



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

E. A. Illarionov, D. D. Sokoloff, V. N. Tutubalin, Stationary distribution of product of matrices with random coefficients,  
*Num. Meth. Prog.*, 2012, Volume 13, Issue 1, 218–225

<https://www.mathnet.ru/eng/vmp22>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.173

April 23, 2025, 11:02:17



УДК 519.642.4

## СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МАТРИЦ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Е. А. Илларионов<sup>1</sup>, Д. Д. Соколов<sup>2</sup>, В. Н. Тутубалин<sup>1</sup>

Изучение вероятностных свойств произведения большого числа независимых одинаково распределенных случайных матриц опирается на ряд результатов Г. Ферстенберга (1963). В частности, им доказана эргодичность марковской цепи, которая порождается действием случайных матриц на некотором компактном однородном пространстве группы матриц  $W$ , которое называется границей группы матриц. Стационарное распределение этой цепи (инвариантная вероятностная мера) определяет параметры предельного поведения произведения матриц. До сих пор эта мера была найдена лишь в простейших случаях. На примере фундаментальной матрицы для уравнения Якоби со случайной кривизной мы численно рассчитали инвариантную меру и по ней вычислили показатель Ляпунова и скорости роста моментов поля Якоби. Результаты сравниваются с результатами, полученными ранее с помощью метода Монте-Карло, причем обнаруживается высокая степень совпадения результатов.

**Ключевые слова:** стационарное распределение, произведение матриц, интегральное уравнение, уравнение Якоби.

**1. Введение.** Изучение предельных свойств произведения большого числа случайных матриц было начато Беллманом [1] и затем продолжалось рядом математиков [2]. Было получено относительно полное описание как асимптотических свойств матричных элементов, так и распределения всей матрицы-произведения  $B(n) = B_1 B_2 \dots B_n$  в целом, но это описание зависит от стационарного распределения некоторой марковской цепи (инвариантной меры). Эта мера является решением некоторого интегрального уравнения, но найти ее в явном виде удалось лишь в ряде простейших случаев [3]. Математические результаты [4] сводятся к доказательству существования и единственности этой меры (при введении дополнительных предположений на распределение  $\mu$  перемножаемых матриц) и к доказательству строгой положительности некоторых интегралов по прямому произведению инвариантной меры  $\nu$  на распределении матриц  $\mu$ . В частности, определим показатель Ляпунова  $\lambda$  соотношением

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|x B(n)\|,$$

где  $x$  — любой ненулевой вектор и предел понимается с вероятностью 1.

Известна теорема Ферстенберга [4] и ее обобщения, которые утверждают, что (при некоторых условиях на  $\mu$ ) показатель Ляпунова строго положителен.

В дальнейшем мы рассматриваем случай группы матриц  $G = SL(2, \mathbb{R})$ . В этом случае границей группы  $G$  является единичная окружность  $W$  (со склеенными диаметрально противоположными точками). Определим действие элемента  $g \in G$  на  $W$  формулой  $w \circ g = \frac{wg}{\|wg\|}$ . В силу этого определения последовательность  $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$  независимых одинаково распределенных случайных элементов группы  $G$  задает на  $W$  однородную по времени марковскую цепь. Стационарное распределение этой цепи и является инвариантной мерой  $\nu$ . Определим свертку меры  $\nu$  на  $W$  с мерой  $\mu$  на  $G$  следующим образом:  $\nu * \mu$  — это такая мера на  $W$ , что для любой измеримой функции  $f(w)$  выполняется соотношение

$$\int_W f(w) d(\nu * \mu(w)) = \int_G \int_W f(w \circ g) d\nu(w) d\mu(g).$$

<sup>1</sup> Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119899, Москва; Е. А. Илларионов, студент, e-mail: egor.mypost@gmail.com; В. Н. Тутубалин, профессор, e-mail: vntutubalin@yandex.ru

<sup>2</sup> Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Ленинские горы, 119991, Москва; профессор, e-mail: sokoloff@dds.srcc.msu.su

Инвариантная мера  $\nu$ , очевидно, удовлетворяет соотношению  $\nu * \mu = \nu$ . Показатель Ляпунова  $\lambda$  выражается формулой

$$\lambda = \int_G \int_W \log \|wg\| d\nu(w) d\mu(g).$$

Полученные Ферстенбергом результаты могут быть применены для изучения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, если предположить, что коэффициенты этих уравнений обновляются (т.е. заменяются на статистически независимые) в определенные моменты времени. В этом случае фундаментальная матрица системы оказывается произведением независимых случайных матриц, так что становится возможным ее асимптотическое исследование на основе предельных теорем [5]. При заданном распределении  $\mu$  отдельных фундаментальных матриц вопрос упирается в вычисление соответствующей инвариантной меры  $\nu$ . Как правило, эту меру не удается найти аналитически, и остается искать ее численно. Исследование возникающих при этом проблем и составляет содержание настоящей работы.

Мы решаем интересующую нас задачу на примере уравнения Якоби

$$y''(x) + K(x)y = 0, \tag{1}$$

где  $K(x)$  — случайный процесс с обновлением. Оказывается, даже в таком относительно простом примере ядро интегрального уравнения, из которого определяется инвариантная мера, является быстро изменяющейся функцией, так что решение требует привлечения существенных компьютерных ресурсов. По-видимому, до сих пор задача численного нахождения инвариантной меры не привлекала внимания исследователей, а указанная трудность не была известна.

Уравнение (1) можно, конечно, исследовать методами прямого численного моделирования, задавая  $K(x)$  с помощью некоторого генератора псевдослучайных чисел. Таким способом в [6] были (в частности) найдены оценки показателя Ляпунова. Мы вычисляем эти же величины с помощью найденной инвариантной меры и сравниваем полученные оценки с результатами [6], выясняя таким образом, насколько надежными можно считать результаты, получаемые с помощью псевдослучайных чисел.

**2. Уравнение Якоби и теорема Ферстенберга.** Пусть на двумерном римановом многообразии задано семейство геодезических  $\gamma(\theta, x)$ , проходящих через фиксированную точку. Здесь  $x$  — расстояние вдоль геодезической,  $\theta$  — угол, отсчитываемый от некоторой фиксированной геодезической  $\Gamma$ . Поле Якоби  $y$  в точке  $x$  вдоль  $\Gamma$  называется величина  $y(x) = \left. \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} \right|_{\theta=0}$ . Поле Якоби может быть найдено из уравнения Якоби  $y''(x) + K(x)y = 0$ , где  $K$  — кривизна. В дальнейшем будем считать  $K$  случайным процессом, заданным на луче  $x > 0$ , с обновлением в целочисленных точках. На полуинтервалах вида  $[n - 1, n)$  полагаем значения  $K$  постоянными и равными  $K_n$ , где  $K_n$  — независимые равномерно распределенные на отрезке  $[-K_{\max}, K_{\max}]$  случайные величины.

Перепишем уравнения Якоби в векторном виде, положив  $z_1(x) = y(x)$ ,  $z_2(x) = y'(x)$  и введя вектор-строку  $z = (z_1, z_2)$ :  $(z'_1, z'_2) = (z_1, z_2) \begin{pmatrix} 0 & -K(x) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Пусть  $B(t, x)$  — фундаментальная матрица системы, т.е. такая матрица, что  $z(x) = z(t)B(t, x)$  при  $t < x$ . Внутри интервала обновления кривизна постоянна, поэтому матрица  $B$  имеет вид  $B(n - 1, n) = \exp \begin{pmatrix} 0 & -K_n \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Если  $K_n \geq 0$ , то  $B(n - 1, n) = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{K_n} & -\sqrt{K_n} \sin \sqrt{K_n} \\ \sin \sqrt{K_n} / \sqrt{K_n} & \cos \sqrt{K_n} \end{pmatrix}$ .

Если  $K_n < 0$ , то  $B(n - 1, n) = \begin{pmatrix} \cosh \sqrt{-K_n} & \sqrt{-K_n} \sinh \sqrt{-K_n} \\ \sinh \sqrt{-K_n} / \sqrt{-K_n} & \cosh \sqrt{-K_n} \end{pmatrix}$ .

Последовательность  $\{z(n)\}$ , где  $z(n) = z(n - 1)B(n - 1, n)$ , образует цепь Маркова. Пусть  $w(n)$  — единичный вектор, сонаправленный с  $z(n)$ . Последовательность  $\{w(n)\}$  точек единичной окружности также образует цепь Маркова. Если отождествить диаметрально противоположные точки этой окружности, то вновь полученная цепь Маркова является эргодической [4]. Это означает, что при  $n \rightarrow \infty$  устанавливается некое стационарное распределение  $\pi$  отождествленных точек на окружности. Искомой инвариантной мерой является это стационарное распределение. Показатель Ляпунова  $\lambda$  можно представить в виде следующего математического ожидания:  $\lambda = E \log \|wB\|$ , где  $w = (\cos \phi, \sin \phi)$  и  $\phi$  имеет стационарное распределение, а матрица  $B$  — распределение любой из матриц  $B(n - 1, n)$  (используемые логарифмы — натуральные).

В настоящей статье мы численно найдем стационарное распределение  $\pi$  при различных значениях  $K_{\max}$  и вычислим показатель Ляпунова.

**3. Переходная плотность.** После склеивания противоположных точек положение точки на окружности удобно задавать с помощью угла  $\phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ . Пусть  $u = \operatorname{tg} \phi$ . Будем обозначать точку, в которую под действием матрицы  $B$  переходит  $\phi$ , через  $\psi$ , а соответствующие им точки на прямой через  $u$  и  $v$ .

Пусть  $\xi = \sqrt{|K|}$ . Тогда при  $K \geq 0$

$$v = \frac{u - \xi \operatorname{tg} \xi}{1 + u \operatorname{tg} \xi / \xi} = F_u(\xi), \tag{2}$$

$$v = \frac{u + \xi \operatorname{th} \xi}{1 + u \operatorname{th} \xi / \xi} = \tilde{F}_u(\xi), \tag{3}$$

при  $K < 0$ . Заметим, что при  $\xi = 0$  обе формулы дают  $v = u/(1 + u)$ .

Таким образом,  $v$  оказывается функцией от  $u$  и случайного параметра  $\xi$ . Плотность распределения  $v$  при фиксированном  $u$  является переходной плотностью марковской цепи, рассматриваемой на прямой. Обозначим эту плотность через  $p(u, v)$ . Ту же самую плотность в терминах углов обозначим через  $p(\phi, \psi)$ , где по-прежнему  $u = \operatorname{tg} \phi$ ,  $v = \operatorname{tg} \psi$ . Искомая стационарная плотность  $\pi$  находится из уравнения

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} p(\phi, \psi) \pi(\phi) d\phi = \pi(\psi). \tag{4}$$

Переходная плотность  $p(u, v) = p_u(v)$  при фиксированном  $u$  выражается через плотность  $p_\xi$  случайной величины  $\xi$  следующим образом:

$$p_u(v) = \frac{1}{2} \frac{p_\xi(F^{-1}(v))}{|F'(F^{-1}(v))|} + \frac{1}{2} \frac{p_\xi(\tilde{F}^{-1}(v))}{|\tilde{F}'(\tilde{F}^{-1}(v))|}. \tag{5}$$

Отметим важный факт: если  $v$  выражается через  $u$  формулами (2) и (3), то, чтобы получить выражение  $u$  через  $v$ , достаточно положить  $u = -v$  и  $v = -u$ . Таким образом,  $p(u, v) = p(-v, -u)$ , и для изучения свойств этой функции как функции одной переменной при фиксированной второй достаточно рассмотреть лишь один случай. Мы рассматриваем случай фиксированного  $v$ , поскольку в дальнейшем нам потребуется интегрировать эту плотность по  $u$  при каждом  $v$ .

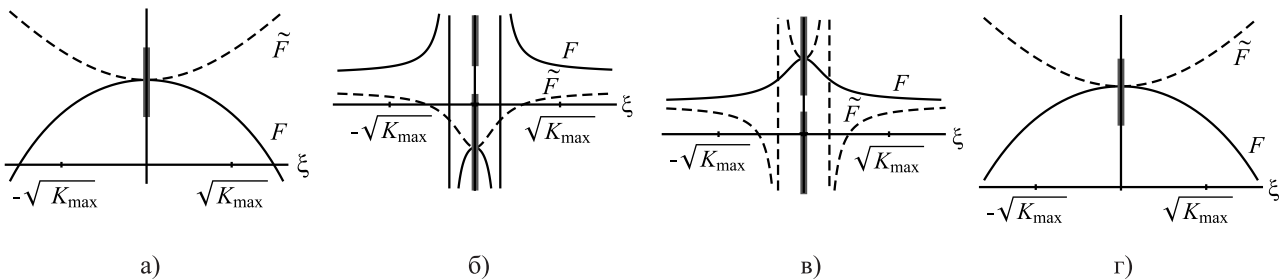


Рис. 1. Графики функций  $F$  (сплошная линия) и  $\tilde{F}$  (пунктирная линия), возникающих при подсчете переходной плотности: а)  $u > -0.6$ , б)  $-1 < u < -0.7$ , в)  $-1.3 < u < -1$ , г)  $u < -1.4$

Основную трудность в подсчете переходной плотности занимает вычисление обратного отображения для  $F$  и  $\tilde{F}$ , которое является неэлементарной функцией. Рассмотрим поведение функций  $F_u(\xi)$  и  $\tilde{F}_u(\xi)$  при различных  $u$ . Для этого разделим вещественную прямую на четыре области: а)  $u > -0.6$ , б)  $-1 < u < -0.7^{(*)}$ , в)  $-1.3^{(*)} < u < -1$ , г)  $u < -1.4$ . В пределах этих областей такие свойства, как монотонность, взаимное расположение, положение асимптот вне или внутри отрезка  $[-\sqrt{K_{\max}}, \sqrt{K_{\max}}]$ , сохраняются. Такой выбор областей подходит для всех  $K_{\max} \leq 1$ , причем от конкретного  $K_{\max}$  зависят только отмеченные звездочкой границы. Соответствующие графики приведены на рис. 1. Сплошной линией показан график для  $F$ , пунктирной для  $\tilde{F}$ . Жирной линией на оси  $y$  выделены области значений  $v$ , для которых существует хотя бы одно решение уравнения  $v = F_u(\xi)$  или  $v = \tilde{F}_u(\xi)$  для  $\xi \in [0, \sqrt{K_{\max}}]$ .

На рис. 1 видны две ситуации, которые будут создавать сложности при численном решении интегрального уравнения (4). Во-первых, на рис. 1б в область  $\xi \in [0, \sqrt{K_{\max}}]$  попадает вертикальная асимптота графика  $F$ , поскольку знаменатель функции  $F$  обращается в 0, а на рис. 1в вертикальная асимптота графика  $\tilde{F}$ . Кроме того, на рис. 1а и 1г видно, что при малых значениях  $K_{\max}$  становится малой область, на которой определено обратное отображение для  $F$  и  $\tilde{F}$ .

Поскольку выражения для  $v$  через  $u$  и  $u$  через  $v$  совпадают после замены переменных  $u = -v, v = -u$  (см. выше), рис. 1а–1г обладают некой двойственностью: с одной стороны, их можно рассматривать как графики  $v = F_u(\xi)$  ( $v = \tilde{F}_u(\xi)$ ), а с другой стороны, отразив их относительно горизонтальной оси, как функции, выражающие уже зависимость  $u$  от  $\xi$  при фиксированном  $v$ . В дальнейшем мы часто пользуемся этим свойством.

На рис. 1а и 1г обе функции на отрезке  $\xi \in [0, \sqrt{K_{\max}}]$  монотонны, поэтому для нахождения решений нам достаточно воспользоваться методом деления отрезка пополам. В том случае, когда на этот отрезок попадает одна из асимптот, можно выделить два отрезка (левее и правее нее), на которых функция снова монотонна, и опять применить метод деления отрезка пополам.

Рассмотрим переходную плотность  $p(\phi, \psi) = p_\psi(\phi)$  при различных фиксированных значениях  $\psi$ . Для определенности положим  $K_{\max} = 1$ . Напомним, что  $\psi$  — точка, в которую перешла точка  $\phi$  под действием матрицы  $B$ , и значения  $\phi, \psi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ . На рис. 2а построены графики  $p_\psi(\phi)$  соответствующие  $\psi = 0.01, \psi = 0.77$  и  $\psi = 1.43$ .

Из рис. 2а видно, что функция  $p_\psi(\phi)$  является непрерывной на каждой компоненте области определения. При  $\psi \approx \arctg 1$ , что соответствует картинке для  $\psi = 0.77$ , носитель состоит из двух компонент связности (это видно и из рис. 1б и 1в после соответствующей замены переменных). В остальных случаях носитель связан. Более полное представление о переходной плотности при различных  $\psi$  дает рис. 2б, на котором построены графики по 100 точкам  $\psi$ , равномерно разбивающим отрезок  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ . Значение  $K_{\max}$  для этого рисунка равно 0.1, что немного сузило каждый график.

Мы не показываем боковых вертикальных линий каждого графика. На рисунке отмечено место, в котором графики соответствуют значениям  $\psi$ , близким к  $-\frac{\pi}{2}$ . Далее при увеличении  $\psi$  графики смещаются вправо. Смещаясь вправо при увеличении  $\psi$ , графики доходят до правого края картинке, и в этом месте происходит перескок на левый край, а их носители становятся разрывными. Это соответствует ситуации, когда  $\psi \approx \arctg 1$ . Затем, перескочив на левый край картинке, при дальнейшем увеличении  $\psi$  графики продолжают смещаться вправо и при  $\psi$ , близких к  $\frac{\pi}{2}$ , приходят в то же место, откуда начинались.

**4. Стационарная плотность.** Стационарная плотность ищется как решение интегрального уравнения (4), которое по своему виду является интегральным уравнением Фредгольма второго рода (с нулевой правой частью). Ядро этого уравнения является функцией, кусочно-непрерывной по каждой переменной. Мы ищем решение методом итераций. В качестве нулевого приближения положим  $\pi_0(\psi) \equiv 1$ . Затем производится нормировка плотности, полученной на предыдущем шаге:

$$\pi_{n-1}(\psi) = \frac{\pi_{n-1}(\psi)}{\|\pi_{n-1}(\psi)\|_{L_1[-\pi/2, \pi/2]}};$$

новая плотность  $\pi_n(\psi)$  находится по формуле 
$$\pi_n(\psi) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p(\phi, \psi)\pi_{n-1}(\phi) d\phi.$$

Процесс останавливается, когда  $\|\pi_n - \pi_{n-1}\|_{L_1[-\pi/2, \pi/2]} < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — заданная точность. Всюду далее

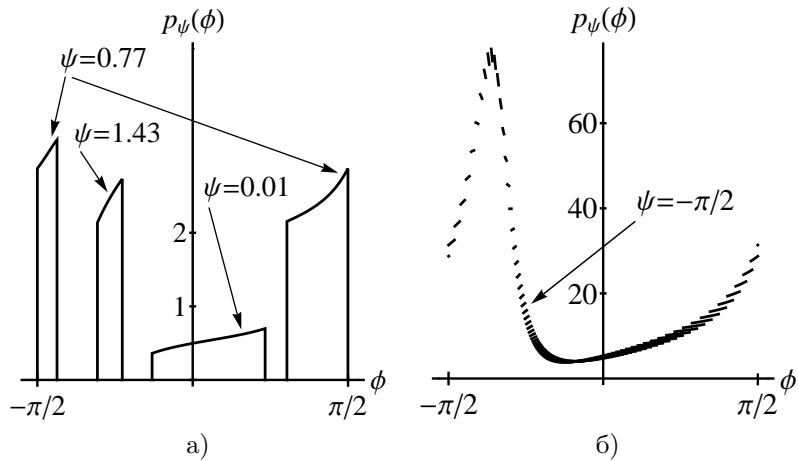


Рис. 2. Вид переходной плотности при различных значениях  $\psi$  (во втором случае подписаны лишь некоторые из них):

а)  $p_\psi(\phi), K_{\max} = 1$ , б)  $p_\psi(\phi), K_{\max} = 0.1$

мы полагаем  $\varepsilon = 10^{-4}$ .

Важную роль при подсчете интеграла играет выбор квадратурной формулы, по которой он вычисляется. Мы пользуемся составной формулой прямоугольников с разбиением на  $N = 10^4$ ,  $2 \times 10^4$  и  $3 \times 10^4$  узлов. Затем полученные результаты сравниваются. Необходимость в таком большом разбиении объясняется следующим. Как уже было отмечено, при малых  $K_{\max}$  становится малой область определения обратного отображения. Мы ставим условие, что при каждом  $\psi$  в область определения обратного отображения должно попадать хотя бы 10 узлов. В частности, при  $K_{\max} = 0.01$  для выполнения этого условия  $N = 10^4$  оказывается недостаточным, что влияет на точность вычисления показателей Ляпунова. Это будет подробнее рассмотрено ниже. В качестве дополнительного контроля точности решения интегрального уравнения мы рассматриваем максимальную по модулю разницу между левой и правой частью интегрального уравнения по всем узлам разбиения. Вычисления при  $N > 10^4$  и большом числе итераций оказались невыполнимыми на обычном компьютере за приемлемое время и были проведены на суперкомпьютере СКИФ МГУ.

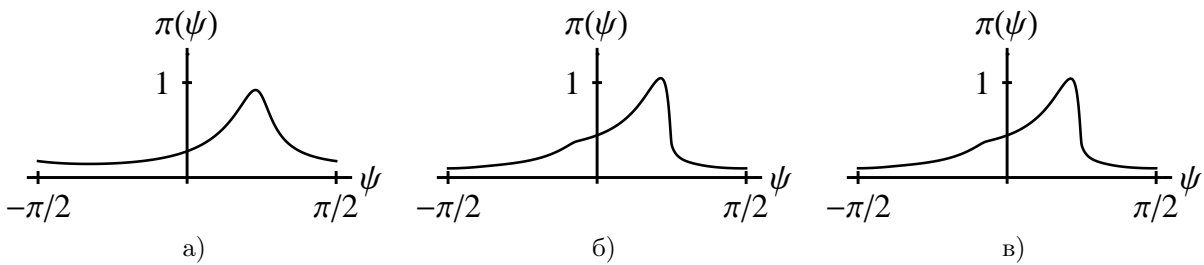


Рис. 3. Последовательные приближения для  $K_{\max} = 1$ ,  $N=10^4$ : а)  $n = 1$ , б)  $n = 8$ , в)  $n = 15$

Последовательные приближения к стационарной плотности для различного числа шагов  $n$  и точек разбиения  $N$  показаны на рис. 3 для  $K_{\max} = 1$ . Здесь и далее мы показываем только значения на первом шаге, на том шаге, когда норма разности между соседними приближениями становится меньше  $10^{-2}$ , и на последнем шаге, когда норма разности становится меньше  $10^{-4}$ .

Сравним результаты при  $n = 15$  и  $N = 10^4$ ,  $2 \times 10^4$  и  $3 \times 10^4$ . Во всех трех случаях итерационный процесс заканчивается на 15 шаге, поскольку норма разности двух соседних приближений становится меньше  $10^{-4}$ . Однако величина погрешности решения интегрального уравнения оказывается разной и равна 0.000196, 0.000111 и 0.000083 соответственно. Таким образом, увеличение  $N$  повышает точность решения.

Сравнение получаемых результатов после  $n = 15$  шагов показывает, что во всех случаях графики полностью совпадают, так что значения  $N > 10^4$  не приводят к качественным изменениям. Полученную функцию мы принимаем за решение интегрального уравнения.

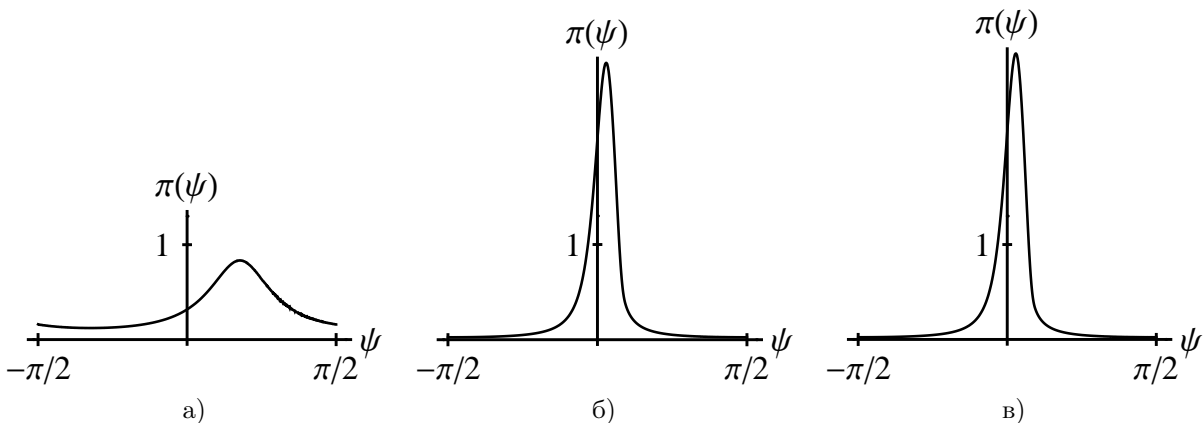


Рис. 4. Последовательные приближения для  $K_{\max} = 0.1$ ,  $N=10^4$ : а)  $n = 1$ , б)  $n = 28$ , в)  $n = 65$

При  $K_{\max} = 0.1$ , аналогично случаю  $K_{\max} = 1$ , увеличение числа узлов приводит к повышению точности решения, не влияя на вид получаемого графика стационарной плотности. Величина погрешности во всех трех случаях равна 0.000242, 0.000221 и 0.000208 соответственно для  $N = 10^4$ ,  $N = 2 \times 10^4$  и  $N = 3 \times 10^4$ . Графики последовательных приближений показаны на рис. 4. При  $n = 65$  норма разности

между соседними приближениями становится меньше  $10^{-4}$  и получаемую функцию мы принимаем за решение.

Зависимость нормы разности от числа шагов для  $K_{\max} = 1$ ,  $K_{\max} = 0.1$  и  $K_{\max} = 0.01$  показана на рис. 5.

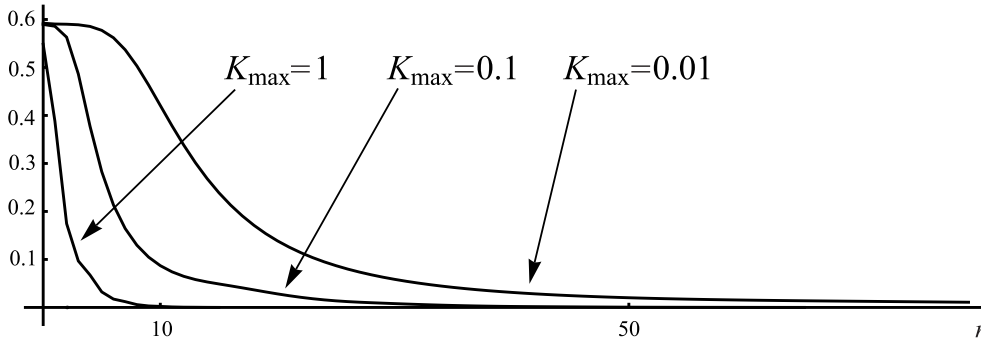


Рис. 5. Норма разности для  $K_{\max} = 1$ ,  $K_{\max} = 0.1$  и  $K_{\max} = 0.01$

Перейдем к случаю  $K_{\max} = 0.01$ . Как уже отмечалось, при  $K \rightarrow 0$  мера носителя ядра нашего интегрального уравнения при каждом  $\psi$  также стремится к нулю, что налагает дополнительные ограничения на выбор сетки, по которой проводится интегрирование. В отличие от двух предыдущих случаев, при  $N = 10^4$  только в 80% случаев в область определения обратного отображения попадает не менее 10 узлов разбиения. При  $N = 2 \times 10^4$  доля таких случаев повышается до 94%, и только при  $N = 3 \times 10^4$  это условие полностью выполняется. Погрешность решения интегрального уравнения изменяется с увеличением  $N$ : 0.009742, 0.002166 и 0.001225 соответственно. При детальном рассмотрении в получаемых графиках также видны небольшие изменения, которые в итоге сказываются на точности вычисления показателей Ляпунова. В качестве решения в этом случае естественно положить график, получаемый при  $N = 3 \times 10^4$ . На рис. 6 приведены последовательные приближения при различных  $n$ . Итерационный процесс завершается при  $n = 248$ .

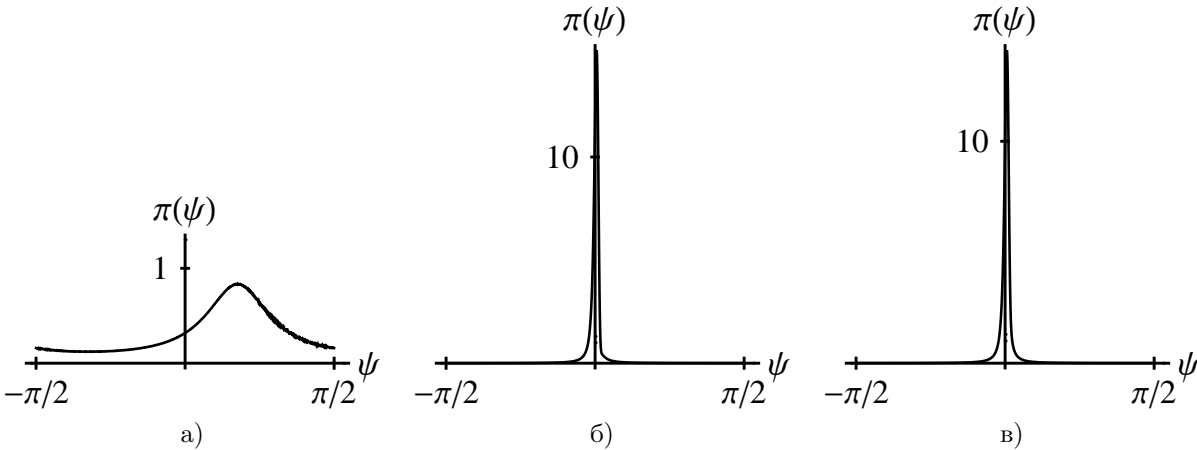


Рис. 6. Последовательные приближения для  $K_{\max} = 0.01$ ,  $N = 3 \times 10^4$ : а)  $n = 1$ , б)  $n = 83$ , в)  $n = 248$

Наряду с плотностью интересна функция распределения

$$F(\phi) = \int_{-\pi/2}^{\phi} \pi(\psi) d\psi. \tag{6}$$

На рис. 7 приведены графики функций распределения для  $K_{\max} = 1, 0.1$  и  $0.01$ .

**5. Показатель Ляпунова.** Вычислим теперь с помощью стационарной плотности показатель Ляпунова произведения случайных матриц, используя соотношение  $\lambda = E \log \|wB\|$ , где  $w = (\cos \psi, \sin \psi)$  и  $\psi$  имеет стационарное распределение.

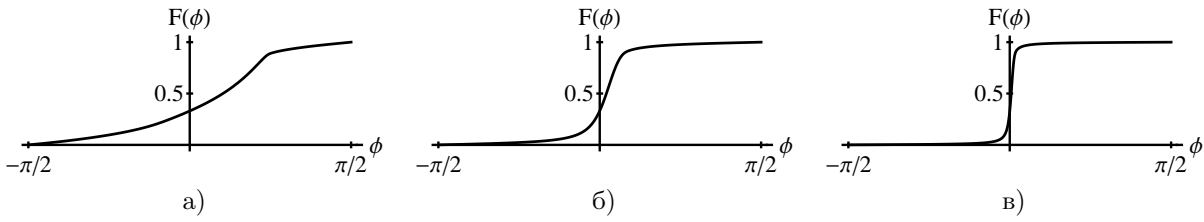


Рис. 7. Функция распределения: а)  $K_{\max} = 1$ , б)  $K_{\max} = 0.1$ , в)  $K_{\max} = 0.01$

Под действием матрицы  $B$  вектор  $(\cos \psi, \sin \psi)$  переходит в вектор  $(a(K, \psi), b(K, \psi))$ . По теореме Фубини искомое математическое ожидание может быть найдено по формуле

$$E \log \|wB\| = \int_{-K_{\max}}^{K_{\max}} \frac{dK}{2K_{\max}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log \|(a(K, \psi), b(K, \psi))\| \pi(\psi) d\psi,$$

где  $\|\cdot\|$  — евклидова норма.

Вычисленный таким образом показатель Ляпунова для различных  $K_{\max}$  приведен в таблице. Для  $K_{\max} = 1$  и  $0.1$  показатели Ляпунова оказались одинаковыми при всех трех рассмотренных значениях  $N$ . Для  $K_{\max} = 0.01$  показатели Ляпунова равнялись  $0.0097$ ,  $0.0094$  и  $0.0093$  при  $N = 10^4$ ,  $2 \times 10^4$  и  $3 \times 10^4$  соответственно.

Показатели Ляпунова и скорости роста моментов

$K_{\max}$	$\lambda$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$	$\gamma_4$	$\gamma_5$	$\gamma_6$
1	0.2132	0.2843	0.3526	0.4154	0.4708	0.5182	0.5584
0.1	0.0441	0.0602	0.0756	0.0906	0.1053	0.1199	0.1345
0.01	0.0093	0.0131	0.0171	0.0213	0.0261	0.0315	0.0379

Наряду с показателями Ляпунова представляют интерес скорости роста моментов поля Якоби

$$\gamma_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{pn} \log E|y(n)|^p.$$

В принципе, величины  $\gamma_p$  можно вводить при любых  $p$ , хотя наибольший интерес вызывают  $\gamma_p$  при небольших целочисленных  $p$ . Нетрудно связать эти скорости роста с найденным стационарным распределением:  $\gamma_p = \frac{1}{p} \log E\|wB\|^p$ , где вектор  $w = (\cos \psi, \sin \psi)$  и  $\psi$  имеет стационарное распределение. Первые шесть скоростей роста целочисленных моментов приведены в таблице для нескольких значений  $K_{\max}$ . Из таблицы видно, что, как это и предсказывается теорией [7],  $\gamma_p$  увеличивается с ростом  $p$ .

В работе [6] показатели Ляпунова вычислялись путем моделирования большого числа реализаций решения уравнения Якоби. Решения находились двумя способами: путем перемножения фундаментальных матриц и методом Рунге–Кутты, при этом для задания случайного процесса использовались различные генераторы случайных чисел (C++ и Basic). В работе [6] исследования проводились для случая, соответствующего нашему значению  $K_{\max} = 1$ . В результате были получены следующие оценки: метод перемножения фундаментальных матриц с использованием генератора, встроенного в Basic, дает  $\lambda = 0.2131$ , для C++ этот показатель равен  $\lambda = 0.2122$ . Метод Рунге–Кутты с использованием Basic дает  $\lambda = 0.2133$ , с использованием C++ получаем  $\lambda = 0.2124$ . Можно видеть, что эти оценки достаточно близки к полученному нами значению  $0.2132$ .

**6. Заключение.** На примере уравнения Якоби (1), по-видимому впервые, была рассчитана инвариантная мера, существование которой было доказано в работах Ферстенберга [4]. Непосредственное решение интегрального уравнения (4), из которого выражается инвариантная мера, требует привлечения больших компьютерных ресурсов. Используя суперкомпьютер СКИФ МГУ, удалось построить данную меру при различных значениях параметров. На ее основе были вычислены показатели Ляпунова и скорости роста



моментов поля Якоби. Сравнение этих результатов с результатами численного моделирования, проведенного ранее с использованием различных генераторов псевдослучайных чисел, показало высокую степень совпадения результатов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bellman R.* Limit theorem for non-commutative operations // I. Duke Math. J. 1954. **21**. 491–500.
2. *Bougerol P., Lacroix J.* Product of random matrices with application to Schrödinger operators // Progress in Probability and Statistics. 1985. **8**. 1–283.
3. *Comtet A., Texier C., Tourigny Y.* Products of random matrices and generalized quantum point scatterers // J. of Statistical Physics. 2010. **140**. 427–466.
4. *Furstenberg H.* Noncommuting random products // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. **108**. 377–428.
5. *Tutubalin V.N.* A central limit theorem for products of random matrices and some of its applications // Symposia Mathematica. 1977. **XXI**. 101–116.
6. *Михайлов Е.А., Соколов Д.Д., Тутубалин В.Н.* Фундаментальная матрица для уравнений Якоби со случайными коэффициентами // Вычислительные методы и программирование. 2010. **11**. 103–110.
7. *Zeldovich Ya.B., Ruzmaikin A.A., Molchanov S.A., Sokoloff D.D.* Kinematic dynamo problem in a linear velocity field // J. Fluid Mech. 1984. **144**. 1–11.

Поступила в редакцию  
24.01.2012

---