А. Д. Медных, К задаче Гурвица о числе неэквивалентных накрытий над компактной римановой поверхностью, *Сиб. матем. журн.*, 1982, том 23, номер 3, 155–160

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XXIII, № 3 МАЙ — ИЮНЬ 1982

УДК 517.862 : 517.54 : 519.1

А. Д. МЕДНЫХ

# К ЗАДАЧЕ ГУРВИЦА О ЧИСЛЕ НЕЭКВИВАЛЕНТНЫХ НАКРЫТИЙ НАД КОМПАКТНОЙ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

1°. Пусть $S$ компактная риманова поверхность, а $\pi : T \to S$ и $\pi' : T' \to S$ накрытия над $S$. Будем говорить, что накрытия $\pi$ и $\pi'$ эквивалентны, если существует гомеоморфизм $h : T \to T'$ такой, что $\pi = \pi' \circ h$. В классических работах А. Гурвица [1, 2] была определена производящая функция для числа неэквивалентных накрытий над римановой сферой, имеющих заданную кратность и заданное число простых точек ветвления. В частности, в [2] было показано, что полученная производящая функция достаточно просто выражается через неприводимые характеры симметрической группы, теория которых была развита Г. Фробениусом. Методами, не использующими теорию представлений, X. Рерл [3] получил верхнюю и нижнюю оценки для числа неэквивалентных накрытий над $S$, имеющих заданный тип ветвления. Е. Ллойд [4] при несколько ином определении эквивалентности получил производящую функцию для числа неэквивалентных регулярных накрытий над римановой сферой с циклической группой преобразований наложения $C_p$, где $p$ — простое число $>2$. В работах автора [5, 6] было определено число неэквивалентных накрытий регулярного типа простой кратности и показано, что это число выражается в терминах неприводимых характеров симметрических групп, степени которых не превосходят кратности накрытия.

В настоящей работе дается полное решение задачи о числе неэквивалентных неразветвленных накрытий заданной кратности над произвольной компактной римановой поверхностью $S$.

2°. Пусть $S$ — компактная риманова поверхность рода $g$. Всюду в дальнейшем под накрытием $\pi : T \to S$ будем понимать гладкое безграничное накрытие.

Из общей теории накрывающих пространств известно, что классы эквивалентных накрытий над $S$ находятся во взаимно однозначном соответствии с классами сопряженных подгрупп фундаментальной группы $S$, которая в случае $g \geqslant 1$ представляется в виде

$$\Gamma_g = \left\{a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g \colon \prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i] = 1\right\}.$$

и тривиальна, если $g = 0$. Для определения числа неэквивалентных накрытий нам потребуется следующий результат, доказательство которого можно найти в [6].

Теорема 1. *Число подгрупп индекса $n$ в фундаментальной группе компактной римановой поверхности рода $g$ равно*

$$M_g(n) = n \sum_{s=1}^{n} \frac{(-1)^{s+1}}{s} \sum_{\substack{i_1+i_2+\ldots i_s=n \\ i_1, i_2, \ldots, i_s \geqslant 1}} \beta_{i_1}\beta_{i_2} \ldots \beta_{i_s},$$

*где*

$$\beta_k = \sum_{\lambda \in D_k} \left(\frac{k!}{f^\lambda}\right)^{2g-2},$$

*$D_k$ — множество всех неприводимых представлений симметрической группы $S_k$, а $f^{(\lambda)}$ — степень представления $\lambda$.*

В случае простого $n$ переход от числа подгрупп $M_g(n)$ к числу классов сопряженных подгрупп $N_g(n)$ достаточно прост. Схема такого перехода приведена в [6]. Там же было отмечено, что для составного $n$ возникает ряд существенных трудностей, связанных с описанием транзитивных представлений $\Gamma_g$ в централизаторах регулярных подстановок на $n$ символах. В. А. Лисковец высказал предположение, что его метод расщепления [7] позволит обойти указанные трудности. Это предположение в действительности подтвердилось.

Окончательный результат дает следующая

Теорема 2. *Число неэквивалентных $n$-листных накрытий над компактной римановой поверхностью рода $g$ определяется по формуле*

$$N_g(n) = \frac{1}{n} \sum_{m|n} M_g(m) \sum_{d\left|\frac{n}{m}\right.} \mu\left(\frac{n}{md}\right) d^{(2g-2)m+2},$$

*где $\mu(n)$ — функция Мёбиуса, а $M_g(m)$ то же, что и в теореме 1.*

3°. Для доказательства теоремы нам потребуется несколько предварительных результатов. Пусть $g>0$ и $S_n^{2g}$ — декартово произведение $2g$ экземпляров симметрической группы $S_n$.

Образуем множество всех транзитивных представлений группы $\Gamma_g$ в $S_n$:

$$\mathcal{T}_{2g}(n) = \Big\{(a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g) \in S_n^{2g}: \prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i] = 1,$$

$$a_i, b_i, \ i=1, \ldots, g \text{ — порождают транзитивную группу}\Big\}.$$

Пусть $S_{n-1}$ — подгруппа $S_n$, оставляющая на месте символ $n$. Будем считать, что группы $S_n$ и $S_{n-1}$ действуют на множестве $\mathcal{T}_{2g}(n)$ сопряжением.

Следующая стандартная лемма из теории групп может быть доказана, например, методом, изложенным в теореме 7.2.7 из [8].

Лемма 1. *Пусть $n>1$. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между подгруппами индекса $n$ в группе $\Gamma_g$ и орбитами группы $S_{n-1}$ на множестве $\mathcal{T}_{2g}(n)$.*

В силу сделанного выше замечания о соответствии между классами сопряженных подгрупп и классами эквивалентных накрытий справедлива принадлежащая А. Гурвицу

Лемма 2. *Число неэквивалентных $n$-листных накрытий над $S$ совпадает с числом орбит группы $S_n$ на $\mathcal{T}_{2g}(n)$.*

Нам понадобится также

Лемма 3. (Бернсайд). *Число орбит при действии конечной группы $G$ на множестве $X$ равно*

$$N = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} |F_\sigma|,$$

*где $F_\sigma = \{x \in X : \sigma x = x\}$, а прямые скобки означают мощность заключенного в них множества.*

Пусть $v$ — подстановка из $S_n$, действующая сопряжением на $\mathcal{T}_{2g}(n)$, множество неподвижных точек которой $F_v \neq \varnothing$. Тогда $v$ перестановочна с некоторой транзитивной группой $\langle a_i, b_i \rangle_{i=1,\ldots,g}$, порожденной элементами упорядоченного набора $(a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g) \in \mathcal{T}_{2g}(n)$, и в силу [9, с. 9] является регулярной подстановкой, состоящей из $m$ циклов длины $l$, $lm = n$:

$$v = (v_1 \ldots v_l)(v_{l+1} \ldots v_{2l}) \ldots (v_{(m-1)l+1} \ldots v_n). \tag{1}$$

Для краткости будем говорить в этом случае, что $v$ — подстановка типа $((l^m))$.

Хорошо известно, что централизатор $v$ в группе $S_n$ представляется в виде сплетения $C_l \mathit{г} S_m$, где $C_l$ — циклическая группа порядка $l$. Каждый элемент $a \in C_l \mathit{г} S_m$ будем записывать в виде $a = (c_1, \ldots, c_m; a^\alpha)$, где $c_1, \ldots$ $\ldots, c_m \in C_l$ и $a^\alpha \in S_m$.

Действие подстановки $a$ на множестве $\{v_1, \ldots, v_n\}$ осуществляется следующим образом. Сначала для каждого $i = 1, \ldots, m$ в $i$-м цикле подстановки $v$ производится циклическая перестановка на $c_i$ элементов вправо, а затем $m$ циклов $v$ переставляются под действием подстановки $a^\alpha$.

При этом, если $b = (d_1, \ldots, d_m; b^\alpha) \in C_l \mathit{г} S_m$, то

$$ab = \left(c_1 + d_{a^{\alpha}(1)}, \ldots, c_m + d_{a^{\alpha}(m)}; a^\alpha b^\alpha\right) \tag{2}$$

и

$$a^{-1} = \left(c_{\bar{a}^{\alpha}(1)}, \ldots, c_{\bar{a}^{\alpha}(m)}; \bar{a}^\alpha\right), \tag{3}$$

где $\bar{a}^\alpha = (a^\alpha)^{-1}$ и все подстановки умножаются по написанию. В частности, при таком соглашении $ab(j) = b(a(j))$ для $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Для удобства в дальнейшем будем считать, что группа $C_l$ состоит из классов вычетов по модулю $l$.

Из правила умножения подстановок в $C_l \mathit{г} S_m$ нетрудно заметить, что отображение $\alpha : a \to a^\alpha$ является эпиморфизмом группы $S_n$ на группу $S_m$.

Образуем множество

$$\Gamma\left(l^m\right) = \Big\{(a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g) \in (C_l \mathit{г} S_m)^{2g}\colon \prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i] = 1,$$

$$\langle a_i^\alpha, b_i^\alpha \rangle_{i=1,\ldots,g} \text{ — транзитивная подгруппа в } S_m\Big\}.$$

Идея доказательства следующей леммы принадлежит В. А. Лисковцу [7].

Лемма 4. $\left|\Gamma\left(l^m\right)\right| = \sum\limits_{\substack{h|l\\ hd=l}} h^{m-1}\left|F_{d^m}\right|$, где $\left|F_{d^m}\right|$ — *число неподвижных точек подстановки типа* $((d^m))$ *на множестве* $\mathcal{T}_{2g}(md)$.

Доказательство. Пусть $(a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g) \in \Gamma(l^m)$ и $G = \langle a_i, b_i \rangle_{i=1,\ldots,g}$ — группа, порожденная подстановками $a_i, b_i$, $i = 1, \ldots, g$. Обозначим через $G_I$ подгруппу $G$, оставляющую инвариантным множество $\{v_1, \ldots, v_l\}$. В записи (1) регулярной подстановки $v$ для простоты будем считать, что $v_1 = 1$. Тогда сужение $G_I$ на $\{v_1, \ldots, v_l\}$ — циклическая группа, порожденная подстановкой:

$$(v_1 \ldots v_l)^h = (1 v_{12} \ldots v_{1d}) \ldots (v_{h1} v_{h2} \ldots v_{hd})$$

для некоторого $h | l$ и $d = l/h$.

Действительно, все элементы сужения $G_I$ циклически переставляют компоненты первого цикла $(v_1 \ldots v_l)$ подстановки $v$ и в качестве $h$ можно выбрать наименьший нетривиальный сдвиг при таком действии.

Группа $\langle a_i^\alpha, b_i^\alpha \rangle_{i=1,\ldots,g}$ действует транзитивно на множестве циклов подстановки $v$, поэтому содержащая 1 орбита $W$ группы $G$ состоит из множества $\{1, v_{12}, \ldots, v_{1d}\}$ и всех точек циклов длины $d$, взятых по одному из подстановок $(v_{(j-1)l+1} \ldots v_{j\cdot l})^h$, $j = 2, \ldots, m$.

В частности, отсюда получим, что подстановка $v^h$ оставляет $W$ инвариантным и ее сужение $v^h|_W$ состоит из $m$ циклов длины $d$.

Заметим, что подстановки $a_i, b_i$, $i = 1, \ldots, g$, выбраны из централизатора $C_l \mathit{г} S_m$ элемента $v$ в $S_n$ и, следовательно, перестановочны с $v^h$. Переходя к сужениям указанных подстановок на множество $W$, непосредственно убеждаемся, что каждый элемент группы $\langle a_i|_W, b_i|_W \rangle_{i=1,\ldots,g}$, транзитивно действующей на $W$, перестановочен с $v^h|_W$.

Обратно, пусть $(a_1^W, b_1^W, \ldots, a_g^W, b_g^W) \in \mathcal{T}_{2g}(md)$ — транзитивное представление группы $\Gamma_g$ на $md$ символах множества $W$, перестановочное с элементом $v^h|_W$. Всего таких представлений $|F_{d^m}|$, и каждое из них однозначно определяет представление $(a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g) \in \Gamma(l^m)$ такое, что $a_i|_W = a_i^W$, $b_i|_W = b_i^W$, $i = 1, \ldots, g$.

Осталось заметить, что для заданной подстановки $v$ множество $W$ $(1 \in W)$ может быть выбрано $h^{m-1}$ способами, откуда окончательно получим

$$|\Gamma(l^m)| = \sum_{\substack{h|l \\ hd=l}} h^{m-1} |F_{d^m}|.$$

Следующий результат из линейной алгебры понадобится нам для доказательства леммы 6.

Лемма 5. *Пусть подстановки $\xi_1, \ldots, \xi_p$ порождают транзитивную подгруппу в $S_m$. Тогда ранг линейной системы $m$ уравнений с $mp$ неизвестными*

$$x_i^1 + x_i^2 + \ldots + x_i^p - x^1_{\xi_1(i)} - x^2_{\xi_2(i)} - \ldots - x^p_{\xi_p(i)} = 0, \tag{4}$$

*$(i = 1, \ldots, m)$, равен $m - 1$.*

Доказательство. Пусть ранг указанной системы равен $s - 1$. Тогда существует множество индексов $J_s = \{j_1, \ldots, j_s\}$ и числа $A_i \neq 0$, $i \in J_s$, такие, что

$$\sum_{i \in J_s} A_i \left(x_i^1 + \ldots + x_i^p - x^1_{\xi_1(i)} - \ldots - x^p_{\xi_p(i)}\right) \equiv 0.$$

Откуда для $k = 1, \ldots, p$ имеем

$$\sum_{i \in J_s} A_i \left(x_i^k - x^k_{\xi_k(i)}\right) \equiv 0.$$

Поскольку коэффициенты $A_i$ отличны от нуля необходимым условием последнего равенства будет инвариантность множества $J_s$ относительно подстановки $\xi_k$.

Следовательно, транзитивная группа, порожденная подстановками $\xi_k$, $k = 1, \ldots, p$, оставляет $J_s$ инвариантным, откуда $s = m$.

Лемма 6. $|\Gamma(l^m)| = l^{2mg-(m-1)} |\mathcal{T}_{2g}(m)|$.

Доказательство. Выберем упорядоченный набор $(a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g) \in \Gamma(l^m)$ и каждую его компоненту представим в виде

$$a_i = (c_1^i, \ldots, c_m^i; a_i^\alpha), \quad b_i = (d_1^i, \ldots, d_m^i; b_i^\alpha), \qquad i = 1, \ldots, g.$$

Пользуясь формулами (2) и (3), вычислим коммутатор $[a_i, b_i] = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$. Имеем

$$[a_i, b_i] = \left(c_j^i + d^i_{\beta(j)} - c^i_{\gamma(j)} - d^i_{\delta(j)};\ [a_i^\alpha, b_i^\alpha]\right), \tag{5}$$

где $\beta = a_i^\alpha$, $\gamma = a_i^\alpha b_i \bar{a}_i^\alpha$, $\delta = a_i^\alpha b_i^\alpha \bar{a}_i^\alpha \bar{b}_i^\alpha$. При этом $\bar{a}_i^\alpha = (a_i^\alpha)^{-1}$, $\bar{b}_i^\alpha = (b_i^\alpha)^{-1}$ и подстановки всюду умножаются по написанию.

Применяя формулу умножения (2) нужное число раз, из (5) получим

$$\begin{aligned}[a_1, b_1] \ldots [a_g, b_g] = \bigl(&c^1_{\alpha_1(j)} + d^1_{\beta_1(j)} - c^1_{\gamma_1(j)} - d^1_{\delta_1(j)} + \ldots \\ &\ldots + c^g_{\alpha_g(j)} + d^g_{\beta_g(j)} - c^g_{\gamma_g(j)} - d^g_{\delta_g(j)};\ [a_1^\alpha, b_1^\alpha] \ldots [a_g^\alpha, b_g^\alpha]\bigr),\end{aligned} \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned}&\alpha_i = \delta_{i-1}, \quad \beta_i = \delta_{i-1} a_i^\alpha, \quad \gamma_i = \delta_{i-1} a_i^\alpha b_i^\alpha \bar{a}_i^\alpha, \\ &\delta_i = \delta_{i-1} [a_i^\alpha, b_i^\alpha], \quad i = 1, \ldots, g; \quad \delta_0 = 1.\end{aligned} \tag{7}$$

Приравнивая выражение (6) единице $1_n = (0, \ldots, 0;\ 1_m) \in C_l \wr S_m$, получим $m$ уравнений в циклической группе $C_l$:

$$c^1_{\alpha_1(j)} + d^1_{\beta_1(j)} - c^1_{\gamma_1(j)} - d^1_{\delta_1(j)} + \ldots + c^g_{\alpha_g(j)} + d^g_{\beta_g(j)} - c^g_{\gamma_g(j)} - d^g_{\delta_g(j)} = 0,$$
$$j = 1, 2, \ldots, m, \tag{8}$$

и одно уравнение в группе $S_m$:

$$\left[a^\alpha_1, b^\alpha_1\right] \ldots \left[a^\alpha_g, b^\alpha_g\right] = 1_m. \tag{9}$$

По определению, множества $\Gamma(l^m)$ подстановки $a^\alpha_i$, $b^\alpha_i$, $i = 1, \ldots, g$, порождают транзитивную подгруппу в $S_m$, поэтому число решений уравнения (9) равно $|\mathcal{T}_{2g}(m)|$.

Положим

$$\xi_{2k-1} = \gamma_k \alpha_k^{-1}, \quad \xi_{2k} = \delta_k \beta_k^{-1}, \qquad k = 1, \ldots, g, \tag{10}$$

и перепишем систему (8) в виде

$$x^1_j + x^2_j + \ldots + x^{2g}_j - x^1_{\xi_1(j)} - x^2_{\xi_2(j)} - \ldots - x^{2g}_{\xi_{2g}(j)} = 0, \tag{11}$$

где $x^{2k+1}_j = c^k_{\alpha_k(j)}$ и $x^{2k}_j = d^k_{\beta_k(j)}$, $k = 1, \ldots g$; $j = 1, \ldots, m$.

Исключая из соотношений (7) и (10) величины $\alpha_i$, $\beta_i$, $\gamma_i$, $i = 1, \ldots, g$, выразим подстановки $\xi_1, \ldots, \xi_{2g}$ через $a^\alpha_1$, $b^\alpha_1$, $\ldots$, $a^\alpha_g$, $b^\alpha_g$ и обратно.

Получим

$$\xi_{2k-1} = \delta_k b^\alpha_k \delta^{-1}_{k-1}, \quad \xi_{2k} = \delta_k \bar{a}^\alpha_k \delta^{-1}_{k-1}, \tag{12}$$

где $\delta_k = \delta_{k-1}\left[a^\alpha_k, b^\alpha_k\right]$, $k = 1, \ldots, g$, и $\delta_0 = 1$, а также

$$a^\alpha_k = \delta^{-1}_{k-1} \xi^{-1}_{2k} \delta_k, \quad b^\alpha_k = \delta^{-1}_k \xi_{2k-1} \delta_{k-1}, \tag{13}$$

где $\delta_k = \left[\xi_{2k}, \xi^{-1}_{2k-1}\right] \delta_{k-1}$, $k = 1, \ldots, g$, и $\delta_0 = 1$.

Формулы (12) и (13) показывают, что подстановки $\xi_1, \ldots, \xi_{2g}$ порождают транзитивную подгруппу $\langle a^\alpha_i, b^\alpha_i \rangle_{i=1,\ldots,g}$ в $S_m$.

По лемме 5 линейная система (11) и эквивалентная ей система (8) имеют ранг, равный $m - 1$. Отсюда для каждого фиксированного решения $\left(a^\alpha_1, b^\alpha_1, \ldots, a^\alpha_g, b^\alpha_g\right)$ уравнения (9) имеем $l^{2gm-(m-1)}$ решений системы (8) и, следовательно,

$$|\Gamma(l^m)| = l^{2gm-(m-1)} |\mathcal{T}_{2g}(m)|.$$

4°. Доказательство теоремы 2. Пусть $N_g(n)$ — число неэквивалентных $n$-листных накрытий над компактной римановой поверхностью рода $g$. В силу лемм 2 и 3

$$N_g(n) = \frac{1}{|S_n|} \sum_{v \in S_n} |F_v| = \frac{1}{n!} \sum_{v \in S_n} |F_v|. \tag{14}$$

Выше в п. 3° было отмечено, что все подстановки $v \in S_n$, для которых множество $F_v$ непусто, являются регулярными. Для каждого делителя $m$ числа $n$ в симметрической группе $S_n$ имеется $n!/(m!\, l^m)$ регулярных подстановок типа $((l^m))$, $ml = n$. Учитывая, что все подстановки одного типа имеют одинаковое число неподвижных точек, перепишем (14) в виде

$$N_g(n) = \frac{1}{n!} \sum_{\substack{m|n \\ ml=n}} \frac{n!}{m!\, l^m} \left|F_{l^m}\right| = \sum_{\substack{m|n \\ ml=n}} \frac{\left|F_{l^m}\right|}{m!\, l^m}. \tag{15}$$

Сравнивая правые части выражений в леммах 4 и 6, получим равенство

$$l^{2gm-(m-1)} |\mathcal{T}_{2g}(m)| = \sum_{\substack{d \backslash l \\ hd=l}} h^{m-1} \left|F_{d^m}\right|. \tag{16}$$

Заменяя в (16) число $h$ на $l/d$ после сокращений, имеем

$$l^{2gm-2(m-1)}|\mathcal{T}_{2g}(m)| = \sum_{d|l} \frac{|F_{dm}|}{d^{m-1}}. \tag{17}$$

По формуле обращения Мёбиуса [8, с. 193] из равенства (17) получим

$$\frac{|F_{lm}|}{l^{m-1}} = |\mathcal{T}_{2g}(m)| = \sum_{d|l} \mu\left(\frac{l}{d}\right) d^{(2g-2)m+2}, \tag{18}$$

где $\mu(l)$ — теоретико-числовая функция Мёбиуса.

Из леммы 1 нетрудно заключить, что число транзитивных представлений группы $\Gamma_g$ в $S_m$ и число подгрупп $M_g(m)$ связаны соотношением

$$|\mathcal{T}_{2g}(m)| = (m-1)!M_g(m). \tag{19}$$

Действительно, в подгруппе $S_{m-1}$ группы $S_m$ имеется единственная регулярная подстановка на $m$ символах $-1_m$.

По лемме Бернсайда,

$$M_g(m) = \frac{1}{|S_{m-1}|}|F_{1m}| = \frac{1}{(m-1)!}|\mathcal{T}_{2g}(m)|,$$

откуда и следует (19).

Из (18), (19) и равенства $ml = n$ имеем

$$\frac{|F_{lm}|}{m!l^m} = \frac{l^{m-1}(m-1)!M_g(m)}{m!l^m} \sum_{d|l} \mu\left(\frac{l}{d}\right) d^{(2g-2)m+2} =$$

$$= \frac{1}{n} M_g(m) \sum_{d|\frac{n}{m}} \mu\left(\frac{n}{md}\right) d^{(2g-2)m+2}. \tag{20}$$

Подставляя (20) и (15), окончательно получим

$$N_g(n) = \frac{1}{n} \sum_{m|n} M_g(m) \sum_{d|\frac{n}{m}} \mu\left(\frac{n}{md}\right) d^{(2g-2)m+2}.$$

*Омск,*
*Омский государственный университет*

*Статья поступила*
*11 июня 1980 г.*

*ЛИТЕРАТУРА*

1. *Hurwitz A.* Über Riemann'sche Flächen mit gegeben Verzweigungspunkten.— Math. Ann., 1891, Bd. 39, S. 1—61.
2. *Hurwitz A.* Über die Anzahl der Riemannschen Flächen mit gegeben Verzweigungspunkten.— Math. Ann., 1902, Bd. 55, S. 53—66.
3. *Rohrl H.* Unbounded coverings of Riemann surfacer and extensions of ringr of meromorphic functions.— Trans. Amer. Math. Soc., 1963, v. 107, N 2, p. 320—346.
4. *Lloyd E.* Riemann surfaces transformation groups.— J. Combinatorial Theory (A), 1972, v. 13, p. 17—27.
5. *Медных А. Д.* Определение числа неэквивалентных накрытий над компактной римановой поверхностью.— Докл. АН СССР, 1978, т. 239, № 2, с. 269—271.
6. *Медных А. Д.* О неразветвленных накрытиях компактных римановых поверхностей.— Докл. АН СССР, т. 244, № 3, с. 529—532.
7. *Лисковец В. А.* К перечислению подгрупп свободной группы.— Докл. АН БССР, 1971, т. 15, № 1, с. 6—9.
8. *Холл М.* Теория групп.— М.: Мир, 1962.
9. *Wielandt H.* Finite Permutation Groups.— Acad. Press, 1964.