Н. Н. Петров, А. Я. Нарманов, Многократная поимка заданного числа убегающих в задаче простого преследования,
Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, 2018, том 28, выпуск 2, 193–198

УДК 517.977

© *Н. Н. Петров, А. Я. Нарманов*

МНОГОКРАТНАЯ ПОИМКА ЗАДАННОГО ЧИСЛА УБЕГАЮЩИХ В ЗАДАЧЕ ПРОСТОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ[1]

В конечномерном евклидовом пространстве рассматривается задача преследования группой преследователей группы убегающих, описываемая системой вида

$$\dot{z}_{ij} = u_i - v_j, \quad u_i, v_j \in V.$$

Множество допустимых управлений — выпуклый компакт, целевые множества — начало координат. Целью группы преследователей является осуществление r-кратной поимки не менее q убегающих. Дополнительно предполагается, что убегающие используют программные стратегии, а каждый преследователь может поймать не более одного убегающего. Получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи преследования. Для доказательства используется теорема Холла о системе различных представителей.

Ключевые слова: дифференциальная игра, групповое преследование, преследователь, убегающий.

DOI: 10.20537/vm180205

Введение

Рассматривается задача простого преследования группой преследователей группы убегающих, при условии, что все участники обладают равными возможностями. Задача простого преследования группой преследователей одного убегающего рассматривалась Б. Н. Пшеничным [1], где были получены необходимые и достаточные условия поимки. Многократная поимка убегающего в задаче простого группового преследования исследовалась в работе Н. Л. Григоренко [2]. Условия многократной одновременной поимки одного убегающего для задачи простого преследования получены А. И. Благодатских [3]. Задача о поимке заданного числа убегающих в задаче простого преследования (при условии, что множество допустимых управлений — шар единичного радиуса с центром в нуле, терминальные множества — начало координат, убегающие используют программные стратегии, а каждый преследователь ловит не более одного убегающего) представлена в [4], где были получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи преследования. Общий случай задачи о поимке заданного числа убегающих в случае простого преследования рассматривался в [5]. Задача о многократной поимке убегающего в примере Л. С. Понтрягина представлена в работах [6–9]. Многократная поимка в линейных дифференциальных играх рассматривалась в [10–12]. Достаточные условия поимки заданного числа убегающих в стационарном примере Л. С. Понтрягина и линейных рекуррентных дифференциальных играх получены в [13, 14].

В данной работе рассматриваемые ранее отдельно задачи о многократной поимке и поимке заданного числа убегающих объединены в одну задачу. Целью группы преследователей является поимка не менее q убегающих, причем каждого убегающего должны поймать не менее, чем r преследователей. В предположении, что убегающие используют программные стратегии, а каждый из преследователей ловит не более одного убегающего получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи преследования.

[1]Работа поддержана грантом РФФИ (проект № 18–51–41005–Узб_т).

§ 1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $\Gamma(n, m)$ $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, \ldots, E_m$. Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$\dot{x}_i = u_i, \quad x_i(0) = x_i^0, \quad u_i \in V. \tag{1.1}$$

Закон движения каждого из убегающих E_j имеет вид

$$\dot{y}_j = v_j, \quad y_j(0) = y_j^0, \quad v \in V. \tag{1.2}$$

Здесь $x_i, y_j, u_i, v_j \in \mathbb{R}^k$, $i \in I = \{1, \ldots, n\}$, $j \in J = \{1, \ldots, m\}$, V — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^k$. Кроме того, $x_i^0 \neq y_j^0$ для всех i, j.

Цель группы преследователей — осуществить поимку не менее чем q убегающих, причем каждого убегающего должны поймать не менее чем r преследователей $(r \geqslant 1,\ 1 \leqslant q \leqslant m)$, при условии, что сначала убегающие выбирают свои управления сразу на $[0, \infty)$, а затем преследователи, на основе информации о выборе убегающих, выбирают свои управления и, кроме того, каждый преследователь может поймать не более одного убегающего. Считаем, что $n \geqslant rq$, $m \geqslant q$.

Вместо систем (1.1), (1.2) рассмотрим систему

$$\dot{z}_{ij} = u_i - v_j, \quad z_{ij}(0) = z_{ij}^0 = x_i^0 - y_j^0, \quad u_i, v_j \in V.$$

Определение 1. В игре $\Gamma(n, m)$ *происходит r-кратная поимка* (*при $r = 1$ поимка*) убегающего E_β, если существует $T > 0$, при котором для любых допустимых управлений $v_j(t)$, $j \in J$, $t \in [0, \infty)$, убегающих E_j, $j \in J$, найдутся допустимые управления преследователей $u_i(t) = u_i(t, z_{ij}^0, v_j(s), s \in [0, \infty), j \in J)$, моменты времени $\tau_1, \ldots, \tau_r \in [0, T]$, попарно различные натуральные числа $i_1, \ldots, i_r \in I$, что $z_{i_s\beta}(\tau_s) = 0$ для всех $s = 1, \ldots, r$.

Определение 2. В игре $\Gamma(n, m)$ *происходит r-кратная поимка* (*при $r = 1$ поимка*) *не менее q убегающих,* если существует $T > 0$, при котором для любой совокупности допустимых управлений $v_j(t)$, $t \in [0, \infty)$, $j \in J$, убегающих найдутся допустимые управления преследователей $u_i(t) = u_i(t, z_{ij}^0, v_j(s), s \in [0, \infty), j \in J)$, обладающие следующим свойством: существуют множества

$$M \subset J, \quad |M| = q,$$
$$\{N_\alpha, \alpha \in M\}, \quad N_\alpha \subset I, \quad |N_\alpha| = r \text{ для всех } \alpha \in M, \quad N_\alpha \cap N_\beta = \emptyset \text{ для всех } \alpha \neq \beta,$$

такие, что группа преследователей $\{P_\alpha, \alpha \in N_\beta\}$ не позднее момента T осуществляет r-кратную поимку убегающего E_β, причем если преследователь P_α ловит убегающего E_β, то остальные убегающие считаются им не пойманными.

Введем следующие обозначения. $\operatorname{Int} A$ $\operatorname{co} A$ — соответственно внутренность и выпуклая оболочка множества A,

$$\lambda(z, v) = \sup\{\lambda \geqslant 0 \mid -\lambda z \in V - v\},$$
$$\Omega_N(s) = \{(i_1, \ldots, i_s) \mid i_\alpha \in N \text{ для всех } \alpha = 1, \ldots, s \text{ и попарно различны}\} \quad (N \subset I),$$
$$\delta_N(\beta) = \min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega_N(r)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda(z_{\alpha\beta}^0, v).$$

§ 2. Необходимые и достаточные условия поимки

Теорема 1 (см. [2]). *Пусть $m = 1$. В игре $\Gamma(n, 1)$ происходит r-кратная поимка тогда и только тогда, когда $\delta_I(1) > 0$.*

Следствие 1 (см. [2]). *Пусть $m = 1$, V — строго выпуклый компакт с гладкой границей. В игре $\Gamma(n, 1)$ происходит r-кратная поимка тогда и только тогда, когда*

$$0 \in \bigcap_{\Lambda \in \Omega_I(n-r+1)} \operatorname{Intco}\{z^0_{\alpha 1}, \alpha \in \Lambda\}.$$

Теорема 2. *В игре $\Gamma(n, m)$ происходит r-кратная поимка не менее q убегающих тогда и только тогда, когда для каждого $s \in \{0, \ldots, q-1\}$ выполнено следующее условие: для любого множества $N \subset I$, $|N| = n - sr$ найдется множество M, $|M| = q - s$, что $\delta_N(\beta) > 0$ для всех $\beta \in M$.*

Доказательство. Пусть выполнено условие теоремы. Докажем, что любые $n - sr$ преследователей осуществляют r-кратную поимку не менее чем $q - s$ убегающих, где $s \in \in \{0, \ldots, q-1\}$. При $s = 0$ получим утверждение теоремы. Доказывать будем методом математической индукции. Пусть $s = q-1$, $N \subset I$, $|N| = n - (q-1)r$. В силу условия теоремы существует $\beta \in J$ такой, что $\delta_N(\beta) > 0$. Из теоремы 1 следует, что преследователи P_α, $\alpha \in N$, осуществляют r-кратную поимку убегающего E_β.

Предположим, что утверждение доказано для всех $s \geqslant p+1$. Докажем утверждение для $s = p$. Пусть $N \subset I$, $|N| = n - pr$. Тогда существует множество $M \subset J$, $|M| = q - p$, такое, что $\delta_N(\beta) > 0$ для всех $\beta \in M$.

Пусть $v_j(t)$, $t \in [0, \infty)$, $j \in J$, — совокупность управлений убегающих. Для каждого $\beta \in M$ определим множества

$$J_\beta = \{\alpha \in N \mid \text{преследователь } P_\alpha \text{ ловит убегающего } E_\beta\}.$$

В силу теоремы 1 и условия данной теоремы для всех $\beta \in M$ справедливо неравенство $|J_\beta| \geqslant r$. Можно считать, что $M = \{1, \ldots, q-p\}$. Возможны два случая.

1. $\Big|\bigcup\limits_{\beta=1}^{l} J_\beta\Big| \geqslant lr$ для всех $l = 1, \ldots, q-p$. Тогда по обобщенной теореме Холла [15] для множеств $\{J_\beta, \beta \in M\}$ существует система различных представителей. Это означает, что существуют множества J'_β, $\beta \in M$, для которых

$$J'_\beta \subset J_\beta, \quad |J'_\beta| = r \text{ для всех } \beta \in M, \quad J'_{\beta_1} \cap J'_{\beta_2} = \emptyset \text{ для всех } \beta_1 \neq \beta_2.$$

Следовательно, каждая группа преследователей P_α, $\alpha \in J'_\beta$, осуществляет r-кратную поимку убегающего E_β для всех $\beta \in M$. Поэтому группа преследователей P_α, $\alpha \in N$, осуществляет r-кратную поимку не менее $q - p$ убегающих.

2. Существует $l \in \{1, \ldots, q-p\}$, при котором $\Big|\bigcup\limits_{\beta=1}^{l}\Big| < lr$. Пусть l — наименьшее из натуральных чисел, удовлетворяющих данному неравенству. Отметим, что $l > 1$ и $\Big|\bigcup\limits_{\beta=1}^{n_1}\Big| \geqslant n_1 r$ для всех $n_1 \in \{1, \ldots, l-1\}$. Поэтому для множеств J_β, $\beta = 1, \ldots, l-1$, существует система J'_β различных представителей такая, что

$$J'_\beta \subset J_\beta, \quad |J'_\beta| = r \text{ для всех } \beta = 1, \ldots, l-1, \quad J'_{\beta_1} \cap J'_{\beta_2} = \emptyset \text{ для всех } \beta_1 \neq \beta_2.$$

Следовательно, каждая группа преследователей J'_β осуществляет r-кратную поимку убегающего E_β. Поэтому преследователи $\bigcup\limits_{\beta=1}^{l-1} J'_\beta$ осуществляют r-кратную поимку $l-1$ убегающих $E_1, \ldots, E_{l-1}$. В дальнейшем можно считать, что $J'_\beta = J_\beta$ для всех $\beta = 1, \ldots, l-1$.

Пусть $s_0 = p + l - 1$. Тогда $s_0 > p$ и $s_0 \leqslant p + q - p - 1 = q - 1$. Рассмотрим множество $N_1 = N \setminus \bigcup\limits_{\beta=1}^{l-1} J'_\beta$. Имеем $|N_1| = n - pr - (l-1)r = n - s_0 r$. В силу условия теоремы по N_1 существует множество M_1, $M_1 \subset J$, $|M_1| = q - s_0$, такое, что $\delta_{N_1}(\beta) > 0$ для всех $\beta \in M_1$. Отметим, что $\{1, \ldots, l-1\} \cap M_1 = \emptyset$, ибо если β принадлежит данному пересечению, то существует номер $\alpha \in N_1$, для которого P_α ловит убегающего E_β, где $\beta \in \{1, \ldots, l-1\}$, что противоречит построению множества N_1. В силу индукционного предположения группа преследователей P_α, $\alpha \in N_1$, осуществляет r-кратную поимку не менее чем $q - s_0$ убегающих. Следовательно, преследователи P_α, $\alpha \in N$, осуществляют r-кратную поимку не менее $q - s_0 + l - 1 = q - p$ убегающих. Что и требовалось доказать.

Докажем теперь необходимость. Предположим, что условие теоремы не выполняется. Тогда существуют $s \in \{0, \ldots, q-1\}$ и множество $N \subset I$, $|N| = n - sr$ такие, что для каждого множества $M \subset J$, $|M| = q - s$ найдется номер $\beta \in M$, для которого $\delta_N(\beta) \leqslant 0$.

Пусть $N = \{1, \ldots, n - sr\}$, $M_1 = \{1, \ldots, q - s\}$. Тогда существует $\beta_1 \in M_1$, для которого $\delta_N(\beta_1) \leqslant 0$. Это означает, что существует $v_{\beta_1} \in V$ такой, что

$$\min_{\alpha \in \Lambda} \lambda(z^0_{\alpha\beta_1}, v_{\beta_1}) \leqslant 0 \text{ для всех } \Lambda \in \Omega_N(r). \tag{2.1}$$

Возьмем $\Lambda_1 = \{1, \ldots, r\}$. Из (2.1) следует, что существует номер $\alpha_1 \in \Lambda_1$, для которого $\lambda(z^0_{\alpha_1\beta_1}, v_{\beta_1}) \leqslant 0$. Для множества $\Lambda_2 = \Lambda_1 \setminus \{\alpha_1\} \cup \{r+1\}$ найдется номер $\alpha_2 \in \Lambda_2$, для которого $\lambda(z^0_{\alpha_2\beta_1}, v_{\beta_1}) \leqslant 0$. Аналогично: для $\Lambda_3 = \Lambda_2 \setminus \{\alpha_2\} \cup \{r+2\}$ найдется номер $\alpha_3 \in \Lambda_3$, для которого $\lambda(z^0_{\alpha_3\beta_1}, v_{\beta_1}) \leqslant 0$. Продолжая этот процесс дальше, получаем, что существуют $\alpha_4, \ldots, \alpha_{n-sr-r+1}$ такие, что $\lambda(z^0_{p\beta_1}, v_{\beta_1}) \leqslant 0$ для всех $p = \alpha_4, \ldots, \alpha_{n-sr-r+1}$. Из результатов работы [2] следует, что убегающий E_{β_1} уклоняется от встречи с преследователями P_l для всех $l \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-sr-r+1}\}$. Следовательно, убегающий E_{β_1} уклоняется от r-кратной поимки преследователями $P_l, l \in N$. Возьмем далее $M_2 = M_1 \setminus \{\beta_1\} \cup \{q - s + 1\}$. Получим, что найдется убегающий E_{β_2}, который уклоняется от r-кратной поимки преследователями $P_l, l \in N$. Продолжая этот процесс далее, получаем, что найдутся убегающие $E_{\beta_3}, \ldots, E_{m-(q-s)+1}$, каждый из которых уклоняется от r-кратной поимки преследователями $P_l, l \in N$.

Таким образом, группа преследователей P_l, $l \in N$, может осуществить r-кратную поимку не более $(q - s) - 1$ убегающего. Оставшиеся преследователи P_l, $l \in I \setminus N$, $|I \setminus N| = sr$, могут осуществить r-кратную поимку не более s убегающих. Следовательно, все преследователи P_i, $i \in I$, осуществляют r-кратную поимку не более $(q - s) - 1 + s = q - 1$ убегающих. Тем самым необходимость доказана.

Следствие 2. *Пусть V — строго выпуклый компакт с гладкой границей. В игре $\Gamma(n, m)$ происходит r-кратная поимка не менее q убегающих тогда и только тгда, когда для каждого $s \in \{0, \ldots, q-1\}$ выполнено следующее условие: для любого множества $N \subset I$, $|N| = n - sr$, существует множество $M \subset J$, $|M| = q - s$, что*

$$0 \in \bigcap_{\Lambda \in \Omega_N(n-r+1)} \operatorname{Intco}\{z^0_{\alpha\beta}, \alpha \in \Lambda\}$$

для всех $\beta \in M$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пшеничный Б.Н. Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.
2. Григоренко Н.Л. Игра простого преследования-убегания группы преследователей и одного убегающего // Вестник Московского университета. Сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика. 1983. № 1. С. 41–47.
3. Благодатских А.И. Одновременная многократная поимка в задаче простого преследования // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73. Вып. 1. С. 54–59.

4. Петров Н.Н., Прокопенко В.А. Об одной задаче преследования группы убегающих // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23. № 4. С. 725–726.
5. Сахаров Д.В. О двух дифференциальных играх простого группового преследования // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 1. С. 50–59. DOI: 10.20537/vm120106
6. Благодатских А.И. Многократная поимка в примере Понтрягина // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 2. С. 3–12. DOI: 10.20537/vm090201
7. Петров Н.Н. Многократная поимка в примере Л. С. Понтрягина с фазовыми ограничениями // Прикладная математика и механика. 1997. Т. 61. № 5. С. 725–732.
8. Петров Н.Н., Соловьева Н.А. Многократная поимка в рекуррентном примере Л. С. Понтрягина с фазовыми ограничениями // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21. № 2. С. 178–186.
9. Петров Н.Н., Соловьева Н.А. Многократная поимка в рекуррентном примере Л. С. Понтрягина // Автоматика и телемеханика. 2016. № 5. С. 128–135.
10. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наукова думка, 1992. 384 с.
11. Благодатских А.И. Одновременная многократная поимка в конфликтно управляемом процессе // Прикладная математика и механика. 2013. Т. 77. Вып. 3. С. 433–440.
12. Петров Н.Н., Соловьева Н.А. Многократная поимка убегающего в линейных рекуррентных дифференциальных играх // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23. № 1. С. 212–218. DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-212-218
13. Петров Н.Н., Соловьева Н.А. К задаче группового преследования в линейных рекуррентных дифференциальных играх // Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2017. Т. 132. С. 81–85.
14. Петров Н.Н. Об одной задаче преследования группы убегающих // Автоматика и телемеханика. 1996. № 6. С. 48–54.
15. Холл М. Комбинаторика. М.: Мир, 1970.

Поступила в редакцию 03.06.2018

Петров Николай Никандрович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: kma3@list.ru

Нарманов Абдигаппар Якубович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра геометрии, Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, 100174, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Университетская, 4.
E-mail: narmanov@yandex.ru

N. N. Petrov, A. Ya. Narmanov

Multiple capture of a given number of evaders in the problem of a simple pursuit

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 2, pp. 193–198 (in Russian).

Keywords: differential game, group pursuit, pursuer, evader.

MSC2010: 49N75, 91A23

DOI: 10.20537/vm180205

In the finite-dimensional Euclidean space, the problem of a group of pursuers pursuing a group of evaders is considered, which is described by the system

$$\dot{z}_{ij} = u_i - v_j, \quad u_i, v_j \in V.$$

The set of admissible controls is a convex compact, and the target's sets are the origin of coordinates. The aim of the group of pursuers is to carry out an r-fold capture of at least q evaders. Additionally, it is assumed that the evaders use program strategies and that each pursuer can catch no more than one evader. We obtain necessary and sufficient conditions for the solvability of the pursuit problem. For the proof we use the Hall theorem on the system of various representatives.

REFERENCES

1. Pshenichnyi B.N. Simple pursuit by several objects, *Cybernetics*, 1976, vol. 12, no. 3, pp. 484–485. https://link.springer.com/article/10.1007/BF01070036
2. Grigorenko N.L. Simple pursuit–evasion game of pursuit group and one evader, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. XV. Vychisl. Mat. Kibernet.*, 1983, no. 1, pp. 41–47 (in Russian).
3. Blagodatskikh A.I. Simultaneous multiple capture in a simple pursuit problem, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2009, vol. 73, no. 1, pp. 36–40. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2009.03.010
4. Petrov N.N., Prokopenko V.A. On a problem of the pursuit of a group of evaders, *Differ. Uravn.*, 1987, vol. 23, no. 4, pp. 725–726 (in Russian).
5. Sakharov D.V. On two differential games of simple group pursuit, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2012, issue 1, pp. 50–59 (in Russian). DOI: 10.20537/vm120106
6. Blagodatskikh A.I. Multiple capture in a Pontriagin's problem, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2009, issue 2, pp. 3–12 (in Russian). DOI: 10.20537/vm090201
7. Petrov N.N. Multiple capture in Pontryagin's example with phase constraints, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1997, vol. 61, no. 5, pp. 725–732. DOI: 10.1016/S0021-8928(97)00095-6
8. Petrov N.N., Solov'eva N.A. Multiple capture in Pontryagin's recurrent example with phase constraints, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2016, vol. 293, suppl. 1, pp. 174–182. DOI: 10.1134/S0081543816050163
9. Petrov N.N., Solov'eva N.A. Multiple capture in Pontryagin's recurrent example, *Automation and Remote Control*, 2016, vol. 77, no. 5, pp. 855–861. DOI: 10.1134/S0005117916050088
10. Chikrii A.A. *Conflict-controlled processes*, Boston–London–Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. XX, 404 p. DOI: 10.1007/978-94-017-1135-7
11. Blagodatskikh A.I. Simultaneous multiple capture in a conflict-controlled process, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, vol. 77, no. 3, pp. 314–320. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2013.09.007
12. Petrov N.N., Solov'eva N.A. A multiple capture of an evader in linear recursive differential games, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2017, vol. 23, no. 1, pp. 212–218 (in Russian). DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-212-218
13. Petrov N.N., Solov'eva N.A. Problem of group pursuit in linear recurrent differential games, *Journal of Mathematical Sciences*, 2018, vol. 230, no. 5, pp. 732–736. DOI: 10.1007/s10958-018-3779-z
14. Petrov N.N. On a certain problem of pursuit of a group of evaders, *Autom. Remote Control*, 1996, vol. 57, no. 6, pp. 808–813.
15. Hall M. *Combinatorial Theory*, Waltham–Toronto–London: Blaisdell Publishing Company, 1967. Translated under the title *Kombinatorika*, Moscow: Mir, 1970.

Received 03.06.2018

Petrov Nikolai Nikandrovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: kma3@list.ru

Narmanov Abdigappar Yakubovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, National University of Uzbekistan, ul. Universitetskaya, 4, Tashkent, 100174, Uzbekistan.
E-mail: narmanov@yandex.ru