О семинаре по проблемам нелинейной динамики и управления при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова, *Дифференц. уравнения*, 2005, том 41, номер 2, 281–284

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 2, с. 281–284

ХРОНИКА

О СЕМИНАРЕ ПО ПРОБЛЕМАМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ И УПРАВЛЕНИЯ ПРИ МОСКОВСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА*)

Ниже публикуются аннотации докладов, заслушанных в осеннем семестре 2004 г. (предыдущее сообщение о работе семинара дано в журнале "Дифференц. уравнения". 2004. Т. 40. № 8; дополнительная информация по адресу: nonlin@cs.msu.su)**).

О. Н. Бобылева (Москва) "К вопросу о множестве достижимости в одной задаче управления с фазовыми ограничениями" (20.09.2004).

Рассматривается управляемая динамическая система

$$\dot{x} = f(x; u), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad u \in \mathbb{R}^K, \tag{1}$$

в предположении, что значения управляющих воздействий $u(\cdot)$ лежат в некотором множестве $U \subset \mathbb{R}^K$.

Пусть $p(t, u(t))$ $(0 \leq t \leq \tau,\ u(\cdot) \in U(\tau))$ – решение задачи Коши

$$\dot{x} = f(x; u), \quad u \in U, \quad x(0) = 0. \tag{2}$$

(Начальное условие для простоты положим нулевым.) Управления $u(\cdot)$ будем считать кусочно-непрерывными вектор-функциями, а вектор-функцию $f(x; u)$ – липшицевой по переменной x.

Зафиксируем некоторый момент времени $T > 0$ и обозначим через $U(\tau)$ $(0 \leq \tau \leq T)$ множество кусочно-непрерывных управлений $u(\cdot)$, определенных на промежутке $[0, \tau]$ и принимающих значения во множестве U.

Множество

$$D(T) = \bigcup_{0 \leq \tau \leq T} \ \bigcup_{u(\cdot) \in U(\tau)} p(\tau, u(\tau))$$

называется множеством достижимости за время, не превосходящее T, из точки нуль для задачи (2). Будем рассматривать систему (1) не на всем пространстве $\mathbb{R}^N$, а лишь на некотором множестве $M \subset \mathbb{R}^N$. Управление $u(\cdot) \in U(\tau)$ назовем допустимым, если отвечающая ему траектория $p(t, u(t))$ $(0 \leq t \leq \tau)$ задачи с фазовыми ограничениями лежит в M.

Пусть $V(\tau)$ – множество допустимых управлений для заданного момента τ. Очевидно, что $V(\tau) \subset U(\tau)$ $(0 \leq \tau \leq T)$. Множество

$$D_M(T) = \bigcup_{0 \leq \tau \leq T} \ \bigcup_{u(\cdot) \in V(\tau)} p(\tau, u(\tau))$$

назовем множеством достижимости за время, не превосходящее T, из точки нуль управляемой системы (1) в задаче с фазовыми ограничениями. В работе [1] сформулирована теорема об общем виде множества достижимости для системы (1).

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u;$$

здесь x, $f(x)$ – вектор-функции, $B(x)$ – матрица-функция, $u(\cdot) \in U \subset \mathbb{R}^K$ и управления считаем кусочно-непрерывными функциями, в случае, когда фазовые ограничения задаются системой неравенств

$$g_1(x) \leq 0, \ \ldots, \ g_k(x) \leq 0,$$

где $g_1(x), \ldots, g_k(x)$ – некоторые функции, т.е. множество M имеет вид $M = \{x \in R^N : \ g_i(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots, k\}$.

---

*) Под руководством академика РАН С.В. Емельянова и академика РАН С.К. Коровина.

**) Составитель хроники А.П. Носов.

Пусть $x \in M$. Обозначим через $I(x)$ множество индексов i, для которых $g_i(x) = 0$. Множество $I(x)$ отвечает активным ограничениям, т.е. если $I(x) \neq \emptyset$ для некоторого x, то $x \in \partial M$.

Доказана следующая

Теорема. *Пусть выполнено условие*

$$\inf_{x \in M:\ I(x) \neq \emptyset} \max_{i \in I(x)} \inf_{u \in U} (\nabla g_i(x), f(x) + B(x)u) > 0.$$

Тогда $D_M(T) = D(T) \cap M$.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02-01-00189).

Литература 1. Бобылева О.Н. // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 11. С. 1563–1564.

А. П. Носов (Москва) “Об одновременной стабилизации по двум выходам системы с неопределенностью” (11.10.2004).

Рассматривается неопределенная управляемая система

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b(u(t) + \psi(t, x)), \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

с векторным выходом

$$Y(t) = Cx(t), \tag{2}$$

где при каждом $t \geq 0$ состояние $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}$ – скалярное управление, неопределенность $\psi(t,x) \in \mathcal{K} \stackrel{\text{def}}{=} \{\psi \in \mathcal{K} :\ |\psi(t,x)| \leq \psi^+|x(t)|\}$, $\psi^+ = \text{const} > 0$; $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $C \in \mathbb{R}^{2\times n}$; пара (A, b) управляема, пара (C, A) наблюдаема.

Задача одновременной стабилизации, возникающая из требований к надежности системы, может быть сформулирована следующим образом [1].

Пусть матрица C имеет вид $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$, где c_1 и c_2 – векторы из $(\mathbb{R}^n)^\intercal$, т.е.

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 x(t) \\ c_2 x(t) \end{bmatrix}.$$

Если c_1 и c_2 – датчики, то выход из строя одного из них не должен приводить к потере устойчивости замкнутой системы управления, иными словами, управление $u(t)$ должно стабилизировать систему (1) как по выходу (2), так и по каждому из выходов $y_1(t)$ и $y_2(t)$ одновременно.

Основные предположения. 1) Матрица A гурвицева с заданной степенью устойчивости $\gamma_a > 0$ (об одновременной стабилизации по двум выходам линейной системы без возмущений см., например, [2]); 2) пары (c_1, A) и (c_2, A) наблюдаемы, $(c_1, b) \neq 0$ и $(c_2, b) \neq 0$, и нулевые динамики по выходам y_1 и y_2 устойчивы с показателем $\gamma_0 > 0$.

Рассмотрим наблюдатель для интегральной ошибки $\sigma(t)$ (которая для любого $l > 0$ определяется выражением $\sigma(t) = \int_0^t e^{-l(t-s)}(u(s)+\psi(s, x(s)))\,ds$) по каждому из выходов. Тогда оценки интегральной ошибки будут иметь вид $\widehat{\sigma}_1(t) = \alpha_1 y_1(t) - \zeta_1(t)$ и $\widehat{\sigma}_2(t) = \alpha_2 y_2(t) - \zeta_2(t)$ соответственно по выходам y_1 и y_2. Дополнительные переменные $\zeta_1(t)$ и $\zeta_2(t)$ определяются из уравнений

$$\dot{\zeta}_i(t) = \alpha_i c_i A\widehat{x}(t) + l(\alpha_i y_i(t) - \zeta_i(t)), \quad \zeta_i(0) = \zeta_i^0, \quad i = 1, 2, \tag{3}$$

где $\widehat{x}(t)$ – оценка вектора состояния $x(t)$ [3].

Выберем управление в виде

$$u(t) = -K_1\widehat{\sigma}_1(t) - K_2\widehat{\sigma}_2(t). \tag{4}$$

Одновременная стабилизация системы (1), (2) обеспечивается управлением (4) на основании следующей теоремы.

Теорема. *Пусть* $\alpha_1 = 1/(c_1, b)$, $\alpha_2 = 1/(c_2, b)$, $l > \gamma \in (0, \min\{\gamma_0, \gamma_a\})$ *и параметры обратной связи (4) выбираются из условия* $K_1 > \psi^+ q_1$, $K_2 > \psi^+ q_2$, *где* $q_i = q_i(A, c_i) < \infty$ *– константы, зависящие от свойств матриц* A *и* C $(i = 1, 2)$. *Тогда уравнения (3) являются* l*-экспоненциальными наблюдателями интегральной ошибки по выходам* y_1 *и* y_2 *соответственно, и замкнутая система управления (1), (2), (4)* γ*-экспоненциально устойчива.*

Замечание. Значения констант q_i, $i = 1, 2$, и точные экспоненциальные оценки управляемых процессов в замкнутой системе могут быть найдены методом, изложенным в [4].

Теорема утверждает об устойчивости замкнутой системы при стабилизации управлением (4) по векторному выходу (2). В случае отказа одного из датчиков, т.е. вырождения матрицы C до одного из векторов c_i, $i = 1, 2$, соответствующая i-я компонента управления (4) обнуляется с точностью до убывающей с показателем l экспоненты и стабилизация системы по скалярному выходу осуществляется оставшейся компонентой в соответствии с результатами [4].

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 04-01-00433 и 03-01-00362).

Литература 1. Stoustrup J., Blondel V.D. // IEEE Transactions on Automatic Control. 2004. V. 49. № 2. P. 305–310. 2. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М., 2002. 3. Носов А.П., Фурсов А.С. // Нелинейная динамика и управление. М., 1999. С. 159–172. 4. Носов А.П., Фурсов А.С. // Методы анализа нелинейных систем. М., 1997. С. 87–101.

А. П. Афанасьев, С. М. Дзюба (Москва) "О типичном поведении дифференциальных уравнений с периодической правой частью" (25.10.2004).

Рассматривается нормальная система обыкновенных дифференциальных уравнений, векторная запись которой имеет вид

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1}$$

где $x \in \Sigma$, а f – функция, определенная на прямом произведении $\mathbb{R} \times \Sigma$ действительной оси $\mathbb{R}$ и некоторого открытого подмножества Σ евклидова векторного пространства $\mathbb{R}^n$, непрерывная по t и непрерывно дифференцируемая по x. Кроме того, предполагается, что функция f периодична по t с периодом, равным единице.

Определение. Пусть $\varphi(t)$ – некоторое решение системы (1), определенное для всех значений $t \in \mathbb{R}$ и ограниченное при этих значениях t. Решение $\varphi(t)$ назовем квазипериодическим, если для каждого положительного числа ε можно указать такое натуральное число N_ε, что при $t \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $|\varphi(t) - \varphi(t + N_\varepsilon)| < \varepsilon$.

Теорема. *Пусть $\xi(t)$ – некоторое решение системы (1), определенное для всех значений $t \in \mathbb{R}$ и ограниченное при $t \geq 0$. Тогда система (1) имеет квазипериодическое решение $\varphi(t)$, причем найдется такая последовательность $\{N_k\}$ натуральных чисел, что*

$$\lim_{k\to\infty} \xi(t + N_k) = \varphi(t)$$

равномерно на каждом из отрезков $[a, b] \subset \mathbb{R}$ и

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(t + N_{k+1} - N_k) = \varphi(t)$$

равномерно на всей оси $\mathbb{R}$.

Замечание. Если система (1) автономна, то, как легко видеть, траектория K, описываемая квазипериодическим решением $\varphi(t)$ данной системы, рекуррентна. Верно также и обратное.

Д. А. Калошин (Москва) "Исследование локальных и нелокальных бифуркаций в системе уравнений Лоренца" (22.11.2004).

В докладе представлен новый взгляд на диаграмму локальных бифуркаций и рассмотрены нелокальные бифуркации различных сепаратрисных контуров в системе уравнений Лоренца

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = rx - y - xz, \quad \dot{z} = xy - bz.$$

До последнего времени совершенно естественным представлялся единый геометрический подход к изучению нелинейных динамических систем, позволяющий рассматривать с общих позиций нелинейные системы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями. Интенсивное применение геометрического подхода к анализу динамических систем началось с известной работы американского математика С. Смейла, предложившего конструкцию отображения, которое впоследствии получило название подковы Смейла. Но многочисленные попытки в течение длительного времени обосновать методами геометрической теории динамических систем наличие странного аттрактора в окрестностях петель сепаратрис седло-узла и седло-фокуса в системе Лоренца закончились неудачей.

Иной взгляд на аттрактор Лоренца изложен в работах [1–3], результаты которых полностью подтверждаются и дополняются настоящим исследованием. Показано существование в системе Лоренца различных сепаратрисных контуров, таких как гомоклиническая бабочка, гомоклинические петли сепаратрис седло-фокусов O_1 и O_2, гетероклинические траектории Γ_{12}, соединяющие седло-фокусы O_1 и O_2, и Γ_3, соединяющие седло-узел O с седло-фокусами O_1 и O_2. Применяя алгоритм поиска всех перечисленных выше контуров, описанный в [4], произведено построение диаграммы нелокальных бифуркаций в пространстве параметров (σ, b, r) системы Лоренца [5–7]. Изложен также сценарий перехода к хаосу в системе уравнений Лоренца, при котором полный двойной гомоклинический каскад бифуркаций реализуется при стремлении значений параметра r как сверху, так и снизу к точке r^* существования в системе гомоклинических контуров (петель сепаратрис) седло-фокусов. Подтверждено, что существование в системе структуры "точка-цикл" никак не связано с хаотическим аттрактором системы. Кроме того, показано, что система Лоренца наряду с двумя устойчивыми состояниями равновесия может иметь не только хаотический аттрактор, но также и простой или сложный устойчивый предельный цикл. Более того, доказано существование в системе седловых циклов путем их нахождения и стабилизации [8].

Таким образом, в данном докладе доказана неверность некоторых классических результатов и показано, что подход, применимый для исследования системы Лоренца, может быть использован для управления и стабилизации неустойчивых циклов, построения диаграмм нелокальных бифуркаций в широком классе динамических систем.

Литература 1. Магницкий Н.А., Сидоров С.В. // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 11. С. 1494–1506. 2. Магницкий Н.А., Сидоров С.В. // Нелинейная динамика и управление. Вып. 2. М., 2002. С. 179–194. 3. Магницкий Н.А., Сидоров С.В. // Новые методы хаотической динамики. М., 2004. 4. Магницкий Н.А., Сидоров С.В. // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 11. С. 1511–1520. 5. Калошин Д.А. // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 11. С. 1564–1565. 6. Калошин Д.А. // Нелинейная динамика и управление. Вып. 4. М., 2004. С. 115–118. 7. Калошин Д.А. // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 12. С. 1705–1707. 8. Калошин Д.А. // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 11. С. 1559–1561.

А. В. Краев, А. С. Фурсов (Москва) "Оценка радиусов неустойчивости полиномов в пространстве параметров" (13.12.2004).

Рассмотрим множество P_n полиномов вида

$$p(s) = a_0 + a_1 s + \ldots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n \quad (a_i > 0),$$

отождествляемых с векторами $a = (a_0, \ldots, a_{n-1})$ пространства $\mathbb{R}^n_+$, наделенного нормой $||a|| = \underset{i}{\rightarrow} \max|a_i|$. Чтобы указать связь полинома $p(s)$ с точкой пространства $\mathbb{R}^n_+$, обозначим его через $p(s,a)$.

Полином $p(s,a) \in P_n$ называется *устойчивым*, если на комплексной плоскости все его корни лежат строго в левой полуплоскости, и *неустойчивым* в противном случае.

Обозначим через S и U множества точек пространства $\mathbb{R}^n$, отвечающих устойчивым и неустойчивым полиномам соответственно. Для неустойчивого полинома $p(s,a)$ назовем радиусом неустойчивости величину

$$R_U(a) = \underset{b\in S}{\rightarrow} \inf ||a-b||.$$

Рассмотрим для полинома $p(s,a^0)$ годограф Цыпкина–Поляка [1]

$$z(\omega, a^0) = x_0(\omega) + jy_0(\omega), \quad 0 \le \omega \le \infty,$$

где

$$x_0(\omega) = \frac{g_0(\omega)}{r(\omega)}, \quad y_0(\omega) = \frac{h_0(\omega)}{q(\omega)},$$

$$g_0(\omega) = a_0^0 - a_2^0\omega^2 + a_4^0\omega^4 - \ldots, \quad h_0(\omega) = a_1^0 - a_3^0\omega^2 + a_5^0\omega^4 - \ldots,$$

$$r(\omega) = 1 + \omega^2 + \ldots + \omega^{2[(n-1)/2]}, \quad q(\omega) = 1 + \omega^2 + \ldots + \omega^{2[(n-2)/2]}$$

и $[\cdot]$ – целая часть числа. В этих обозначениях

$$p(j\omega, a^0) = g_0(\omega) + j\omega h_0(\omega).$$

Пусть $\psi(\omega) = \max\{|x_0(\omega)|, |y_0(\omega)|\}$, $\omega \ge 0$. Обозначим через $\omega_1, \ldots, \omega_k$ все положительные корни следующих уравнений:

$$g_0(\omega)q(\omega) - h_0(\omega)r(\omega) = 0, \quad g_0(\omega)q(\omega) + h_0(\omega)r(\omega) = 0,$$

$$g_0'(\omega)r(\omega) - g_0(\omega)r'(\omega) = 0, \quad h_0'(\omega)q(\omega) - h_0(\omega)q'(\omega) = 0.$$

Положим $\Phi(a^0) = \underset{1\le i\le k}{\rightarrow} \min \psi(\omega_i)$.

Найти оценку для радиуса неустойчивости $R_U(a^0)$ полинома $p(s,a^0)$ с положительными коэффициентами позволяет следующая

Теорема. *Пусть* $p(s,a^0) = a_0^0 + a_1^0 s + \ldots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n$ *– неустойчивый полином с положительными коэффициентами, не имеющий чисто мнимых корней. Тогда верна оценка* $R_U(a^0) \ge \gamma(a^0)$, *где* $\gamma(a^0) = \min\{a_0^0, a_1^0, \Phi(a^0)\}$.

Литература 1. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М., 2002.