



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Ф. Недорезов, О. М. Ромакина, Численное исследование изгиба кусочно-однородной прямоугольной пластинки из изотропного материала,
Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика,
2008, том 8, выпуск 1, 43–50

<https://www.mathnet.ru/isu101>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.175

20 мая 2025 г., 09:46:34



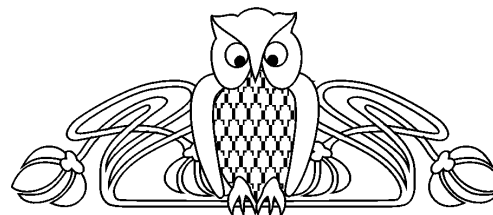


УДК 539.3

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗГИБА КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ ИЗ ИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА

П.Ф. Недорезов, *О.М. Ромакина

Саратовский государственный университет,
кафедра математической теории упругости и биомеханики,
* кафедра компьютерной алгебры и теории чисел
E-mail: romakinaom@hotmail.ru



Numeric Investigation of a Curve Piecewise-Homogeneous Rectangular Plate from an Isotropic Material

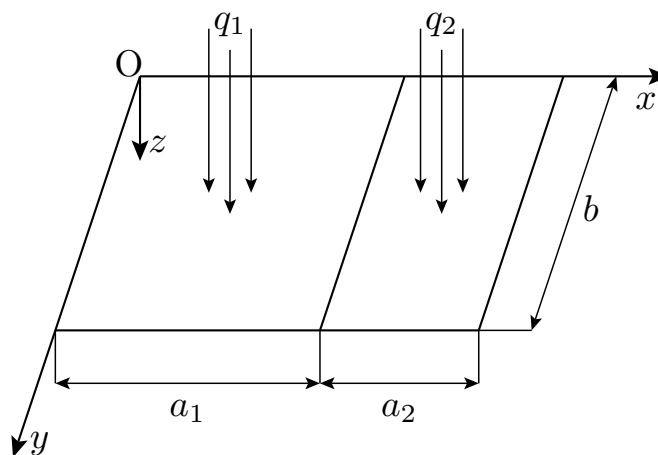
P.F. Nedorezov, O.M. Romakina

В работе рассматривается задача изгиба кусочно-однородной прямоугольной пластинки из изотропного материала. На линии контакта задаются две группы условий: геометрические условия, отражающие непрерывность и гладкость срединной поверхности составной пластинки, и силовые условия, обеспечивающие равенство изгибающих моментов и обобщенных перерезывающих сил в левой и правой частях пластинки. Для решения задачи предлагается модифицированный метод сплайн-коллокации, согласно которому безразмерный прогиб различных частей пластинки может быть представлен в виде линейных комбинаций B -сплайнов пятой степени. Данные комбинации подобраны так, чтобы выполнялись как условия, заданные на вертикальных сторонах пластинки, так и условия на линии контакта. Приводятся различные типы краевых задач, которые решаются численно методом дискретной ортогонализации Годунова.

In this paper we consider the problem of a curve piecewise-homogeneous rectangular plate from an isotropic material. There are two group of condition on the line of a contact: geometric conditions, describing the continuity and smoothness of midsurface of composite plate and force conditions, which supply the equality of bending moments and generalized cutting forces in the left and in the right parts of the plate. To find a solution we suggest a modified spline-collocation method, according to which the nondimensional deflection of the different part of plate may be presented as a linear combination of B-splines of fifth power. These combination are selected so, that the condition on the vertical side of the plate and the condition on the contact line are fulfilled. Different types of boundary problems are presented, which are solved numerically by the method of discrete orthogonalization of Godunov.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

Рассмотрим тонкую прямоугольную пластинку шириной b , составленную из двух частей одинаковой толщины h , но имеющих разную длину (рисунок). Части пластинки изготовлены из разных материалов и жестко скреплены (склеены или спаяны) между собой.



Составная изотропная пластинка

В дальнейшем индексом « k » ($k = 1, 2$) обозначаются характерные величины для k -й части пластинки: E_k, ν_k — модули Юнга и коэффициенты Пуассона; $u^{(k)}, v^{(k)}, w^{(k)}$ — проекции вектора смещения точки (x, y, z) ; $M_x^{(k)}, M_y^{(k)}$ — изгибающие моменты; $H_{xy}^{(k)}$ — крутящий момент; $Q_x^{(k)}, Q_y^{(k)}$ — поперечные силы; $q_k(x, y)$ — интенсивность распределенной при $z = -h/2$ нагрузки.

Считается, что пластинка испытывает малые деформации, подчиняющиеся закону Гука. Предполагаются справедливыми гипотезы классической теории Кирхгофа.



Тогда [1]

$$w^{(k)} = w^{(k)}(x, y), \quad u^{(k)} = -z \frac{\partial w^{(k)}}{\partial x}, \quad v^{(k)} = -z \frac{\partial w^{(k)}}{\partial y} \quad (k = 1, 2), \quad (1)$$

а функции $w^{(k)}(x, y)$ должны удовлетворять уравнениям:

$$D_k \nabla^2 \nabla^2 w^{(k)}(x, y) = q^{(k)}(x, y) \quad (k = 1, 2), \quad (2)$$

где

$$D_k = \frac{E_k h^3}{12(1 - \nu_k^2)}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Внутренние усилия в пластинке выражаются через функции $w^{(k)}$ по известным формулам [1]:

$$\begin{aligned} M_x^{(k)} &= -D_k \left(\frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial x^2} + \nu_k \frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial y^2} \right), & H_{xy}^{(k)} &= -D_k (1 - \nu_k) \frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial x \partial y}, \\ Q_x^{(k)} &= -D_k \frac{\partial}{\partial x} \left(\nabla^2 w^{(k)} \right), & Q_x^{(k)*} &= Q_x^{(k)} + \frac{\partial H_{xy}^{(k)}}{\partial y} \quad (k = 1, 2; x \Leftrightarrow y). \end{aligned} \quad (3)$$

Введем в рассмотрение безразмерные величины: геометрические параметры $c_k = a_k/b$, $h_k = h/a_k$, переменные $\xi^{(1)} = (a_1 - x)/a_1$ ($0 \leq x \leq a_1$), $\xi^{(2)} = (x - a_1)/a_2$ ($a_1 \leq x \leq a_2$), $\eta = y/b$, ($0 \leq \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \eta \leq 1$), прогибы

$$W^{(k)}(\xi^{(k)}, \eta) = w^{(k)}(x, y)/h. \quad (4)$$

Тогда для функций $W^{(k)}(\xi^{(k)}, \eta)$ из (2) следует

$$\frac{\partial^4 W^{(k)}}{\partial \xi^{(k)4}} + 2c_k^2 \frac{\partial^4 W^{(k)}}{\partial \xi^{(k)2} \partial \eta^2} + c_k^4 \frac{\partial^4 W^{(k)}}{\partial \eta^4} = q_k(\xi^{(k)}, \eta) / D_k^* \quad (k = 1, 2), \quad (5)$$

а вместо (3) получаются выражения

$$\begin{aligned} M_x^{(k)} &= -D_k^* a_k^2 \left(\frac{\partial^2 W^{(k)}}{\partial \xi^{(k)2}} + \nu_k c_k^2 \frac{\partial^2 W^{(k)}}{\partial \eta^2} \right) \quad (x \Leftrightarrow y; \xi^{(k)} \Leftrightarrow \eta/c_k), \\ H_{xy}^{(k)} &= (-1)^{k-1} D_k^* (1 - \nu_k) a_k^2 c_k \frac{\partial^2 W^{(k)}}{\partial \xi^{(k)} \partial \eta}, \\ Q_x^{(k)} &= (-1)^{k-1} D_k^* a_k \left(\frac{\partial^3 W^{(k)}}{\partial \xi^{(k)3}} + c_k^2 \frac{\partial^3 W^{(k)}}{\partial \xi^{(k)} \partial \eta^2} \right), \\ Q_y^{(k)} &= -D_k^* a_k c_k \left(\frac{\partial^3 W^{(k)}}{\partial \xi^{(k)2} \partial \eta} + c_k^2 \frac{\partial^3 W^{(k)}}{\partial \eta^3} \right), \\ Q_x^{(k)*} &= (-1)^{k-1} D_k^* a_k \left(\frac{\partial^3 W^{(k)}}{\partial \xi^{(k)3}} + (2 - \nu_k) c_k^2 \frac{\partial^3 W^{(k)}}{\partial \xi^{(k)} \partial \eta^2} \right), \\ Q_y^{(k)*} &= -D_k^* a_k c_k \left((2 - \nu_k) \frac{\partial^3 W^{(k)}}{\partial \xi^{(k)2} \partial \eta} + c_k^2 \frac{\partial^3 W^{(k)}}{\partial \eta^3} \right) \quad (k = 1, 2). \end{aligned} \quad (6)$$

В уравнениях (5) и формулах (6) обозначено:

$$D_k^* = \frac{E_k h_k^4}{12(1 - \nu_k^2)}.$$

Отметим, что совокупности значений (ξ^*, η^*) при $\xi^* \neq 0$ соответствуют две разные точки: точка $(x^* = a_1(1 - \xi^*), y^* = b\eta^*)$ в левой части пластинки и точка $(x^{**} = a_1 + \xi^* a_2, y^{**} = b\eta^*)$ в правой части.

Так как $\xi^{(1)}, \xi^{(2)} \in [0, 1]$, то в дальнейшем для упрощения записи индекс «P» у $\xi^{(p)}$, ($p = 1, 2$) опущен.

Решения уравнений (5) должны быть подчинены условиям сопряжения на линии контакта $\xi = 0$ и граничным условиям на контуре пластинки.



2. СПЛАЙН-АПРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЯ В НАПРАВЛЕНИИ ОСИ x И УСЛОВИЯ СОПРЯЖЕНИЯ

Приближенное решение краевой задачи для уравнений (5) будем искать модифицированным методом сплайн-коллокации [2], согласно которому функции $W^{(k)}(\xi, \eta)$ ($k = 1, 2$) представляются в виде

$$\begin{aligned} W^{(1)}(\xi, \eta) &= \sum_{k=1}^2 B_{5,-k}(\xi)U_k(\eta) + \sum_{j=0}^{N+2} B_{5,j}(\xi)\Phi_j(\eta), \\ W^{(2)}(\xi, \eta) &= \sum_{k=1}^2 B_{5,-k}(\xi)V_k(\eta) + \sum_{j=0}^{N+2} B_{5,j}(\xi)\Psi_j(\eta). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $B_{5,r}(\xi)$, ($r = \overline{-2, N+2}$) — нормализованные B -сплайны пятой степени [3], построенные на соответствующем расширении равномерной сетки, узлы которой определены по правилу $\xi_i = i/N$ ($i = \overline{0, N}$). Функции $U_k(\eta)$ и $V_k(\eta)$ ($k = 1, 2$) определяются из условий сопряжения вдоль линии контакта $x = a_1$, а функции $\Phi_{N+k}(\eta)$ и $\Psi_{N+k}(\eta)$ ($k = 1, 2$) должны обеспечивать выполнение граничных условий на вертикальных сторонах пластинки.

Условия сопряжения решений для левой и правой частей пластинки распадаются на две группы: геометрические условия, отражающие непрерывность и гладкость изогнутой срединной поверхности составной пластинки при $x = a_1$

$$w^{(1)}(a_1, y) = w^{(2)}(a_1, y), \quad \frac{\partial w^{(1)}(a_1, y)}{\partial x} = \frac{\partial w^{(2)}(a_1, y)}{\partial x},$$

и силовые условия, которые обеспечивают равенство на линии контакта изгибающих моментов M_x и обобщенных поперечных сил Q_x^* в левой и правой частях пластинки

$$M_x^{(1)}(a_1, y) = M_x^{(2)}(a_1, y), \quad Q_x^{(1)*}(a_1, y) = Q_x^{(2)*}(a_1, y).$$

Геометрические условия после перехода к безразмерным величинам и подстановки выражений (7) дают два линейных алгебраических уравнения, связывающих функции $U_k(\eta)$, $V_k(\eta)$ ($k = 1, 2$), $\Phi_j(\eta)$ и $\Psi_j(\eta)$ ($j = \overline{0, 2}$). Из этих уравнений, например функции $V_k(\eta)$ ($k = 1, 2$), могут быть выражены через остальные. Тогда для $W^{(2)}(\xi, \eta)$ из второй формулы (7) следует

$$W^{(2)}(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^2 \alpha_k(\xi)U_k(\eta) + \sum_{j=0}^2 \beta_j(\xi)\Phi_j(\eta) + \sum_{j=0}^{N+2} \chi_j(\xi)\Psi_j(\eta). \quad (8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \alpha_k(\xi) &= \sum_{s=1}^2 f_{k,s}B_{5,-s}(\xi) \quad (k = 1, 2); \quad \beta_j(\xi) = \sum_{k=1}^2 g_{k,j}B_{5,-k}(\xi) \quad (j = \overline{0, 2}); \\ \chi_j(\xi) &= B_{5,j}(\xi) + \sum_{s=1}^2 p_{s,j}B_{5,-s}(\xi) \quad (j = \overline{0, 2}); \quad \chi_j(\xi) = B_{5,j}(\xi) \quad (j = \overline{3, N+2}); \end{aligned}$$

$f_{k,s}$, $g_{k,j}$ и $p_{s,j}$ выражаются через значения функций $B_{5,r}(\xi)$ ($r = \overline{-2, N-2}$) и их производных в точке $\xi = \xi_0$; соответствующие формулы из-за громоздкости не приводятся.

Силовые условия на линии контакта в безразмерных переменных с учетом выражений (6) после некоторых преобразований представляются в виде

$$\begin{aligned} D_1^* a_1^2 \frac{\partial^2 W^{(1)}(\xi_0, \eta)}{\partial \xi^2} + \tilde{d}_1 \frac{\partial^2 W^{(1)}(\xi_0, \eta)}{\partial \eta^2} - D_2^* \frac{\partial^2 W^{(2)}(\xi_0, \eta)}{\partial \xi^2} &= 0, \\ D_1^* a_1^2 \frac{\partial^3 W^{(1)}(\xi_0, \eta)}{\partial \xi^3} + \tilde{d}_2 \frac{\partial^3 W^{(1)}(\xi_0, \eta)}{\partial \xi \partial \eta^2} + D_2^* a_1 a_2 \frac{\partial^3 W^{(2)}(\xi_0, \eta)}{\partial \xi^3} &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

с известными коэффициентами \tilde{d}_1 и \tilde{d}_2 . В зависимости от значений механических характеристик материалов частей пластинки \tilde{d}_1 и \tilde{d}_2 могут обращаться в ноль или быть отличными от нуля.



Если $\tilde{d}_1 = \tilde{d}_2 = 0$, то при подстановке в (9) выражений $W^{(1)}$ из (7) и $W^{(2)}$ из (8) получаются два линейных алгебраических уравнения, из которых функции $U_k(\eta)$ ($k = 1, 2$) выражаются как комбинации функций $\Phi_j(\eta)$ и $\Psi_j(\eta)$ ($j = \overline{0, 2}$). Тогда для $W^{(1)}(\xi, \eta)$ и $W^{(2)}(\xi, \eta)$ получаются выражения вида

$$\begin{aligned} W^{(1)}(\xi, \eta) &= \sum_{j=0}^{N+2} \varphi_j(\xi) \Phi_j(\eta) + \sum_{j=0}^2 \gamma_j(\xi) \Psi_j(\eta), \\ W^{(2)}(\xi, \eta) &= \sum_{j=0}^2 \delta_j(\xi) \Phi_j(\eta) + \sum_{j=0}^{N+2} \psi_j(\xi) \Psi_j(\eta). \end{aligned} \quad (10)$$

В случае, когда $\tilde{d}_1 = 0$, $\tilde{d}_2 \neq 0$ или $\tilde{d}_1 \neq 0$, $\tilde{d}_2 = 0$, одно из условий (9) сводится к линейному алгебраическому уравнению, из которого $U_2(\eta)$ выражается через $U_1(\eta)$ и $\Phi_j(\eta)$, $\Psi_j(\eta)$ ($j = \overline{0, 2}$). Тогда разложения $W^{(1)}(\xi, \eta)$ из (7) и $W^{(2)}(\xi, \eta)$ из (8) могут быть преобразованы к виду

$$\begin{aligned} W^{(1)}(\xi, \eta) &= \alpha(\xi) U_1(\eta) + \sum_{j=0}^{N+2} \varphi_j(\xi) \Phi_j(\eta) + \sum_{j=0}^2 \gamma_j(\xi) \Psi_j(\eta), \\ W^{(2)}(\xi, \eta) &= \beta(\xi) U_1(\eta) + \sum_{j=0}^2 \delta_j(\xi) \Phi_j(\eta) + \sum_{j=0}^{N+2} \psi_j(\xi) \Psi_j(\eta). \end{aligned} \quad (11)$$

Оставшееся условие (9) устанавливает для функции $U_1(\eta)$ дифференциальную зависимость:

$$\frac{d^2 U_1}{d\eta^2} = A U_1(\eta) + \sum_{j=0}^2 \left[B_j \Phi_j(\eta) + C_j \Psi_j(\eta) + G_j \frac{d^2 \Phi_j}{d\eta^2} + F_j \frac{d^2 \Psi_j}{d\eta^2} \right] \quad (12)$$

с известными коэффициентами A, B_j, C_j, G_j и F_j .

При отличных от нуля \tilde{d}_1 и \tilde{d}_2 из условий (9) после ряда преобразований получается система дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2 U_k}{d\eta^2} = \sum_{s=1}^2 A_{k,s} U_s(\eta) + \sum_{j=0}^2 \left[B_{k,j} \Phi_j(\eta) + C_{k,j} \Psi_j(\eta) + p_{k,j} \frac{d^2 \Phi_j}{d\eta^2} \right] \quad (k = 1, 2), \quad (13)$$

в которой коэффициенты $A_{k,s}$, $B_{k,j}$, и $C_{k,j}$ известны.

В этом случае для $W^{(1)}(\xi, \eta)$ имеет место формула из (7), а для $W^{(2)}(\xi, \eta)$ — формула (8).

При выводе формул и уравнений п.2 учитывалось, что B -сплайн $B_{5,i}(\xi)$ и все его производные при $i \geq 3$ в точке $\xi = \xi_0$ обращаются в ноль.

3. УДОВЛЕТВОРЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА ВЕРТИКАЛЬНЫХ СТОРОНАХ ПЛАСТИНКИ

Рассмотрим различные возможные варианты непротиворечивых граничных условий на левой вертикальной стороне пластинки ($x = 0, \xi^{(1)} = \xi_N$):

I. Сторона деформирована заданным образом, т.е. известны безразмерный прогиб $w_1^*(\eta)$ и угол поворота $\theta_1^*(\eta)$.

II. Заданы условия смешанного типа, т.е. известны: а) безразмерный прогиб $w_1^*(\eta)$ и изгибающий момент интенсивности $m_1^*(\eta)$ или б) угол поворота $\theta_1^*(\eta)$ и поперечные усилия интенсивности $p_1^*(\eta)$.

III. Сторона нагружена известными изгибающими моментами $m_1^*(\eta)$ и поперечными усилиями $p_1^*(\eta)$.

Граничные условия для функции $W^{(1)}(\xi, \eta)$ принимают следующий вид: для варианта I

$$W^{(1)}(\xi_N, \eta) = w_1^*, \quad \frac{\partial W^{(1)}(\xi_N, \eta)}{\partial \xi} = -h_1^{-1} \theta_1^*(\eta), \quad (14)$$

или

$$W^{(1)}(\xi_N, \eta) = w_1^*,$$



для варианта II, а)

$$\frac{\partial^2 W^{(1)}(\xi_N, \eta)}{\partial \xi^2} + \nu_1 c_1^2 \frac{\partial^2 W^{(1)}(\xi_N, \eta)}{\partial \eta^2} = - [D_1^* a_1^2]^{-1} m_1^*(\eta), \quad (15)$$

или

$$\frac{\partial W^{(1)}(\xi_N, \eta)}{\partial \xi} = -h_1^{-1} \theta_1^*(\eta),$$

для варианта II, б)

$$\frac{\partial^3 W^{(1)}(\xi_N, \eta)}{\partial \xi^3} + (2 - \nu_1) c_1^2 \frac{\partial^3 W^{(1)}(\xi_N, \eta)}{\partial \xi \partial \eta^2} = [D_1^* a_1]^{-1} p_1^*(\eta), \quad (16)$$

или

$$\frac{\partial^2 W^{(1)}(\xi_N, \eta)}{\partial \xi^2} + \nu_1 c_1^2 \frac{\partial^2 W^{(1)}(\xi_N, \eta)}{\partial \eta^2} = - [D_1^* a_1^2]^{-1} m_1^*(\eta),$$

для варианта III

$$\frac{\partial^3 W^{(1)}(\xi_N, \eta)}{\partial \xi^3} + (2 - \nu_1) c_1^2 \frac{\partial^3 W^{(1)}(\xi_N, \eta)}{\partial \xi \partial \eta^2} = [D_1^* a_1]^{-1} p_1^*(\eta). \quad (17)$$

Учитывая, что сплайн $B_{5,i}(\xi)$ и его производные в точке $\xi = \xi_{i+3}$ равны нулю, выражения для функции $W^{(1)}(\xi, \eta)$, удовлетворяющие условиям сопряжения на линии $\xi = \xi_0$, при любых значениях \tilde{d}_1 и \tilde{d}_2 вдоль прямой $\xi = \xi_N$ можно записать в виде

$$\frac{d^r W^{(1)}(\xi_N, \eta)}{d \xi^r} = \sum_{s=-2}^2 \frac{d^r B_{5,s}(\xi_N, \eta)}{d \xi^r} \Phi_{N+s}(\eta) \quad (r = \overline{0, 3}). \quad (18)$$

Аналогично для функции $W^{(2)}(\xi, \eta)$ и ее производных

$$\frac{d^r W^{(2)}(\xi_N, \eta)}{d \xi^r} = \sum_{s=-2}^2 \frac{d^r B_{5,s}(\xi_N, \eta)}{d \xi^r} \Psi_{N+s}(\eta) \quad (r = \overline{0, 3}). \quad (19)$$

Тогда после подстановки выражений (18) в условия (14) или (15), (16) и ряда несложных преобразований получаются системы двух линейных алгебраических уравнений, из которых функции $\Phi_{N+k}(\eta)$ ($k = 1, 2$) представляются линейными комбинациями заданных функций $\xi = \xi_N$ и функций $\Phi_j(\eta)$ ($j = \overline{N-2, N}$)

$$\Phi_{N+k}(\eta) = m_k(\eta) + \sum_{j=N-2}^N a_{k,j}^* \Phi_j(\eta) \quad (k = 1, 2). \quad (20)$$

При задании на стороне $x = 0$ моментов и усилий интенсивности $m_1^*(\eta)$ и $p_1^*(\eta)$ из (17) получаются не алгебраические, а дифференциальные зависимости, которые преобразуются к виду

$$\frac{d^2 \Phi_{N+k}}{d \eta^2} = m_k(\eta) + \sum_{j=N-2}^{N+2} \left[a_{k,j}^* \frac{d^2 \Phi_j}{d \eta^2} + b_{k,j}^* \Phi_j(\eta) \right] \quad (k = 1, 2). \quad (21)$$

В соотношениях (20) и (21) постоянные $a_{k,j}^*$, $b_{k,j}^*$ выражаются через значения B -сплайна $B_{5,i}(\xi)$ и его производных в точке $\xi = \xi_N$, а функции $m_k(\eta)$ — через заданные $m_1^*(\eta)$ и $p_1^*(\eta)$.

Совершенно аналогично могут быть сформулированы граничные условия на стороне $x = a$ ($\xi^{(2)} = \xi_N$) для функции $W^{(2)}(\xi, \eta)$. Тогда при заданных смещениях (т. е. известны прогиб $w_2^*(\eta)$ и угол поворота $\theta_2^*(\eta)$ — условия типа (14) или в случае смешанных условий типа (15), (16), когда задаются $w_2^*(\eta)$ и $m_2^*(\eta)$ или $\theta_2^*(\eta)$ и $p_2^*(\eta)$) функции $\Psi_{N+k}(\eta)$ с учетом (6) представляются линейными комбинациями величин $w_2^*(\eta)$, $\theta_2^*(\eta)$, $m_2^*(\eta)$ и $p_2^*(\eta)$ и функций $\Psi_j(\eta)$ ($j = \overline{N-2, N}$)

$$\Psi_{N+k}(\eta) = \tilde{m}_k(\eta) + \sum_{j=N-2}^N \tilde{a}_{k,j}^* \Psi_j(\eta) \quad (k = 1, 2). \quad (22)$$



При условиях типа (17) — сторона $x = a$ загружена изгибающими моментами и поперечными усилиями заданной интенсивности $m_2^*(\eta)$ и $p_2^*(\eta)$ — для функций $\Psi_{N+k}(\eta)$ ($k = 1, 2$) получается система дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 \Psi_{N+k}(\eta)}{d\eta^2} = \tilde{m}_k(\eta) + \sum_{j=N-2}^{N+2} \left[\tilde{a}_{k,j}^* \frac{d^2 \Psi_j}{d\eta^2} + \tilde{b}_{k,j}^* \Psi_j(\eta) \right] \quad (k = 1, 2). \quad (23)$$

Комбинируя в разных сочетаниях выражения, приведенные в п.2 и п.3, можно получить разложения функций $W^{(k)}(\xi, \eta)$, соответствующие разным значениям упругих постоянных материала частей, т.е. различным величинам \tilde{d}_1 и \tilde{d}_2 . Эти разложения точно удовлетворяют условиям сопряжения вдоль линии контакта $x = a_1$ и граничным условиям на сторонах $x = 0$ и $x = a$. Число неизвестных функций в этих разложениях меняется в зависимости от значений \tilde{d}_1 и \tilde{d}_2 и вида внешнего воздействия при $x = 0$ и $x = a$. При $\tilde{d}_1 = \tilde{d}_2 = 0$ и условиях (14) или (15), (16) и им аналогичных при $x = a$ число неизвестных функций минимально и равно $2N + 2$ (неизвестными являются функции $\Phi_0, \dots, \Phi_N, \Psi_0, \dots, \Psi_N$). Максимальное число неизвестных функций получается при $\tilde{d}_1 \neq 0, \tilde{d}_2 \neq 0$ и заданных силовых воздействиях на сторонах $x = 0$ и $x = a$. В этом случае подлежат определению $2N + 8$ функций $\Phi_j(\eta), \Psi_j(\eta)$ ($j = \overline{0, N+2}$) и $U_k(\eta)$ ($k = 1, 2$).

4. МЕТОД КОЛЛОКАЦИИ. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ РАЗРЕШАЮЩИХ УРАВНЕНИЙ

Указанные в конце п.3 разложения функций $W^{(k)}(\xi, \eta)$ ($k = 1, 2$) должны удовлетворять двумерным уравнениям (5) и граничным условиям на сторонах $y = 0$ ($\eta = 0$) и $y = b$ ($\eta = 1$). Для понижения размерности такой краевой задачи применяется метод коллокации. С этой целью вводится система точек коллокации $\xi = \xi_i^*$ ($i = \overline{0, N}$) по правилу $\xi_i^* = \xi_i + t/N$ ($i = \overline{0, N/2 - 1}$), $\xi_{N/2}^* = \xi_{N/2}$, $\xi_i^* = \xi_i - t/N$ ($i = \overline{N/2 + 1, N}$), $0 < t < 1$. Разложения функций $W^{(k)}(\xi, \eta)$ ($k = 1, 2$), соответствующие значениям \tilde{d}_1 и \tilde{d}_2 и удовлетворяющие граничным условиям при $\xi = \xi_N$, подставляются в уравнения (5) и требуется, чтобы результат такой подстановки выполнялся в точках коллокации $\xi = \xi_i^*$ ($i = \overline{0, N}$). Это требование приводит к системе $2N + 2$ обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка относительно неизвестных функций в разложениях функций $W^{(k)}(\xi, \eta)$. Условно будем называть эту систему системой (А).

На сторонах $y = 0$ и $y = b$, согласно способам закрепления или нагружения этих сторон, могут быть сформулированы граничные условия, по два условия в каждой точке, каждой из сторон. После подстановки соответствующих разложений $W^{(k)}(\xi, \eta)$ в эти условия из требования, чтобы последние выполнялись в точках коллокации, получается система $8N + 8$ уравнений для граничных значений неизвестных функций. Эти уравнения условно называются условиями (Б).

В случае $\tilde{d}_1 = \tilde{d}_2 = 0$ при граничных условиях (14) или (15), (16) и им подобных при $x = a$ система уравнений (А) в совокупности с условиями (Б) составляет краевую задачу для определения всех неизвестных функций в разложениях $W^{(k)}(\xi, \eta)$.

Если при $\tilde{d}_1 = \tilde{d}_2 = 0$ граничные условия на стороне $x = 0$ имеют вид (17), то число неизвестных функций в разложении $W^{(1)}(\xi, \eta)$ увеличивается до $N + 3$. Тогда из (А) с учетом (21) следует исключить вторые, а после двукратного дифференцирования — и четвертые производные функций $\Phi_{N+k}(\eta)$ ($k = 1, 2$). Преобразованная таким образом система (А) в совокупности с (21) составит полную систему разрешающих уравнений в этом случае. При этом к граничным условиям (Б) необходимо присоединить еще четыре условия, которые получаются из условий нагружения или деформирования сторон $y = 0$ и $y = b$ при $x = 0$.

Если на стороне $x = a$ также заданы условия типа (17), то из (А), используя (21) и (23), исключают производные функций $\Phi_{N+k}(\eta)$ и $\Psi_{N+k}(\eta)$ ($k = 1, 2$). Полученные уравнения вместе с уравнениями (21) и (23) составят систему разрешающих уравнений, соответствующую такому варианту условий при $x = 0$ и $x = a$. К граничным условиям (Б) в этом случае, кроме условий на концах стороны $x = 0$ еще добавляются условия на концах стороны $x = a$.

Совершенно аналогично получаются краевые задачи, когда $\tilde{d}_1 \neq 0, \tilde{d}_2 \neq 0$. Например, если в этом случае на сторонах $x = 0$ и $x = a$ задано распределение нагрузки, то из (А) с помощью (13), (21) и (23) исключаются производные функций $U_k(\eta), \Phi_{N+k}(\eta)$ и $\Psi_{N+k}(\eta)$ ($k = 1, 2$). Результат



такого преобразования вместе с уравнениями (13), (21) и (23) дает систему разрешающих уравнений, граничные условия для которой состоят из условий (Б) и условий на концах отрезков $x = 0$, $x = a_1$ и $x = a$.

Несколько иначе строятся краевые задачи, когда один из коэффициентов \tilde{d}_k равен нулю, а второй отличен от нуля. Наметим порядок решения в этом случае, например, при граничных условиях (14) или (15), (16) и им подобных на правой стороне пластинки. Тогда неизвестными функциями в разложениях $W^{(k)}(\xi, \eta)$ будут $U_1(\eta)$, $\Phi_j(\eta)$ и $\Psi_j(\eta)$ ($j = \overline{0, N}$). Если в качестве системы разрешающих уравнений для этих функций принять систему (А) и уравнение (12), которому должна удовлетворять функция $U_1(\eta)$, то для определения произволов интегрирования потребуется $8N + 10$ условий, из которых $8N + 8$ составляют условия (Б). Недостающие условия естественно формулировать в концевых точках отрезка $x = a_1$. Однако в каждой из этих точек можно записать по два условия, и вопрос о том, какие два из четырех условий выбрать, имеет неоднозначное решение. Чтобы избежать подобной ситуации, за систему разрешающих уравнений в этом случае примем систему (А), дополненную дважды продифференцированным по η уравнением (12). Число граничных условий для такой системы должно равняться $8N + 12$. В качестве этих условий примем условия (Б), к которым добавлены четыре условия в концевых точках линии контакта $x = a_1$. Такой подход делает постановку краевой задачи для указанной системы разрешающих уравнений математически корректной.

Построенные указанным выше способом краевые задачи решаются численно. Для этого система уравнений, входящая в краевую задачу, разрешается относительно старших производных от искомых функций. Возможность этой процедуры обеспечивается соответствующим выбором параметра t , определяющего взаимное расположение узлов ξ_i и точек коллокации ξ_i^* ($i = \overline{0, N}$). Полученной системе ставится в соответствие эквивалентная система дифференциальных уравнений первого порядка, записанная в нормальной форме Коши. В общем случае эта система в векторной форме имеет вид

$$\frac{dZ}{d\eta} = S\overline{Z}(\eta) + \overline{R}(\eta). \quad (24)$$

Здесь $S = \{s_{p,q}\}$ и $\overline{R} = \{r_p(\eta)\}$ — известные квадратная матрица и вектор соответствующей размерности, $\overline{Z}(\eta)$ — вектор неизвестных, компонентами которого являются неизвестные функции в разложениях функций $W^{(k)}(\xi, \eta)$ и их производные. Например, если $\tilde{d}_1 = \tilde{d}_2 = 0$, а при $x = 0$ имеют место условия (14) или (15), (16) и им подобные при $x = a$, то

$$\overline{Z}(\eta) = \left(\Phi_i, \Psi_i, \frac{d\Phi_i}{d\eta}, \frac{d\Psi_i}{d\eta}, \frac{d^2\Phi_i}{d\eta^2}, \frac{d^2\Psi_i}{d\eta^2}, \frac{d^3\Phi_i}{d\eta^3}, \frac{d^3\Psi_i}{d\eta^3} \right) \quad (i = \overline{0, N}),$$

при $\tilde{d}_1 = 0$, $\tilde{d}_2 \neq 0$ или $\tilde{d}_1 \neq 0$, $\tilde{d}_2 = 0$ и условиях типа (17) на обеих вертикальных сторонах пластинки

$$\overline{Z}(\eta) = \left(\Phi_i, \Psi_i, \frac{d\Phi_i}{d\eta}, \frac{d\Psi_i}{d\eta}, \frac{d^2\Phi_i}{d\eta^2}, \frac{d^2\Psi_i}{d\eta^2}, \frac{d^3\Phi_i}{d\eta^3}, \frac{d^3\Psi_i}{d\eta^3}, U_1, \frac{dU_1}{d\eta}, \frac{d^2U_1}{d\eta^2}, \frac{d^3U_1}{d\eta^3}, \Phi_{N+k}, \frac{d\Phi_{N+k}}{d\eta}, \Psi_{N+k}, \frac{d\Psi_{N+k}}{d\eta} \right) \quad (i = \overline{0, N}; k = 1, 2);$$

при $\tilde{d}_1 \neq 0$, $\tilde{d}_2 \neq 0$ и условиях (17) на левой и типа (14) на правой стороне

$$\overline{Z}(\eta) = \left(\Phi_i, \Psi_i, \frac{d\Phi_i}{d\eta}, \frac{d\Psi_i}{d\eta}, \frac{d^2\Phi_i}{d\eta^2}, \frac{d^2\Psi_i}{d\eta^2}, \frac{d^3\Phi_i}{d\eta^3}, \frac{d^3\Psi_i}{d\eta^3}, U_k, \frac{dU_k}{d\eta}, \Phi_{N+k}, \frac{d\Phi_{N+k}}{d\eta} \right) \quad (i = \overline{0, N}; k = 1, 2).$$

Граничные условия для вектора $\overline{Z}(\eta)$, построенного указанным выше способом, получаются из граничных условий на сторонах $\eta = 0$ и $\eta = 1$ и всегда могут быть представлены в виде

$$H_1\overline{Z}(0) = \overline{e}_1; \quad H_2\overline{Z}(1) = \overline{e}_2; \quad (25)$$

где прямоугольные матрицы H_1 и H_2 размерности $L/2 \times L$ и L -мерные векторы $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ (L — размерность вектора \overline{Z}) имеют известные компоненты.

Краевая задача (24), (25) решается численно методом дискретной ортогонализации, который, как показывают решения многочисленных тестовых задач, обеспечивает получение практически точных результатов.



Примеры применения изложенного подхода для решения конкретных задач будут приведены в последующих публикациях.

В заключение отметим, что указанная методика без каких-либо принципиальных затруднений распространяется на случаи колебаний составных изотропных пластинок и аналогичные задачи для составных пластинок из ортотропного материала.

Библиографический список

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1975. 575 с.
2. Недорезов П.Ф., Шевцова Ю.В., Ромакина О.М. Модифицированный метод сплайн-коллокации в задачах изгиба прямоугольных пластинок // Математическое моделирование и краевые задачи: Тр. Второй Всерос. науч. конф. Самара: Самарск. техн. ун-та, 2005. Ч.1. С. 203–209.
3. Завьялов Ю.С., Квасов Ю.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.