелевой свободной 2-ступенно нильпотентной группой с коммутантом простой экспоненты p, то $L_1(\mathscr{N})$ имеет конечный аксиоматический ранг. В [9] найдено континуальное множество нильпотентных квазимногообразий $\mathscr{N}$, у которых классы Леви $L_1(\mathscr{N})$ совпадают.

В данной работе найдены условия, при выполнении которых цепочка (1) бесконечная. В частности, установлено, что если квазимногообразие $\mathscr{N}$ порождается конечно-порожденной нильпотентной неабелевой группой, то цепочка (1) бесконечная.

1. Предварительные сведения

В работе используются следующие обозначения: $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$; $\langle x, y, \dots \rangle$ — группа, порожденная элементами $x, y, \dots$; $\langle x \rangle$ — циклическая группа, порожденная x; $\langle g_1, \dots, g_n\rangle^G = \langle g^{-1}g_1g, \dots, g^{-1}g_ng \mid g \in G\rangle$ — нормальное замыкание подгруппы $\langle g_1, \dots, g_n\rangle$ в G; $Z(G)$ — центр группы G; qM — квазимногообразие, порожденное множеством групп M, если $M = \{G\}$, то вместо qM пишем просто qG.

Запись $G \models \Sigma$ означает, что всякая формула из Σ истинна в группе G. $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G, $\tau(G)$ — периодическая часть группы G.

Пусть A и B — группы, $a \in Z(A)$, $b \in Z(B)$ — элементы одинаковых порядков. Тогда группа $A \times B/\langle ab^{-1}\rangle$ обозначается через $A \times B(a = b)$ и называется *прямым произведением групп* A и B *с объединенными подгруппами* $\langle a\rangle$ и $\langle b\rangle$. Легко заметить, что существуют канонические изоморфные вложения $\varphi : A \to A \times B(a = b)$, $\psi : B \to A \times B(a = b)$ такие, что

$$A \times B(a = b) = A^\varphi B^\psi, \quad [A^\varphi, B^\psi] = 1, \quad A^\varphi \cap B^\psi = \langle a\rangle.$$

Группы A и A^φ, B и B^ψ условимся отождествлять.

$\mathscr{N}_2$ — класс нильпотентных групп ступени ≤ 2.

Квазимногообразие групп называется *локально конечным* (*локально нильпотентным*), если каждая его конечно-порожденная группа конечна (нильпотентна).

Говорят, что *аксиоматический ранг квазимногообразия $\mathscr{N}$ в $\mathscr{M}$ равен n* ($\mathscr{N} \subseteq \mathscr{M}$), если $\mathscr{N}$ можно задать в $\mathscr{M}$ множеством квазитождеств от n переменных и нельзя задать множеством квазитождеств от меньшего числа переменных. Если такого числа n не существует, то аксиоматический ранг $\mathscr{N}$ в $\mathscr{M}$ бесконечный.

При написании квазитождеств кванторы всеобщности будем опускать.

Отметим, что всякое тождество $t(x_1, \dots, x_n) = 1$ эквивалентно квазитождеству $x_1 = x_1 \to t(x_1, \dots, x_n) = 1$.

Ниже понадобится следующий признак [10, следствие 2.1.21] принадлежности конечно-определенной группы G квазимногообразию $q\mathscr{R}$.

Лемма 1. *Конечно-определенная в квазимногообразии $\mathscr{M}$ группа G принадлежит квазимногообразию, порожденному классом групп $\mathscr{R}$ ($\mathscr{R} \subseteq \mathscr{M}$), тогда и только тогда, когда для любого элемента $g \in G$, $g \neq 1$, существует гомоморфизм φ_g группы G в некоторую группу из класса $\mathscr{R}$ такой, что $g^{\varphi_g} \neq 1$.*

С основными определениями можно познакомиться в [10, 11].

2. Основные результаты

Лемма 2. *Пусть $\mathscr{N}$ — произвольное квазимногообразие групп. Предположим, что Σ_n — множество всех квазитождеств от n переменных, истинных в каждой группе из $\mathscr{N}$. Если G — n-порожденная группа, то $G \in \mathscr{N}$ тогда и только тогда, когда $G \models \Sigma_n$.*

Доказательство. Пусть Σ — множество всех квазитождеств, истинных в каждой группе из $\mathscr{N}$, $G = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$. Предположим, что $G \models \Sigma_n$. Возьмем произвольное квазитождество $\Phi(x_1, \dots, x_m) \in \Sigma$ и покажем, что оно истинно в G. Предположим, что левая часть $\Phi(x_1, \dots, x_m)$ истинна в G при подстановке $x_1 \to b_1, \dots, x_m \to b_m$ $(b_1, \dots, b_m \in G)$. Поскольку элементы $a_1, \dots, a_n$ порождают G, существуют групповые слова $t_i(x_1, \dots, x_n)$ такие, что $b_i = t_i(a_1, \dots, a_n)$ $(i = 1, \dots, m)$. Рассмотрим квазитождество

$$\Psi = \Phi(t_1(x_1, \dots, x_n), \dots, t_m(x_1, \dots, x_n)).$$

Оно является следствием $\Phi(x_1, \dots, x_m)$, поэтому принадлежит множеству Σ и тем самым $\Psi \in \Sigma_n$. Отсюда, так как левая часть квазитождества Ψ истинна в G при подстановке $x_1 \to a_1, \dots, x_n \to a_n$, то и правая часть $t(t_1(x_1, \dots, x_n), \dots, t_m(x_1, \dots, x_n)) = 1$ данного квазитождества истинна в G при этой подстановке, т. е.

$$1 = t(t_1(a_1, \dots, a_n), \dots, t_m(a_1, \dots, a_n)) = t(b_1, \dots, b_m).$$

Итак, $G \models \Phi(x_1, \dots, x_m)$, значит, $G \in \mathscr{N}$. Лемма доказана.

Отметим, что эта лемма истинна не только для групп, но и в случае произвольных универсальных алгебр.

Лемма 3. *Пусть $\mathscr{M}$, $\mathscr{N}$ — квазимногообразия групп, $\mathscr{M}$ локально конечное и локально нильпотентное, $\mathscr{N} \subseteq \mathscr{M}$. Если множество $\{L_n(\mathscr{N}) \cap \mathscr{M} \mid n = 1, 2, \dots\}$ конечное, то аксиоматический ранг квазимногообразия $\mathscr{N}$ в $\mathscr{M}$ конечен.*

Доказательство. Ясно, что

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (L_n(\mathscr{N}) \cap \mathscr{M}) = \mathscr{N}.$$

Следовательно, существует n такое, что $L_n(\mathscr{N}) \cap \mathscr{M} = L_{n+1}(\mathscr{N}) \cap \mathscr{M} = \dots = \mathscr{N}$. Будем доказывать, что аксиоматический ранг $\mathscr{N}$ в $\mathscr{M}$ не больше n.

Предположим, что это не так. Тогда найдется конечно-порожденная (и, следовательно, конечная) группа $G \in \mathscr{M} \setminus \mathscr{N}$ такая, что $G \models \Sigma_n$ (где Σ_n — множество квазитождеств от n переменных, истинных в каждой группе из $\mathscr{N}$). Считаем, что среди таких групп взята группа G наименьшего порядка. Из выбора группы G получаем, что все ее собственные подгруппы содержатся в $\mathscr{N}$.

Пусть $H = \langle a_1, \dots, a_n \rangle^G$ — нормальное замыкание произвольной n-порожденной подгруппы группы G. Допустим, что $H = G$. Так как $H \subseteq \langle a_1, \dots, a_n \rangle G'$, то $\langle a_1, \dots, a_n \rangle G' = G$. Хорошо известно (см., например, [11, теорема 16.2.5]), что коммутант нильпотентной группы содержится в подгруппе Фраттини этой группы. Так как подгруппа Фраттини состоит из множества непорождающих элементов [11, теорема 2.2.6] данной группы, G' можно удалить из множества порождающих группы G. Отсюда следует, что $\langle a_1, \dots, a_n\rangle = G$. Но ввиду леммы 2 $\langle a_1, \dots, a_n\rangle \in \mathscr{N}$. Это противоречит тому, что $G \notin \mathscr{N}$.

Мы доказали, что H — собственная подгруппа группы G. По вышесказанному $H \in \mathscr{N}$. Таким образом, установлено, что $G \in L_n(\mathscr{N}) \cap \mathscr{M} = \mathscr{N}$; противоречие с тем, что $G \notin \mathscr{N}$. Лемма доказана.

В [12] доказано, что аксиоматический ранг квазимногообразия, порожденного конечной группой, содержащей неабелеву силовскую подгруппу, бесконечен. Из леммы 3 (беря в качестве $\mathscr{M}$ многообразие, порожденное классом $\mathscr{N}$) получаем

Следствие 1. *Если $\mathscr{N}$ — квазимногообразие, порожденное конечной неабелевой нильпотентной группой, то цепочка* (1) *бесконечная.*

Следствие 2. *Пусть для некоторого простого числа p квазимногообразие $\mathscr{M}$, порожденное всеми конечными 2-ступенно нильпотентными p-группами с коммутантом экспоненты p из квазимногообразия $\mathscr{N}$, порождается некоторой конечной неабелевой группой. Тогда цепочка* (1) *бесконечная.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{M} = qG$, где G — p-группа с коммутантом экспоненты p, Σ_n — множество квазитождеств от n переменных, истинных в каждой группе из $\mathscr{M}$. Отметим, что если B — конечная абелева p-группа из $\mathscr{N}$, то из определения $\mathscr{M}$ следует, что $G \times B \in \mathscr{M}$, т. е. все конечные абелевы p-группы из $\mathscr{N}$ содержатся в $\mathscr{M}$. Поскольку тождества $x^{p^m} = 1$ (для подходящего m), $[x, y]^p = 1$, $[x, y, z] = 1$ истинны в G, каждое Σ_n при $n \geq 3$ содержит эквивалентные им квазитождества. Это означает, что эти тождества истинны во всякой группе из $L_n(\mathscr{M})$ ($n \geq 3$), т. е. конечно-порожденные группы из $L_n(\mathscr{M})$ при $n \geq 3$ являются конечными нильпотентными p-группами ступени не выше двух с коммутантом экспоненты p.

Из следствия 1 получаем, что цепочка $L_1(\mathscr{M}) \supseteq L_2(\mathscr{M}) \supseteq L_3(\mathscr{M}) \supseteq \dots$ бесконечная. Возьмем любые i, j ($3 \leq i < j$) такие, что $L_i(\mathscr{M}) \supsetneqq L_j(\mathscr{M})$, и покажем, что $L_i(\mathscr{N}) \supsetneqq L_j(\mathscr{N})$.

Пусть, напротив, $L_i(\mathscr{N}) = L_j(\mathscr{N})$. Возьмем любую конечную группу $A \in L_i(\mathscr{M}) \setminus L_j(\mathscr{M})$. Поскольку $A \notin L_j(\mathscr{M})$, то A содержит j-порожденную подгруппу H, нормальное замыкание которой H^A не содержится в $\mathscr{M}$. Но $L_i(\mathscr{M}) \subseteq L_i(\mathscr{N})$, значит, $A \in L_i(\mathscr{N}) = L_j(\mathscr{N})$. Из включения $A \in L_j(\mathscr{N})$ следует, что $H^A \in \mathscr{N}$. Итак, H^A — конечная абелева p-группа либо нильпотентная p-группа ступени 2 с коммутантом экспоненты p из $\mathscr{N}$. Из определения $\mathscr{M}$ вытекает, что $H^A \in \mathscr{M}$. Полученное противоречие означает, что $L_i(\mathscr{N}) \supsetneqq L_j(\mathscr{N})$. Следствие доказано.

Пусть p — простое число, группа H_p имеет в $\mathscr{N}_2$ следующее представление:

$$H_p = \langle a, b \mid [a, b]^p = 1\rangle.$$

Зафиксируем семейство групп $\{B_k \mid k = 1, 2, \dots\}$, изоморфных свободной в qH_p группе ранга $2n$. Пусть группа B_k порождается элементами $x_{1,k}, \dots, x_{2n,k}$ и

$$c_k = \prod_{i=1}^{n} [x_{i,k}, x_{n+i,k}] \in Z(B_k).$$

Тогда по определению полагаем

$$B = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_m,$$

$$C_1 = B_1, C_2 = C_1 \times B_2(c_1 = c_2), \dots, C_m = C_{m-1} \times B_m(c_{m-1} = c_m).$$

Заметим, что в данной работе, как правило, $m > C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$. Группа C_m является прямым произведением групп $B_1, B_2, \dots, B_m$ с объединенными подгруппами $\langle c_1 \rangle, \langle c_2 \rangle, \dots, \langle c_m \rangle$.

Пусть $\varphi : B \to C_m$ — естественный гомоморфизм. Ясно, что $\ker \varphi = \langle c_1 c_2^{-1}, c_1 c_3^{-1}, \dots, c_1 c_m^{-1} \rangle$ — конечная группа.

Лемма 4. *При любом m и при каждом $n > \frac{l(l-1)}{2}$ имеет место включение $C_m \in L_l(qH_p)$.*

Доказательство. Пусть $H = \langle h_1, \dots, h_l \rangle^{C_m}$. Среди прообразов группы H при φ зафиксируем прообраз A с периодической группой $\tau(A)$ наименьшего порядка.

Покажем, что $\tau(A) \cap \ker \varphi \leq \Phi(A)$, где $\Phi(A)$ — подгруппа Фраттини группы A. Предположим, что это неверно. Тогда существуют максимальная подгруппа R группы A и элемент $g \in \tau(A) \cap \ker \varphi$ такие, что $g \notin R$. Поскольку R — максимальная подгруппа группы A, то $A = \langle R, g \rangle$, откуда $H = A^\varphi = \langle R^\varphi, g^\varphi \rangle = R^\varphi$. Так как g — элемент конечного порядка, из $g \notin R$ следует, что $\tau(R)$ строго содержится в $\tau(A)$. Это противоречит выбору группы A. Итак, $\tau(A) \cap \ker \varphi \leq \Phi(A)$.

Всякий элемент конечного порядка в группе H_p имеет порядок p. Этот факт записывается на языке квазитождеств. Следовательно, поскольку $A \in qH_p$, элементы конечных порядков являются элементами порядка p. Кроме того, в H_p истинны квазитождества

$$x^p = \prod_{i=1}^{s} [x_i, x_{s+i}] \to x^p = 1, \quad s = 1, 2, \dots.$$

Отсюда следует, что A/A' разлагается в прямое произведение бесконечных циклических групп и групп порядка p. Как ранее замечено, коммутант нильпотентной группы содержится в ее подгруппе Фраттини. Из этих утверждений легко выводится, что $\Phi(A) = A'$.

Зафиксируем любые элементы $a_1, \dots, a_l$ из A такие, что $a_1^\varphi = h_1, \dots, a_l^\varphi = h_l$. Пусть $S = \langle a_1, \dots, a_l \rangle^B$. Покажем, что $A \subseteq S \ker \varphi$. Пусть $a \in A$, $h = a^\varphi \in H$. Ясно, что $S^\varphi = H$. Возьмем любой элемент $u \in S$ такой, что $u^\varphi = h$. Прообразы одного и того же элемента при φ отличаются сомножителем из $\ker \varphi$. Следовательно, $a = uc$ для некоторого $c \in \ker \varphi$, откуда $a \in S \ker \varphi$, поэтому $A \subseteq S \ker \varphi$.

Так как $S \subseteq \langle a_1, \dots, a_l \rangle B'$ и $\ker \varphi \subseteq Z(B)$, то $(S \ker \varphi)' \subseteq \langle [a_i, a_j] \mid 1 \leq i < j \leq l \rangle$. Значит, $A' = \langle [a_i, a_j] \mid 1 \leq i < j \leq l \rangle$.

Покажем, что $\tau(A) \cap \ker \varphi = 1$.

Пусть $g \in \tau(A) \cap \ker \varphi$, $g \neq 1$. Поскольку $\Phi(A) = A'$, элемент g можно представить в виде произведения $q = C_l^2$ коммутаторов. Таким образом, элемент g имеет вид

$$g = \prod_{i=1}^{q} [f_i, f_{q+i}].$$

Так как $g \in \ker \varphi$, то g можно записать следующим образом:

$$g = \prod_{i=2}^{m} (c_1 c_i^{-1})^{t_i}.$$

Следовательно, g можно представить так:

$$g = c_1^{t_2+t_3+\dots} \prod_{i=2}^{m} c_i^{-t_i}.$$

Поскольку $g \neq 1$, некоторый элемент c_i (пусть, для удобства, это c_1) входит в g с показателем, не делящемся на p. Пусть $F_{2n} = \langle y_1, \dots, y_{2n} \rangle$ — свободная qH_p-группа ранга $2n$, $\pi : B \to F_{2n}$ — гомоморфизм (проектирование), при котором $x_{1,1}^{\pi} = y_1, \dots, x_{2n,1}^{\pi} = y_{2n}$, образы остальных порождающих группы B равны 1. Отсюда выводим, что

$$\prod_{i=1}^{q} [f_i^{\pi}, f_{q+i}^{\pi}] = \prod_{j=1}^{n} [x_{j,1}^{\pi}, x_{n+j,1}^{\pi}]^{t_2+t_3+\dots}.$$

Получаем в F_{2n} следующее равенство:

$$\prod_{i=1}^{q} [f_i^{\pi}, f_{q+i}^{\pi}] = \prod_{j=1}^{n} [y_j, y_{n+j}]^{t_2+t_3+\dots}.$$

Это противоречит [13, лемма 3] тому, что элемент $\prod\limits_{j=1}^{n} [y_j, y_{n+j}]$ и всякую его неединичную степень нельзя в F_{2n} записать в виде произведения меньшего чем n числа коммутаторов. Итак, $\tau(A) \cap \ker \varphi = 1$.

Заметим еще, что поскольку $A \cap \ker \varphi \leq \tau(A)$, то $A \cap \ker \varphi \leq \tau(A) \cap \ker \varphi = 1$. Это означает, что φ отображает A на H изоморфно. Отсюда, так как $A \in qH_p$, то $H \in qH_p$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть $\mathscr{N}$ — произвольное квазимногообразие групп, $\mathscr{M}$ — квазимногообразие, порожденное всеми 2-ступенно нильпотентными группами из $\mathscr{N}$ с коммутантом экспоненты p (p — фиксированное простое число). Если $\mathscr{M} = qM$ для некоторого множества M неабелевых групп, число порождающих которых ограничено в совокупности, то цепочка* (1) *бесконечная.*

Доказательство. Если M состоит из конечного множества конечных групп, то $\mathscr{M}$ порождается одной конечной неабелевой группой, следовательно, квазимногообразие, порожденное всеми p-группами из M, порождается одной группой, и по следствию 2 цепочка (1) бесконечная. Считаем, что M — бесконечное множество попарно неизоморфных групп либо M содержит бесконечную группу. В каждом из этих случаев квазимногообразие $\mathscr{M}$ содержит бесконечную циклическую группу, откуда легко следует, что $H_p \in \mathscr{M}$.

Зафиксируем число r такое, что всякая абелева подгруппа любой группы из M может быть порождена r элементами. Возьмем любое m, $m > r$. Будем доказывать, что $C_m \notin \mathscr{N}$.

Предположим, что $C_m \in \mathscr{N}$. Тогда $C_m \in \mathscr{M} = qM$. Так как C_m — конечно-определенная группа, по признаку принадлежности (лемма 1) конечно-определенной группы C_m квазимногообразию qM существуют группа $G \in M$ и гомоморфизм $\varphi : C_m \to G$ такие, что $c_m^{\varphi} \neq 1$.

Случай 1 Для каждого i ($i = 1, \dots, m$) множество $\left\{x_{j,i}^{\varphi} \mid j = 1, 2, \dots, 2n\right\}$ содержит такой элемент a_i, всякая ненулевая степень, не делящаяся на p, которого не принадлежит подгруппе $(B^p B_1 \dots B_{i-1} B_{i+1} \dots B_m)^{\varphi}$.

В этом случае элементы $a_1, \dots, a_m$ линейно независимые по модулю p (т. е. если $A = \langle a_1, \dots, a_m \rangle$, то A/A^p является прямым произведением групп $\langle a_1 A^p \rangle$,

$\ldots, \langle a_m A^p \rangle$ порядка p) и потому порождают абелеву группу с числом порождающих не меньше m. Это противоречит тому, что группа G не содержит таких подгрупп.

Случай 2. Существует i, $1 \leq i \leq m$, такое, что всякий элемент из множества $\{x_{j,i}^{\varphi} \mid j = 1, 2, \ldots, 2n\}$ в некоторой степени, не делящейся на p, содержится в $(B^p B_1 \ldots B_{i-1} B_{i+1} \ldots B_m)^{\varphi}$.

Пусть $(x_{j,i}^{\varphi})^{n_j} \in (B^p B_1 \ldots B_{i-1} B_{i+1} \ldots B_m)^{\varphi}$ и n_j не делится на p. Тогда $[(x_{j,i}^{\varphi})^{n_j}, x_{n+j,i}^{\varphi}] = 1$, откуда $[x_{j,i}^{\varphi}, x_{n+j,i}^{\varphi}]^{n_j} = 1$. Так как G — группа с коммутантом экспоненты p, отсюда вытекает, что $[x_{j,i}^{\varphi}, x_{n+j,i}^{\varphi}] = 1$. Таким образом,

$$c_m^{\varphi} = c_i^{\varphi} = \prod_{j=1}^{n} [x_{j,i}^{\varphi}, x_{n+j,i}^{\varphi}] = 1.$$

Это противоречит тому, что $c_m^{\varphi} \neq 1$.

Итак, оба случая невозможны. Следовательно, $C_m \notin \mathscr{N}$.

Зафиксируем произвольное натуральное число l. Возьмем любые m, n такие, что $m > r$, $n > C_l^2$. По этим m, n построим группу C_m. По только что доказанному $C_m \notin \mathscr{N}$. Следовательно, так как C_m — $2mn$-порожденная группа, имеем $C_m \notin L_{2mn}(\mathscr{N})$. По лемме 4 $C_m \in L_l(\mathscr{N})$. Отсюда $L_l(\mathscr{N}) \supsetneqq L_{2mn}(\mathscr{N})$. Это означает, что цепочка (1) бесконечная. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть $\mathscr{N}$ — произвольное квазимногообразие групп, $\mathscr{M}$ — квазимногообразие нильпотентных групп без кручения ступени ≤ 2 из $\mathscr{N}$. Если $\mathscr{M} = qM$ для некоторого множества M неабелевых групп и ранги абелевых подгрупп групп из M ограничены в совокупности, то цепочка* (1) *бесконечная.*

Доказательство. Зафиксируем семейство групп $\{B_k \mid k = 1, 2, \ldots\}$, изоморфных свободной 2-ступенно нильпотентной группе ранга $2n$. Пусть группа B_k порождается элементами $x_{1,k}, \ldots, x_{2n,k}$ и $c_k = \prod_{i=1}^{n} [x_{i,k}, x_{n+i,k}] \in Z(B_k)$. Тогда по определению полагаем

$$B = B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_m, \quad m > \frac{n(n-1)}{2},$$

$$C_1 = B_1, C_2 = C_1 \times B_2 (c_1 = c_2), \ldots, C_m = C_{m-1} \times B_m (c_{m-1} = c_m).$$

Группа C_m является прямым произведением групп $B_1, B_2, \ldots, B_m$ с объединенными подгруппами $\langle c_1 \rangle, \langle c_2 \rangle, \ldots, \langle c_m \rangle$.

В [14, лемма 3] доказано, что всякая n-порожденная подгруппа группы C_m содержится в квазимногообразии qF_2, порожденном свободной 2-ступенно нильпотентной группой ранга 2. При доказательстве теоремы 1 в [14] установлено, что если ранги абелевых подгрупп группы G меньше числа m, то при любом гомоморфизме $\varphi : C_m \to G$ имеем $c_1^{\varphi} = 1$. Отсюда и из признака принадлежности (лемма 1) следует, что $C_m \notin \mathscr{N}$.

Покажем, что $C_m \in L_n(qF_2)$. Известно [15], что всякое нетривиальное квазитождество эквивалентно в классе $\mathscr{N}_{\infty}$ нильпотентных групп без кручения ступени не выше двух коммутаторному квазитождеству, т. е. квазитождеству вида

$$t_1(x_1, \ldots, x_s) = 1 \ \& \ \ldots \ \& \ t_k(x_1, \ldots, x_s) = 1 \ \to \ t(x_1, \ldots, x_s) = 1, \qquad (2)$$

где $t_1, \ldots, t_k, t$ — слова из коммутанта свободной группы.

Пусть $H = \langle h_1, \dots, h_n \rangle^{C_m}$. Заметим, что всякий элемент из H может быть представлен в виде gc, где $g \in \langle h_1, \dots, h_n \rangle$, $c \in C'_m$.

Предположим, что коммутаторное квазитождество (2) истинно в F_2. Докажем его истинность в H. Пусть левая часть (2) истинна в H при интерпретации $x_1 \to g_1c_1, \dots, x_m \to g_mc_m$, где $g_i \in \langle h_1, \dots, h_n \rangle$, $c_i \in C'_m$. Поскольку $c_i \in Z(C_m)$, то $t_j(g_1c_1, \dots, g_mc_m) = t_j(g_1, \dots, g_m)$ при каждом j. Сказанное означает, что левая часть (2) истинна в $\langle h_1, \dots, h_n \rangle$ при интерпретации $x_1 \to g_1, \dots, x_m \to g_m$. Но $\langle h_1, \dots, h_n \rangle \in qF_2$ и квазитождество (2) истинно в F_2, следовательно, (2) истинно в $\langle h_1, \dots, h_n \rangle$. Значит, $t(g_1, \dots, g_m) = 1$. Но $t(g_1, \dots, g_m) = t(g_1c_1, \dots, g_mc_m)$, откуда $t(g_1c_1, \dots, g_mc_m) = 1$. Итак, (2) истинно в H. Это означает, что $H \in qF_2$, следовательно, $C_m \in L_n(qF_2)$.

Возьмем любые m, n такие, что m больше рангов абелевых подгрупп групп из M. По этим m, n построим группу C_m. По только что доказанному $C_m \notin \mathscr{N}$. Следовательно, так как C_m — $2mn$-порожденная группа, то $C_m \notin L_{2mn}(\mathscr{N})$. По доказанному $C_m \in L_n(\mathscr{N})$. Отсюда $L_n(\mathscr{N}) \supsetneqq L_{2mn}(\mathscr{N})$. Это означает, что цепочка (1) бесконечная. Теорема доказана.

Суммируя результаты теорем 1 и 2, получаем

Следствие 3. *Пусть квазимногообразие $\mathscr{N}$ порождается конечно-порожденной нильпотентной неабелевой группой. Тогда цепочка* (1) *бесконечная.*

Благодарности. Выражаю благодарность Светлане Шаховой и Виктории Лодейщиковой за обсуждения и внимательное прочтение этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Будкин А. И.* Оператор L_n на квазимногообразиях универсальных алгебр // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 4. С. 724–733.
2. *Будкин А. И., Таранина Л. В.* О квазимногообразиях Леви, порожденных нильпотентными группами // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 2. С. 270–277.
3. *Будкин А. И.* О классах Леви, порожденных нильпотентными группами // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 6. С. 635–647.
4. *Лодейщикова В. В.* О квазимногообразиях Леви экспоненты p^s // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 1. С. 26–41.
5. *Лодейщикова В. В.* О классе Леви, порожденном квазимногообразием нильпотентных групп // Алгебра и логика. 2019. Т. 58, № 4. С. 486–499.
6. *Шахова С. А.* Об аксиоматическом ранге классов Леви // Алгебра и логика. 2018. Т. 57, № 5. С. 587–600.
7. *Shakhova S. A.* The axiomatic rank of the Levi class generated by the almost Abelian quasivarieties of nilpotent groups // Lobachevskii J. Math. 2020. V. 17, N 9. P. 1680–1683.
8. *Шахова С. А.* Классы Леви квазимногообразий групп с коммутантом экспоненты p // Алгебра и логика. 2021. Т. 60, № 5. С. 510–524.
9. *Лодейщикова В. В., Шахова С. А.* Классы Леви квазимногообразий нильпотентных групп экспоненты p^s // Алгебра и логика. 2022. Т. 61, № 1. С. 77–92.
10. *Горбунов В. А.* Алгебраическая теория квазимногообразий. Новосибирск: Науч. книга, 1999.
11. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. С-Пб: Лань, 2021.
12. *Ольшанский А. Ю.* Условные тождества в конечных группах // Сиб. мат. журн. 1974. Т. 15, № 6. С. 1409–1413.
13. *Федоров А. Н.* О подквазимногообразиях нильпотентных минимальных неабелевых многообразий групп // Сиб. мат. журн. 1980. Т. 21, № 6. С. 117–131.
14. *Будкин А. И.* Квазитождества нильпотентных групп и групп с одним определяющим отношением // Алгебра и логика. 1979. Т. 18, № 2. С. 127–136.

15. *Федоров А. Н.* Квазитождества свободной 2-нильпотентной группы // Мат. заметки. 1986. Т. 40, № 5. С. 590–597.

Поступила в редакцию 23 марта 2023 г.
После доработки 16 апреля 2023 г.
Принята к публикации 16 мая 2023 г.

Будкин Александр Иванович (ORCID 0000-0002-3667-3739)
Алтайский государственный университет,
кафедра алгебры и математической логики,
ул. Ленина, 61, Барнаул 656049
budkin@math.asu.ru