Математические заметки

Том 105 выпуск 5 май 2019

УДК 517.5

Точное неравенство Джексона в $L_p(\mathbb{R}^d)$ с весом Данкля

Д. В. Горбачев, В. И. Иванов

В работе доказывается точное неравенство Джексона в пространстве $L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant p < 2$, с весом Данкля. Наилучшее приближение осуществляется целыми функциями экспоненциального сферического типа. Модуль непрерывности определяется с помощью положительного оператора обобщенного сдвига, ограниченного в L_p и построенного авторами ранее. В случае единичного веса он совпадает с оператором среднего значения по сфере.

Библиография: 24 названия.

Ключевые слова: преобразование Данкля, наилучшее приближение, оператор обобщенного сдвига, модуль непрерывности, неравенство Джексона.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm12387

1. Введение. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^d$ – d-мерное евклидово пространство со скалярным произведением

$$(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_d y_d$$

и нормой

$$|x| = \sqrt{(x, x)},$$

$R \subset \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ – система корней, $k\colon R \to \mathbb{R}_+$ – функция кратности, инвариантная относительно группы отражений G, порожденной R. *Обобщенный степенной вес* или *вес Данкля* определяется как

$$v_k(x) = \prod_{a \in R_+} |(a, x)|^{2k(a)}, \qquad x \in \mathbb{R}^d,$$

где R_+ – положительная подсистема системы корней R. Пусть

$$d\mu_k(x) = c_k v_k(x)\,dx, \qquad c_k^{-1} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^2/2} v_k(x)\,dx,$$

где константа c_k^{-1} известна как интеграл Макдональда–Мета–Сельберга; $1 \leqslant p < \infty$, $L_p(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ – пространство измеримых по Лебегу, комплексных на $\mathbb{R}^d$ функций f, для которых

$$\|f\|_{p,d\mu_k} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p \, d\mu_k \right)^{1/p} < \infty.$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00199).

Если $k \equiv 0$, то получаем обычное пространство $L_p(\mathbb{R}^d)$. С гармоническим анализом в пространствах с весом Данкля можно познакомиться в [1].

Работа посвящена доказательству точного неравенства Джексона между величиной наилучшего приближения целыми функциями экспоненциального сферического типа и модулем непрерывности в пространстве $L_p(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$, $1 \leqslant p < 2$.

Случай пространства L_2 достаточно хорошо исследован. Точное неравенство Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ и даже с оптимальным аргументом в модуле непрерывности доказано в [2], [3]. Случай пространств L_p менее изучен. Точные неравенства известны только при $1 \leqslant p < 2$. Приведем их. Первое точное неравенство в пространстве $L_p(\mathbb{T})$ на торе $\mathbb{T}$ доказано Черных [4]. На случай многомерного тора $\mathbb{T}^d$ оно было перенесено в [5]. Неравенство Джексона с точной константой в пространстве $L_p(\mathbb{R}^d)$ было доказано в [6], правильная оценка сверху при $d = 1$ была получена ранее в [7]. В [3] доказано точное неравенство Джексона в пространстве $L_p(\mathbb{S}^{d-1})$, $1 \leqslant p < 2$, на евклидовой сфере $\mathbb{S}^{d-1}$. Случай пространства $L_p(\mathbb{H}^{d-1})$ на гиперболоиде $\mathbb{H}^{d-1}$ остается открытым.

Точные неравенства Джексона в весовых пространствах L_p при $1 \leqslant p < 2$ доказаны только в случаях, когда в них известны положительные, ограниченные в L_p операторы обобщенного сдвига, позволяющие определить удобные модули непрерывности. Это сделано в пространствах $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}_+)$, $L_{p,\lambda}(\mathbb{R})$ со степенным весом $|x|^\lambda$, $\lambda \geqslant 0$, [6], [8], [9], $L_{p,\alpha}(\mathbb{T})$ с периодическим весом Якоби $|\sin x|^\alpha$, $\alpha \geqslant 0$, [10], [11]. Положительный оператор обобщенного сдвига в пространстве $L_p(\mathbb{S}^{d-1})$ с весом Данкля на сфере $\mathbb{S}^{d-1}$ построен Даи и Шу (см. [12; определение 7.4.6]). Неравенство Джексона доказано в [13]. Его точность установлена только в случаях, когда группы отражений есть группа диэдра и $\mathbb{Z}_2^d$ [14], [15].

В настоящей работе мы доказываем следующее точное неравенство Джексона.

Теорема 1. *Если* $1 \leqslant p < 2$, $\sigma > 0$, $\lambda_k = d/2 - 1 + \sum_{a \in R_+} k(a)$, *то для любой функции* $f \in L_p(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ *справедливо неравенство Джексона*

$$E_{2\sigma}(f)_{p,d\mu_k} \leqslant 2^{1/p-1} \omega\left(\frac{2q_{\lambda_k}}{\sigma}, f\right)_{p,d\mu_k}. \tag{1.1}$$

Константа $2^{1/p-1}$ *в нем точная.*

Здесь $E_\sigma(f)_{p,d\mu_k}$ – величина наилучшего приближения функции f целыми функциями экспоненциального сферического типа не выше σ, $\omega(\delta, f)_{p,d\mu_k}$ – ее модуль непрерывности, определяемый с помощью положительного оператора обобщенного сдвига, ограниченного в пространстве $L_p(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ и построенного в [16], q_{λ_k} – наименьший положительный нуль функции Бесселя $J_{\lambda_k}(x)$ порядка λ_k.

Если $k \equiv 0$, оператор обобщенного сдвига совпадает с оператором среднего значения по сфере

$$T^t f(x) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(x + t\xi)\, d\sigma(\xi), \qquad x \in \mathbb{R}^d, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где $d\sigma$ – нормированная лебегова (вероятностная) мера на евклидовой сфере $\mathbb{S}^{d-1} = \{\xi \in \mathbb{R}^d : |\xi| = 1\}$. Для этого случая неравенство (1.1) доказано в [6] без обоснования его точности.

Замечание 1. При $p=2$ неравенство (1.1) может быть уточнено:

$$E_\sigma(f)_{2,d\mu_k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\,\omega\biggl(\frac{2q_{\lambda_k}}{\sigma}, f\biggr)_{2,d\mu_k}.$$

В этом неравенстве не только константа, но и аргумент в модуле непрерывности является оптимальным (см. [17]). Вопрос о возможности такого уточнения для неравенства (1.1) при $1 \leqslant p < 2$ остается открытым.

2. Элементы гармонического анализа Данкля. В этом разделе мы напомним основные понятия и результаты гармонического анализа Данкля (см. [1]).

Пусть $C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R}^d)$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем, $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ – пространство Шварца, $C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$ – пространство непрерывных ограниченных функций, $r>0$,

$$B_r = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leqslant r\}$$

– евклидов шар радиуса r, $e_1, \dots, e_d$ – стандартный базис в $\mathbb{R}^d$, D_j – дифференциально-разностные операторы Данкля:

$$D_j f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \sum_{a\in R_+} k(a)(a,e_j)\frac{f(x)-f(\sigma_a x)}{(a,x)}, \qquad j=1,\dots,d,$$

где σ_a – отражение относительно гиперплоскости $(a,x)=0$.

Ядро Данкля $e_k(x,y)=E_k(x,iy)$ есть единственное решение системы

$$D_j f(x) = iy_j f(x), \qquad j=1,\dots,d, \quad f(0)=1.$$

Функция $e_k(x,y)$ играет роль обобщенной экспоненты и ее свойства аналогичны свойства классической экспоненты $e^{i(x,y)}$. В частности,

$$|e^{i(x,y)}| \leqslant 1, \qquad e_k(x,y)=e_k(y,x), \quad e_k(-x,y)=\overline{e_k(x,y)}. \tag{2.1}$$

Для $f \in L_1(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ преобразование Данкля определяется равенством

$$\mathscr{F}_k(f)(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{e_k(x,y)}\,d\mu_k(x).$$

При $k\equiv 0$ получаем классическое преобразование Фурье. Обратное преобразование Данкля определяется соотношением $\mathscr{F}_k^{-1}(f)(x)=\mathscr{F}_k(f)(-x)$.

Пусть

$$\mathscr{A}_k(\mathbb{R}^d) = \{f \in L_1(\mathbb{R}^d, d\mu_k)\cap C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d) : \mathscr{F}_k(f) \in L_1(\mathbb{R}^d, d\mu_k)\}. \tag{2.2}$$

Перечислим основные свойства преобразования Данкля.

Предложение 1. (1) *Для* $f \in L_1(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ $\mathscr{F}_k(y) \in C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$ *и* $\lim_{y\to\infty}\mathscr{F}_k(y)=0$.
(2) *Если* $f \in \mathscr{A}_k(\mathbb{R}^d)$, *то справедлива поточечная формула обращения*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathscr{F}_k(f)(y) e_k(x,y)\,d\mu_k(y). \tag{2.3}$$

(3) *Преобразование Данкля на* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ *является инвариантным, унитарным оператором и может быть продолжено до унитарного оператора в* $L_2(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$.

При

$$\lambda=\lambda_k=\frac{d}{2}-1+\sum_{a\in R_+}k(a)$$

сужением преобразования Данкля на радиальные функции является преобразование Ганкеля. Дадим его определение.

Пусть $\lambda\geqslant -1/2$, $J_\lambda(t)$ – функция Бесселя порядка λ, $j_\lambda(t)=2^\lambda\Gamma(\lambda+1)t^{-\lambda}J_\lambda(t)$ – нормированная функция Бесселя,

$$b_\lambda^{-1}=\int_0^\infty e^{-t^2/2}t^{2\lambda+1}\,dt=2^\lambda\Gamma(\lambda+1),\qquad d\nu_\lambda(t)=b_\lambda t^{2\lambda+1}\,dt,\qquad t\in\mathbb{R}_+,$$

$1\leqslant p<\infty$, $L_p(\mathbb{R}_+,d\nu_\lambda)$ – пространство измеримых, комплексных функций f на $\mathbb{R}_+$, для которых

$$\|f\|_{p,d\nu_\lambda}=\biggl(\int_{\mathbb{R}_+}|f(t)|^p\,d\nu_\lambda(t)\biggr)^{1/p}<\infty.$$

Преобразование Ганкеля определяется равенством

$$\mathscr{H}_\lambda(f)(r)=\int_{\mathbb{R}_+}f(t)j_\lambda(rt)\,d\nu_\lambda(t),\qquad r\in\mathbb{R}_+.$$

Это унитарный оператор в $L_2(\mathbb{R}_+,d\nu_\lambda)$ и $\mathscr{H}_\lambda^{-1}=\mathscr{H}_\lambda$ [18; гл. 7].

Аналогично (2.2) определяется класс $\mathscr{A}_\lambda(\mathbb{R}_+)$.

Если $f(x)=f_0(|x|)$, $x\in\mathbb{R}^d$, – радиальная функция, то

$$\mathscr{F}_k(f)(y)=\mathscr{H}_{\lambda_k}f_0(|y|),\qquad y\in\mathbb{R}^d. \tag{2.4}$$

На полупрямой действует оператор обобщенного сдвига Гегенбауэра

$$M^tf(r)=c_\lambda\int_0^\pi f(\sqrt{r^2+t^2-2rt\cos\varphi}\,)\sin^{2\lambda}\varphi\,d\varphi=\int_0^\infty f(\tau)\,d\nu_{r,t}^\lambda(\tau), \tag{2.5}$$

где $c_\lambda^{-1}=\int_0^\pi\sin^{2\lambda}\varphi\,d\varphi$, $\nu_{r,t}^\lambda$ – вероятностная мера Лебега, $\operatorname{supp}\nu_{r,t}^\lambda\subset[|r-t|,r+t]$. Меру можно выписать в явном виде.

Предложение 2 [19]. (1) *Оператор M^t положительный*, $M^t1=1$.

(2) *Если $f\in L_p(\mathbb{R}_+,d\nu_\lambda)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, то $\|M^tf\|_{p,d\nu_\lambda}\leqslant\|f\|_{p,d\nu_\lambda}$.*

(3) *Если $f\in\mathscr{A}_\lambda(\mathbb{R}_+)$, то*

$$M^tf(r)=\int_0^\infty j_\lambda(t\tau)j_\lambda(r\tau)\mathscr{H}_\lambda(f)(\tau)\,d\nu_\lambda(\tau).$$

Если $f\in L_1(\mathbb{R}^d,d\mu_k)$, то

$$\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\,d\mu_k(x)=\int_0^\infty\int_{\mathbb{S}^{d-1}}f(tx')\,d\sigma_k(x')\,d\nu_{\lambda_k}(t), \tag{2.6}$$

где $d\sigma_k(x')=a_kv_k(x')\,dx'$ – вероятностная мера на $\mathbb{S}^{d-1}$.

Пусть $y\in\mathbb{R}^d$. Оператор обобщенного сдвига τ^y в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d,d\mu_k)$ был определен Реслер [20] соотношением

$$\mathscr{F}_k(\tau^yf)(z)=e_k(y,z)\mathscr{F}_k(f)(z).$$

Согласно (2.1) $\|\tau^y\|_{2\to 2}\leqslant 1$. К сожалению, τ^y не является положительным оператором и вопрос о его ограниченности в $L_p(\mathbb{R}^d,d\mu_k)$, $p\neq 2$, остается открытым.

Несколько больше об операторе τ^y можно сказать, рассматривая его на подпространстве радиальных функций. В следующем предложении все функции f радиальные.

Предложение 3 [21], [22], [16]. (1) *На подпространстве радиальных функций оператор τ^y положительный, $\tau^y 1=1$.*

(2) *Если $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, $1\leqslant p<\infty$, то $\|\tau^y f\|_{p,d\mu_k}\leqslant\|f\|_{p,d\mu_k}$ и оператор τ^t может быть продолжен на все $L_p(\mathbb{R}^d,d\mu_k)$ с сохранением нормы.*

(3) *Если $f\in\mathscr{A}_k(\mathbb{R}^d)$, то поточечно*

$$\tau^y f(x)=\int_{\mathbb{R}^d}e_k(y,z)e_k(x,z)\mathscr{F}_k(f)(z)\,d\mu_k(z). \tag{2.7}$$

(4) *Если $f\in C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$, то*

$$\tau^y f(x)=\int_{\mathbb{R}^d}f(z)\,d\rho_{x,y}^k\in C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d),$$

где $\rho_{x,y}^k$ – радиальная вероятностная борелевская мера и $\operatorname{supp}\rho_{x,y}^k\subset B_{|x|+|y|}$.

(5) *Если $f\in L^1(\mathbb{R}^d,d\mu_k)$, то*

$$\int_{\mathbb{R}^d}\tau^y f\,d\mu_k=\int_{\mathbb{R}^d}f\,d\mu_k. \tag{2.8}$$

Пусть $t\in\mathbb{R}_+$. В [16] в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d,d\mu_k)$ нами определен другой оператор обобщенного сдвига T^t соотношением

$$\mathscr{F}_k(T^t f)(y)=j_{\lambda_k}(t|y|)\mathscr{F}_k(f)(y). \tag{2.9}$$

Так как $|j_{\lambda_k}(t)|\leqslant 1$, то $\|T^t\|_{2\to 2}\leqslant 1$. Перечислим свойства оператора T^t, $t\in\mathbb{R}_+$.

Предложение 4 [16], [21]. (1) *Оператор T^t положительный, $T^t 1=1$.*

(2) *Если $f\in\mathscr{A}_k(\mathbb{R}^d)$, то справедлива поточечная формула*

$$T^t f(x)=\int_{\mathbb{R}^d}j_{\lambda_k}(t|y|)e_k(x,y)\mathscr{F}_k(f)(y)\,d\mu_k(y)=\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\tau^{ty'}f(x)\,d\sigma_k(y').$$

(3) *Если $f\in C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$, то*

$$T^t f(x)=\int_{\mathbb{R}^d}f(z)\,d\sigma_{x,t}^k(z)\in C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d), \tag{2.10}$$

где $\sigma_{x,t}^k$ – вероятностная борелевская мера,

$$\operatorname{supp}\sigma_{x,t}^k\subset\bigcup_{g\in G}\{z\in\mathbb{R}^d:|z-gx|\leqslant t\}.$$

(4) *Если $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, $1\leqslant p<\infty$, то $\|T^t f\|_{p,d\mu_k}\leqslant\|f\|_{p,d\mu_k}$ и оператор T^t может быть продолжен на все $L_p(\mathbb{R}^d,d\mu_k)$ с сохранением нормы.*

(5) *Если* $f(x) = f_0(|x|) \in \mathscr{A}_k(\mathbb{R}^d)$ *– радиальная функция, то при* $\lambda = \lambda_k$

$$T^t f(x) = M^t f_0(|x|). \tag{2.11}$$

(6) *Если* $f \in L_1(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$, *то*

$$\int_{\mathbb{R}^d} T^t f\, d\mu_k = \int_{\mathbb{R}^d} f\, d\mu_k.$$

(7) *Если* $r > 0$, $1 \leqslant p < \infty$, $f \in L_p(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ *и* $\operatorname{supp} f \subset B_r$, *то* $\operatorname{supp} T^t f \subset B_{r+t}$, *а если* $\operatorname{supp} f \subset \mathbb{R}^d \setminus B_r$, $r > t$, *то* $\operatorname{supp} T^t f \subset \mathbb{R}^d \setminus B_{r-t}$.

Пусть $g(y) = g_0(|y|)$ – радиальная функция. С помощью оператора τ^y определим свертку [22]

$$(f *_k g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\tau^x g(-y)\, d\mu_k(y).$$

Предложение 5 [22], [16]. (1) *Если* $f \in \mathscr{A}_k(\mathbb{R}^d)$, $g \in L_1(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$, $g(y) = g_0(|y|)$, *то*

$$\mathscr{F}_k(f *_k g)(y) = \mathscr{F}_k(f)(y)\mathscr{F}_k(g)(y), \qquad y \in \mathbb{R}^d. \tag{2.12}$$

(2) *Если* $f \in L_p(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$, $1 \leqslant p < \infty$, $g \in L_1(\mathbb{R}^d, d\mu_k) \cap C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$, $g(y) = g_0(|y|)$, *то*

$$\|(f *_k g)\|_{p,d\mu_k} \leqslant \|f\|_{p,d\mu_k} \|g\|_{1,d\mu_k}. \tag{2.13}$$

3. Наилучшее приближение и модуль непрерывности. Константа Джексона. Пусть $\mathbb{C}^d$ – комплексное d-мерное евклидово пространство,

$$z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{C}^d, \quad \operatorname{Im} z = (\operatorname{Im} z_1, \dots, \operatorname{Im} z_d), \qquad \sigma > 0, \qquad 1 \leqslant p < \infty,$$

$B_{p,k}^\sigma$ – класс функций $f \in L_p(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ таких, что их аналитическое продолжение на $\mathbb{C}^d$ удовлетворяет неравенству

$$|f(z)| \leqslant c_\varepsilon e^{(\sigma+\varepsilon)|z|} \qquad \text{для всех} \quad \varepsilon > 0 \quad \text{и} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Наименьшее $\sigma = \sigma_f$ в этом неравенстве называется *сферическим типом* f. Класс $B_{p,k}^\sigma$ будем называть классом целых функций экспоненциального сферического типа не выше σ из $L_p(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$.

В [16] доказано, что для аналитического продолжения функции $f \in B_{p,k}^\sigma$ справедлива оценка

$$|f(z)| \leqslant c_f e^{\sigma|\operatorname{Im} z|} \qquad \text{для всех} \quad z \in \mathbb{C}^d.$$

Величина наилучшего приближения функции $f \in L_p(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ целыми функциями экспоненциально сферического типа не выше σ определяется как

$$E_\sigma(f)_{p,d\mu_k} = \inf\{\|f - g\|_{p,d\mu_k} : g \in B_{p,k}^\sigma\}.$$

В [16] доказано, что величина наилучшего приближения реализуется на некоторой экстремальной функции.

Для любых $f, g \in L_p(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ справедливо неравенство

$$|E_\sigma(f)_{p,d\mu_k} - E_\sigma(g)_{p,d\mu_k}| \leqslant \|f - g\|_{p,d\mu_k}. \tag{3.1}$$

На пространстве $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ определим функционал

$$\Omega(t,f)_{p,d\mu_k}=\biggl(\int_{\mathbb{R}^d}T^t(|f(\,\cdot\,)-f(x)|^p)(x)\,d\mu_k(x)\biggr)^{1/p}\tag{3.2}$$

и модуль непрерывности

$$\omega(\delta,f)_{p,d\mu_k}=\sup_{0\leqslant t\leqslant\delta}\Omega(t,f)_{p,d\mu_k},\qquad \delta\geqslant 0.\tag{3.3}$$

Если $k\equiv 0$, то

$$\Omega(t,f)_{p,d\mu_0}=\biggl(\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}|f(x+tz')-f(x)|^p\,d\sigma(z')\,d\mu_0(x)\biggr)^{1/p}.$$

Согласно представлению (2.10)

$$\Omega(t,f)_{p,d\mu_k}=\biggl(\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}|f(z)-f(x)|^p\,d\sigma_{x,t}^k(z)\,d\mu_k(x)\biggr)^{1/p}.\tag{3.4}$$

Отсюда, в частности, вытекает, что

$$\begin{aligned}\Omega(\delta,f+g)_{p,d\mu_k}&\leqslant\Omega(\delta,f)_{p,d\mu_k}+\Omega(\delta,g)_{p,d\mu_k},\\ \omega(\delta,f+g)_{p,d\mu_k}&\leqslant\omega(\delta,f)_{p,d\mu_k}+\omega(\delta,g)_{p,d\mu_k}.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Распространим функционал (3.2) и модуль непрерывности (3.3) на все пространство $L_p(\mathbb{R}^d,d\mu_k)$.

Лемма 1. *Если* $1\leqslant p<\infty$, $t\in\mathbb{R}_+$, $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, *то*

$$\Omega(t,f)_{p,d\mu_k}\leqslant 2\|f\|_{p,d\mu_k}.$$

Доказательство. Так как $|f(y)-f(x)|^p\leqslant 2^{p-1}(|f(y)|^p+|f(x)|^p)$, в силу положительности оператора обобщенного сдвига

$$T^t(|f(\,\cdot\,)-f(x)|^p)(x)\leqslant 2^{p-1}(T^t(|f(\,\cdot\,)|^p)(x)+|f(x)|^p).$$

Интегрируя последнее неравенство и применяя свойство (4) предложения 4, получим

$$\Omega(t,f)_{p,d\mu_k}\leqslant 2^{1-1/p}\biggl(\int_{\mathbb{R}^d}T^t|f(x)|^p\,d\mu_k(x)+\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|^p\,d\mu_k(x)\biggr)^{1/p}\leqslant 2\|f\|_{p,d\mu_k}.$$

Лемма 1 доказана.

Из (3.5) и леммы 1 вытекает следующее следствие.

Следствие 1. *Если* $1\leqslant p<\infty$, $t\in\mathbb{R}_+$, $f,g\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, *то*

$$|\Omega(t,f)_{p,d\mu_k}-\Omega(t,g)_{p,d\mu_k}|\leqslant 2\|f-g\|_{p,d\mu_k}.\tag{3.6}$$

Следствие 1 позволяет по непрерывности распространить функционал (3.2) и модуль непрерывности (3.3) на все пространство $L_p(\mathbb{R}^d,d\mu_k)$, $1\leqslant p<\infty$, с сохранением неравенств (3.5)–(3.6). Следствие 1 и неравенство (3.1) позволяют также доказывать неравенство Джексона на любом плотном в $L_p(\mathbb{R}^d,d\mu_k)$ множестве.

Лемма 2. *Если* $1 \leqslant p \leqslant 2$, $f \in L_p(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$, *то*

$$\lim_{\delta \to +0} \omega(\delta, f)_{p,d\mu_k} = 0. \tag{3.7}$$

Доказательство. Если $p = 2$, то применяя (2.9), представление (2.10) и равенство Планшереля, получим

$$\begin{aligned}\Omega^2(t, f)_{2,d\mu_k} &= \int_{\mathbb{R}^d} T^t(|f(\,\cdot\,) - f(x)|^2)(x)\, d\mu_k(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \{T^t(|f(\,\cdot\,)|^2)(x) + |f(x)|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\overline{f(x)}\, T^t f(x))\}\, d\mu_k(x) \\ &= 2\int_{\mathbb{R}^d} (1 - j_{\lambda_k}(t|y|))|\mathscr{F}_k(f)(y)|^2\, d\mu_k(y).\end{aligned}$$

Предел (3.7) достаточно установить на множестве $\{f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) : \mathscr{F}_k(f) \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R}^d)\}$, плотном в $L_2(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$. Если $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ и $\operatorname{supp} \mathscr{F}_k(f) \subset B_r$, то (3.7) вытекает из оценки

$$\Omega^2(t, f)_{2,d\mu_k} \leqslant 2\int_{B_r} (1 - j_{\lambda_k}(t|y|))\, d\mu_k(y) \|\mathscr{F}_k(f)\|_\infty.$$

Пусть $1 \leqslant p < 2$. Так как пространство $C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R}^d)$ плотно в $L_p(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$, то (3.7) достаточно доказать для $C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R}^d)$. Если $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\operatorname{supp} f \subset B_r$ и $t \leqslant 1$, то в применяя (2.10), (3.4), свойство (7) предложения 4 и неравенство Гёльдера, получим

$$\begin{aligned}\Omega(t, f)_{p,d\mu_k} &= \biggl(\int_{B_{r+1}} \int_{\mathbb{R}^d} |f(z) - f(x)|^p\, d\sigma_{x,t}^k(z)\, d\mu_k(x)\biggr)^{1/p} \\ &\leqslant (\mu_k(B_{r+1}))^{1/p-1/2} \biggl(\int_{B_{r+1}} \int_{\mathbb{R}^d} |f(z) - f(x)|^2\, d\sigma_{x,t}^k(z)\, d\mu_k(x)\biggr)^{1/2} \\ &= (\mu_k(B_{r+1}))^{1/p-1/2} \biggl(\int_{B_{r+1}} T^t(|f(\,\cdot\,) - f(x)|^2)(x)\, d\mu_k(x)\biggr)^{1/2}.\end{aligned}$$

Отсюда для $\delta \leqslant 1$

$$\omega(\delta, f)_p \leqslant (\mu_\lambda(B_{r+1}))^{1/p-1/2} \omega(\delta, f)_2.$$

Лемма 2 доказана.

Константа Джексона

$$D(\sigma, \delta)_{p,d\mu_k} = \sup\biggl\{\frac{E_\sigma(f)_{p,d\mu_k}}{\omega(\delta, f)_{p,d\mu_k}} : f \in L_p(\mathbb{R}^d, d\mu_k)\biggr\}$$

есть наименьшая константа в неравенстве Джексона

$$E_\sigma(f)_{p,d\mu_k} \leqslant D\omega(\delta, f)_{p,d\mu_k}.$$

Пусть $1 \leqslant p < \infty$, $\lambda \geqslant -1/2$, $\sigma > 0$, $E_{p,\lambda}^\sigma$ – класс функций $f \in L_p(\mathbb{R}_+, d\nu_\lambda)$, для которых четное аналитическое продолжение на $\mathbb{C}$ удовлетворяет оценке

$$|f(z)| \leqslant c_f e^{\sigma|\operatorname{Im} z|}, \qquad c_f > 0.$$

Таким образом, $E^\sigma_{p,\lambda}$ – класс четных целых функций экспоненциального типа не выше σ из $L_p(\mathbb{R}_+, d\nu_\lambda)$.

Величину наилучшего приближения функции $f\in L_p(\mathbb{R}_+, d\nu_\lambda)$ четными целыми функциями экспоненциального типа не выше σ определим равенством

$$E_\sigma(f)_{p,d\nu_\lambda}=\inf\{\|f-g\|_{p,d\nu_\lambda}: g\in E^\sigma_{p,\lambda}\}.$$

Модуль непрерывности функции $f\in L_p(\mathbb{R}_+, d\nu_\lambda)$ определим с помощью оператора обобщенного сдвига M^t (2.5)

$$\omega(\delta,f)_{p,d\nu_\lambda}=\sup\{\Omega(t,f)_{p,d\nu_\lambda}: 0\leqslant t\leqslant\delta\},\qquad \delta\geqslant 0, \tag{3.8}$$

где

$$\begin{aligned}\Omega^p(t,f)_{p,d\nu_\lambda}&=\int_0^\infty M^t|f(\,\cdot\,)-f(r)|^p(r)\,d\nu_\lambda(r)\\&=c_\lambda\int_0^\infty\int_0^\pi |f(\sqrt{r^2+t^2-2rt\cos\varphi})-f(r)|^p\sin^{2\lambda}\varphi\,d\varphi\,d\nu_\lambda(r).\end{aligned} \tag{3.9}$$

Константу Джексона определим равенством

$$D(\sigma,\delta)_{p,d\nu_\lambda}=\sup\biggl\{\frac{E_\sigma(f)_{p,d\nu_\lambda}}{\omega(\delta,f)_{p,d\nu_\lambda}}: f\in L_p(\mathbb{R}_+, d\nu_\lambda)\biggr\}.$$

В [9] доказано, что $D(\sigma,\delta)_{p,d\nu_\lambda}\geqslant 2^{1/p-1}$ для любых $\lambda>-1/2$, $1\leqslant p<2$, $\sigma,\delta>0$. Аналогичную оценку снизу получим и для константы Джексона $D(\sigma,\delta)_{p,d\mu_k}$.

Лемма 3. *Если* $1\leqslant p<2$, $\sigma,\delta>0$, $\lambda_k=d/2-1+\sum_{a\in R_+}k(a)$, *то*

$$D(\sigma,\delta)_{p,d\mu_k}\geqslant D(\sigma,\delta)_{p,d\nu_{\lambda_k}}\geqslant 2^{1/p-1}.$$

Доказательство. Достаточно доказать, что для радиальных функций $f(x)=f_0(|x|)\in C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d)$ выполняются равенства

$$E_\sigma(f)_{p,d\mu_k}=E_\sigma(f_0)_{p,d\nu_{\lambda_k}},\qquad \omega(\delta,f)_{p,d\mu_k}=\omega(\delta,f_0)_{p,d\nu_{\lambda_k}}.$$

Пусть функция $g\in B^\sigma_{p,k}$ – элемент наилучшего приближения в $L_p(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ функции $f\in C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d)$, $f(x)=f_0(|x|)$. Функция

$$g_0(r)=\int_{\mathbb{S}^{d-1}}g(rx')\,d\sigma_k(x')\in E^\sigma_{p,\lambda_k},\qquad r\in\mathbb{R}_+.$$

Действительно, g_0 – четная целая функция экспоненциального типа не выше σ (см. [23]) и в силу (2.6)

$$\begin{aligned}\|g_0\|_{p,d\nu_{\lambda_k}}&=\biggl(\int_0^\infty\biggl|\int_{\mathbb{S}^{d-1}}g(rx')\,d\sigma_k(x')\biggr|^p d\nu_{\lambda_k}(r)\biggr)^{1/p}\\&\leqslant\biggl(\int_0^\infty\int_{\mathbb{S}^{d-1}}|g(rx')|^p\,d\sigma_k(x')\,d\nu_{\lambda_k}(r)\biggr)^{1/p}=\|g\|_{p,d\mu_k}.\end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned}
E_\sigma(f_0)_{p,d\nu_{\lambda_k}} &\leqslant \|f_0-g_0\|_{p,d\nu_{\lambda_k}}\\
&= \biggl(\int_0^\infty \biggl|\int_{\mathbb{S}^{d-1}}(f(rx')-g(rx'))\,d\sigma_k(x')\biggr|^p\,d\nu_{\lambda_k}(r)\biggr)^{1/p}\\
&\leqslant \biggl(\int_0^\infty\int_{\mathbb{S}^{d-1}}|f(rx')-g(rx')|^p\,d\sigma_k(x')\,d\nu_{\lambda_k}(r)\biggr)^{1/p} = E_\sigma(f)_{p,d\mu_k}.
\end{aligned}$$

Аналогично, если $g_0\in E^\sigma_{p,\lambda_k}$ – элемент наилучшего приближения в $L_p(\mathbb{R}_+,d\nu_{\lambda_k})$ функции f_0, $f(x)=f_0(|x|)$, $g(x)=g_0(|x|)$, то в силу (2.6)

$$E_\sigma(f)_{p,d\mu_k}\leqslant \|f-g\|_{p,d\mu_k}=\|f_0-g_0\|_{p,d\nu_{\lambda_k}}=E_\sigma(f_0)_{p,d\nu_{\lambda_k}}.$$

Итак, $E_\sigma(f)_{p,d\mu_k}=E_\sigma(f_0)_{p,d\nu_{\lambda_k}}$.

При $1\leqslant p<2$ справедливы представления

$$|z|^p=\alpha_p\int_0^{2\pi}|\operatorname{Re}(ze^{-i\varphi})|^p\,d\varphi, \tag{3.10}$$

где $z\in\mathbb{C}$ и $\alpha_p^{-1}=\int_0^{2\pi}|\cos\varphi|^p\,d\varphi$, и

$$|t_1-t_2|^p=\beta_p\int_0^\infty\frac{|e^{i\xi t_1}-e^{i\xi t_2}|^2}{\xi^{p+1}}\,d\xi, \tag{3.11}$$

где $t_1,t_2\in\mathbb{R}$ и

$$\beta_p^{-1}=\int_0^\infty|1-e^{i\xi}|^2\xi^{-p-1}\,d\xi$$

(см. [4], [3]).

Для функции $f(x)=f_0(|x|)\in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R}^d)$ и $\varphi\in[0,2\pi]$, $\xi\in\mathbb{R}_+$, рассмотрим функцию $f_{\xi,\varphi}(x)=e^{i\xi\operatorname{Re}(f(x)e^{-i\varphi})}-1$. Она также радиальная и принадлежит $C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R}^d)$. Согласно (2.10) и (3.10), (3.11)

$$\begin{aligned}
T^t|f(\,\cdot\,)-f(x)|^p &= \int_{\mathbb{R}^d}|f(z)-f(x)|^p\,d\sigma^k_{x,t}(z)\\
&= \alpha_p\beta_p\int_0^{2\pi}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^d}|f_{\xi,\varphi}(z)-f_{\xi,\varphi}(x)|^2\,d\sigma^k_{x,t}(z)\,\frac{d\xi}{\xi^{p+1}}\,d\varphi\\
&= \alpha_p\beta_p\int_0^{2\pi}\int_0^\infty T^t|f(\,\cdot\,)-f(x)|^2\,\frac{d\xi}{\xi^{p+1}}\,d\varphi.
\end{aligned}\tag{3.12}$$

Применяя (2.5), (2.10), (2.11) и обозначая $|x|=r$, получим

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d}|f_{\xi,\varphi}(z)-f_{\xi,\varphi}(x)|^2\,d\sigma^k_{x,t}(z)\\
&\qquad=\int_{\mathbb{R}^d}\{|f_{\xi,\varphi}(z)|^2+|f_{\xi,\varphi}(x)|^2-2\operatorname{Re}(f_{\xi,\varphi}(z)\overline{f_{\xi,\varphi}(x)})\}\,d\sigma^k_{x,t}(z)\\
&\qquad=T^t(|f_{\xi,\varphi}(\,\cdot\,)|^2)(x)+|f_{\xi,\varphi}(x)|^2-2\operatorname{Re}(\overline{f_{\xi,\varphi}(x)}\,T^tf_{\xi,\varphi}(\,\cdot\,)(x))\\
&\qquad=M^t|f_{0,\xi,\varphi}(\,\cdot\,)|^2(r)+|f_{0,\xi,\varphi}(r)|^2-2\operatorname{Re}(\overline{f_{0,\xi,\varphi}(r)}\,M^tf_{0,\xi,\varphi}(\,\cdot\,)(r))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \{|f_{0,\xi,\varphi}(s)|^2 + |f_{0,\xi,\varphi}(r)|^2 - 2\operatorname{Re}(f_{0,\xi,\varphi}(s)\overline{f_{0,\xi,\varphi}(r)}\,)\}\,d\nu_{r,t}^{\lambda_k}(s) \\
&= \int_0^\infty |f_{0,\xi,\varphi}(s) - f_{0,\xi,\varphi}(r)|^2\,d\nu_{r,t}^{\lambda_k}(s).
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
T^t|f(\,\cdot\,) - f(x)|^p &= \alpha_p\beta_p \int_0^{2\pi}\int_0^\infty |f_{0,\xi,\varphi}(s) - f_{\xi,\varphi}(r)|^2\,d\nu_{r,t}^{\lambda_k}(s)\,\frac{d\xi}{\xi^{p+1}}\,d\varphi \\
&= \int_0^\infty |f_0(s) - f_0(r)|^p\,d\nu_{r,t}^{\lambda_k}(s) = M^t|f_0(\,\cdot\,) - f_0(r)|^p.
\end{aligned}
$$

Отсюда и из (3.2), (3.3), (3.8), (3.9), (2.6) находим $\omega(\delta,f)_{p,d\mu_k} = \omega(\delta,f_0)_{p,d\nu_{\lambda_k}}$.

Лемма 3 доказана.

Оценка снизу константы в неравенстве (1.1) теоремы 1 установлена.

4. Приближение в L_p линейными положительными интегральными операторами. Пусть X – локально компактное метрическое пространство с борелевской мерой μ, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $L_p(X)$ – пространство μ-измеримых, комплексных на X функций f, для которых

$$
\begin{aligned}
&\|f\|_p = \biggl(\int_X |f|^p\,d\mu\biggr)^{1/p} < \infty, && 1 \leqslant p < \infty, \\
&\|f\|_\infty = \inf\{\alpha \geqslant 0 : \mu\{x \in X : |f(x)| \geqslant \alpha\} = 0\} < \infty, && p = \infty,
\end{aligned}
$$

$P(X)$ – множество простых функций, принимающих конечное число значений и обращающихся в нуль вне подмножеств конечной меры, $C_{\mathrm{b}}(X^2)$ – пространство непрерывных ограниченных на X^2 функций. Пусть для функции $K(x,y)$ на X^2 выполнены условия

$$
\begin{gathered}
K(x,y) \in C_{\mathrm{b}}(X^2), \qquad K(x,y) = K(y,x), \qquad K(x,y) \geqslant 0, \\
\int_X K(x,y)\,d\mu(y) = 1, \qquad x \in X,
\end{gathered}
\tag{4.1}
$$

$L_{p,K}(X^2)$ – пространство $(\mu\times\mu)$-измеримых, комплексных на X^2 функций $g(x,y)$, для которых

$$
\|g\|_{p,K} = \biggl(\int_X\int_X |g(x,y)|^p K(x,y)\,d\mu(x)\,d\mu(y)\biggr)^{1/p} < \infty.
$$

Определим два линейных оператора

$$
Sf(x,y) = f(x) - f(y)\colon L_p(X) \to L_{p,K}(X^2)
$$

и

$$
Af(x) = \int_X f(y)K(x,y)\,d\mu(y)\colon L_p(X) \to L_p(X). \tag{4.2}
$$

Лемма 4. *Если* $1\leqslant p\leqslant\infty$, p' *– сопряженный показатель*, $1/p+1/p'=1$, *то*

$$\|f-Af\|_p\leqslant\frac{1}{2}\|S\|_{p'\to(p',K)}\|Sf\|_{p,K},$$

где

$$\|S\|_{p'\to(p',K)}=\sup\{\|Sf\|_{p',K}:\|h\|_{p'}\leqslant 1\}.$$

Доказательство. Рассмотрим линейный оператор

$$Bg(x)=\int_X(g(x,y)-g(y,x))K(x,y)\,d\mu(y)\colon L_{p,K}(X^2)\to L_p(X).$$

Так как

$$\|f\|_p=\sup\biggl\{\biggl|\int_X fh\,d\mu\biggr|:\|h\|_{p'}\leqslant 1\biggr\},$$

применяя симметричность ядра $K(x,y)$ и неравенство Гёльдера, получим

$$\begin{aligned}\|Bg\|_p&=\sup_{\|h\|_{p'}\leqslant 1}\int_X Bg(x)h(x)\,d\mu(x)\\&=\sup_{\|h\|_{p'}\leqslant 1}\int_X\int_X(g(x,y)-g(y,x))h(x)K(x,y)\,d\mu(x)\,d\mu(y)\\&=\sup_{\|h\|_{p'}\leqslant 1}\int_X\int_X(h(x)-h(y))g(x,y)K(x,y)\,d\mu(x)\,d\mu(y)\\&\leqslant\sup_{\|h\|_{p'}\leqslant 1}\|Sh\|_{p',K}\|g\|_{p,K}=\|S\|_{p'\to(p',K)}\|g\|_{p,K}.\end{aligned}$$

На элементе $g(x,y)=Sf(x,y)$

$$\begin{aligned}BSf(x)&=\int_X(Sf(x,y)-Sf(y,x))K(x,y)\,d\mu(y)\\&=2\int_X(f(x)-f(y))K(x,y)\,d\mu(y)=2(f(x)-Af(x)),\end{aligned}$$

поэтому

$$\|BSf\|_p=2\|f-Af\|_p\leqslant\|S\|_{p'\to(p',K)}\|Sf\|_{p,K}.$$

Лемма 4 доказана.

Функцию $K(x,y)$ назовем *положительно определенной*, если для любой $f\in L_1(X)$

$$\int_X\int_X K(x,y)f(x)\overline{f(y)}\,d\mu(x)\,d\mu(y)\geqslant 0.$$

Лемма 5. *Если для положительно определенной функции* $K(x,y)$ *выполнены условия* (4.1), *то для любой* $f\in L_p(X)$, $1\leqslant p\leqslant 2$,

$$\|f-Af\|_p\leqslant 2^{-1/p'}\|Sf\|_{p,K}.$$

Доказательство. Согласно лемме 4 достаточно доказать оценку

$$\|S\|_{p'\to(p',K)} \leqslant 2^{1/p}, \qquad 1 \leqslant p \leqslant 2. \tag{4.3}$$

Так как

$$\|Sf\|_{\infty,K} = \|f(x) - f(y)\|_\infty \leqslant 2\|f\|_\infty,$$

то

$$\|S\|_{\infty\to(\infty,K)} \leqslant 2. \tag{4.4}$$

Используя (4.1), положительную определенность K, получим

$$\begin{aligned}\|Sf\|_{2,K}^2 &= \int_X\int_X |f(x)-f(y)|^2 K(x,y)\,d\mu(x)\,d\mu(y)\\ &= \int_X\int_X (|f(x)|^2 + |f(y)|^2 - 2\operatorname{Re}(f(x)\overline{f(y)}\,))K(x,y)\,d\mu(x)\,d\mu(y)\\ &= 2\|f\|_2^2 - 2\operatorname{Re}\int_X\int_X f(x)\overline{f(y)}K(x,y)\,d\mu(x)\,d\mu(y) \leqslant 2\|f\|_2^2.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\|S\|_{2\to(2,K)} \leqslant 2^{1/2}. \tag{4.5}$$

По теореме Рисса–Торина, интерполируя (4.4) и (4.5), получим (4.3).

Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant 2$, *для функций* $K(x,y)$, $V(x,y)$ *выполнены условия* (4.1), *а функция* $F(x,y) = K(x,y) - V(x,y)$ *положительно определенная. Тогда для любой* $f \in L_p(X)$

$$\int_X\int_X |Sf(x,y)|^p F(x,y)\,d\mu(x)\,d\mu(y) = \int_X\int_X |f(x)-f(y)|^p F(x,y)\,d\mu(x)\,d\mu(y) \leqslant 0.$$

Доказательство. Так как $P(X)$ плотно в $L_p(X)$ и для любых $f_1, f_2 \in L_p(X)$

$$\begin{aligned}&\biggl(\int_X\int_X |Sf_1(x,y) - Sf_2(x,y)|^p (K(x,y)+V(x,y))\,d\mu(x)\,d\mu(y)\biggr)^{1/p}\\ &\quad\leqslant 2\biggl(\int_X\int_X |f_1(x)-f_2(x)|^p K(x,y)\,d\mu(x)\,d\mu(y)\biggr)^{1/p}\\ &\qquad + 2\biggl(\int_X\int_X |f_1(x)-f_2(x)|^p V(x,y)\,d\mu(x)\,d\mu(y)\biggr)^{1/p} = 4\|f_1 - f_2\|_p,\end{aligned}$$

то можно считать $f \in P(X)$.

Если $p = 2$, то

$$\begin{aligned}&\int_X |f(x)|^2 F(x,y)\,d\mu(x)\,d\mu(y)\\ &\quad= \int_X |f(x)|^2 K(x,y)\,d\mu(x)\,d\mu(y) - \int_X |f(x)|^2 V(x,y)\,d\mu(x)\,d\mu(y)\\ &\quad= \int_X |f(x)|^2\,d\mu(x)\int_X K(x,y)\,d\mu(y) - \int_X |f(x)|^2\,d\mu(x)\int_X V(x,y)\,d\mu(y) = 0,\end{aligned}$$

поэтому из положительной определенности $F(x,y)$

$$\begin{aligned}\int_X\int_X |f(x)-f(y)|^2F(x,y)\,d\mu(x)\,d\mu(y)\\ =\int_X\int_X\Bigl(|f(x)|^2+|f(y)|^2-2\operatorname{Re}(f(x)\overline{f(y)}\,)\Bigr)F(x,y)\,d\mu(x)\,d\mu(y)\leqslant 0.\end{aligned}$$

Следовательно, при $p=2$ лемма 6 верна.

Полагая для $f\in P(X)$, $f_{\xi,\varphi}(x)=e^{i\xi\operatorname{Re}(f(x)e^{-i\varphi})}-1$, получим $f_{\xi,\varphi}(x)\in P(X)$. Из представлений (3.10), (3.11) и уже доказанного

$$\begin{aligned}\int_X\int_X |f(x)-f(y)|^pF(x,y)\,d\mu(x)\,d\mu(y)\\ =\alpha_p\beta_p\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\int_X\int_X|f_{\xi,\varphi}(x)-f_{\xi,\varphi}(y)|^2F(x,y)\,d\mu(x)\,d\mu(y)\,\frac{d\xi}{\xi^{p+1}}\,d\varphi\leqslant 0.\end{aligned}$$

Лемма 6 доказана.

5. Доказательство теоремы 1. Для того, чтобы воспользоваться результатами раздела 4 для $X=\mathbb{R}^d$, $d\mu=d\mu_k$, необходимо построить ядро $K(x,y)$ линейного положительного интегрального оператора A (4.2). Будем использовать решение экстремальной задачи Бомана для преобразования Данкля (см. [24]).

Задача Бомана состоит в вычислении величины

$$B_k(\tau)=\inf\int_{\mathbb{R}^d}|x|^2g(x)\,d\mu_k(x),$$

если

$$g\in L_1(\mathbb{R}^d,d\mu_k),\quad g(x)\geqslant 0,\qquad \mathscr{F}_kg(0)=1,\qquad \operatorname{supp}\mathscr{F}_k(g)\subset B_\tau. \tag{5.1}$$

Экстремальная функция в задаче Бомана радиальная и имеет вид

$$g_\tau(x)=\frac{2^{-3\lambda_k-1}\tau^{2(\lambda_k+1)}}{\Gamma(\lambda_k+1)q_{\lambda_k}^2}\biggl(\frac{j_{\lambda_k}(\tau|x|/2)}{1-(\tau|x|/(2q_{\lambda_k}))^2}\biggr)^2.$$

Это целая функция экспоненциального сферического типа τ. Так как согласно (2.4) $\mathscr{F}_k(g_\tau)(y)=\mathscr{H}_{\lambda_k}(g_{0,\tau})(|y|)$, из результатов [5], [6] вытекает, что

$$\mathscr{F}_k(g_\tau)(y)\geqslant 0,\qquad \mathscr{F}_k(g_\tau)\in L_1(\mathbb{R}^d,d\mu_k)\cap C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d),\qquad g_\tau,\mathscr{F}_k(g_\tau)\in\mathscr{A}_k(\mathbb{R}^d). \tag{5.2}$$

Положим

$$K_\sigma(x,y)=\tau^xg_{2\sigma}(-y).$$

Лемма 7. *Функция $K_\sigma(x,y)$ положительно определенная и удовлетворяет условиям (4.1). Если $f\in\mathscr{A}_k(\mathbb{R}^d)$, то*

$$A_\sigma f(x)=\int_{\mathbb{R}^d}f(y)K_\sigma(x,y)\,d\mu_k(y)$$

является целой функцией экспоненциального сферического типа не выше 2σ, принадлежащей $L_p(\mathbb{R}^d,d\mu_k)$, $1\leqslant p<\infty$.

Доказательство. Из (2.7)–(2.8), (5.1), (5.2) и радиальности $\mathscr{F}_k(g_\tau)$ вытекает, что

$$K_\sigma(x,y)\in C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d),\qquad K_\sigma(x,y)\geqslant 0,$$

$$\begin{aligned}K_\sigma(x,y)&=\int_{\mathbb{R}^d} e_k(-y,z)e_k(x,z)\mathscr{F}_k(g_{2\sigma})(z)\,d\mu_k(z)\\&=\int_{\mathbb{R}^d} e_k(-x,z)e_k(y,z)\mathscr{F}_k(g_{2\sigma})(z)\,d\mu_k(z)=K_\sigma(y,x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} K_\sigma(x,y)\,d\mu_k(y)&=\int_{\mathbb{R}^d}\tau^x g_{2\sigma}(-y)\,d\mu_k(y)\\&=\int_{\mathbb{R}^d}\tau^x g_{2\sigma}(y)\,d\mu_k(y)=\int_{\mathbb{R}^d} g_{2\sigma}(y)\,d\mu_k(y)=1.\end{aligned}$$

Если $h\in L_1(\mathbb{R}^d,d\mu_k)$, то, используя свойства обобщенной экспоненты (2.1), получим

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} K_\sigma(x,y)h(y)\overline{h(x)}\,d\mu_k(x)\,d\mu_k(y)\\&\quad=\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} e_k(-y,z)e_k(x,z)\mathscr{F}_k(g_{2\sigma})(z)\,d\mu_k(z)h(y)\overline{h(x)}\,d\mu_k(x)\,d\mu_k(y)\\&\quad=\int_{\mathbb{R}^d}\mathscr{F}_k(g_{2\sigma})(z)\int_{\mathbb{R}^d} h(y)\overline{e_k(z,y)}\,d\mu_k(y)\int_{\mathbb{R}^d}\overline{h(x)}e_k(z,x)\,d\mu_k(x)\,d\mu_k(z)\\&\quad=\int_{\mathbb{R}^d}\mathscr{F}_k(g_{2\sigma})(z)|\mathscr{F}_k(h)(z)|^2\,d\mu_k(z)\geqslant 0.\end{aligned}$$

Наконец, если $f\in\mathscr{A}_k(\mathbb{R}^d)$, то, применяя непрерывность и ограниченность ядра $K_\sigma(x,y)$, (2.12), (2.13), получим $A_\sigma f\in L_1(\mathbb{R}^d,d\mu_k)\cap C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$,

$$\mathscr{F}_k(A_\sigma f)(y)=\mathscr{F}_k(f*_k g_{2\sigma})(y)=\mathscr{F}_k(f)(y)\mathscr{F}_k(g_{2\sigma})(y)\in L_1(\mathbb{R}^d,d\mu_k)\cap C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d),$$

поэтому $A_\sigma f\in\mathscr{A}_k(\mathbb{R}^d)$ и $\operatorname{supp}\mathscr{F}_k(A_\sigma f)\subset B_{2\sigma}$. По формуле обращения (2.3)

$$A_\sigma f(x)=\int_{B_{2\sigma}}\mathscr{F}_k(A_\sigma f)(y)\overline{e_k(x,y)}\,d\mu_k.$$

Следовательно, $A_\sigma f(x)$ – целая функция экспоненциального сферического типа не выше 2σ. Так как $A_\sigma f\in\mathscr{A}_k(\mathbb{R}^d)$, то $A_\sigma f\in L_p(\mathbb{R}^d,d\mu_k)$, $1\leqslant p<\infty$.

Лемма 7 доказана.

Если $f\in L_p(\mathbb{R}^d,d\mu_k)$, $1\leqslant p\leqslant 2$, то из лемм 5, 7 вытекает оценка

$$\|f-A_\sigma f\|_p\leqslant 2^{-1/p'}\biggl(\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)-f(y)|^pK_\sigma(x,y)\,d\mu_k(x)\,d\mu_k(y)\biggr)^{1/p}. \tag{5.3}$$

Чтобы локализовать носитель ядра $K_\sigma(x,y)$ в окрестности нуля, построим новое ядро $V_\sigma(x,y)$. Для этого воспользуемся решением экстремальной задачи Логана для преобразования Данкля (см. [17]).

Пусть $h(x)$ – действительная функция, $\lambda(h)=\sup\{|x|:f(x)>0\}$. Задача Логана состоит в вычислении величины

$$\Lambda_k(\tau)=\inf\lambda(h),$$

если

$$h \in L_1(\mathbb{R}^d, d\mu_k) \cap C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d), \quad h(0)=1, \qquad \mathscr{F}_k(h)(y) \geqslant 0, \qquad \operatorname{supp} \mathscr{F}_k(h) \subset B_\tau. \quad (5.4)$$

Экстремальная функция в задаче Логана радиальная и имеет вид

$$h_\tau(x) = \frac{j^2_{\lambda_k}(\tau|x|/2)}{1-(\tau|x|/(2q_{\lambda_k}))^2}\,.$$

Это целая функция экспоненциального сферического типа τ и для нее выполнены следующие свойства:

$$\mathscr{F}_k(h_\tau)(y) \geqslant 0, \qquad \mathscr{F}_k(h_\tau) \in L_1(\mathbb{R}^d, d\mu_k) \cap C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d), \qquad h_\tau, \mathscr{F}_k(h_\tau) \in \mathscr{A}_k(\mathbb{R}^d). \quad (5.5)$$

Положим

$$\tau_0 = \frac{2q_{\lambda_k}}{\sigma}\,, \qquad G_\sigma(x) = G_{0,\sigma}(|x|) = \mathscr{F}_k(h_{\tau_0})(x), \qquad V_\sigma(x,y) = \tau^x G_\sigma(-y).$$

Отметим, что

$$\operatorname{supp} G_{0,\sigma} \subset \biggl[0, \frac{2q_{\lambda_k}}{\sigma}\biggr]. \quad (5.6)$$

Лемма 8. *Для функции $V_\sigma(x,y)$ выполнены условия* (4.1). *Функция*

$$F_\sigma(x,y) = K_\sigma(x,y) - V_\sigma(x,y)$$

положительно определенная.

Доказательство. Используя (5.4), (5.5), условия (4.1) для функции $V_\sigma(x,y)$ проверяются как и в лемме 7. Известно, что

$$\mathscr{F}_k(g_{2\sigma})(y) \geqslant h_{\tau_0}(y) = \mathscr{F}_k(G_\sigma)(y)$$

(см. [5], [6]), поэтому $\mathscr{F}_k(g_{2\sigma} - G_\sigma)(y) \geqslant 0$, и положительная определенность функции $F_\sigma(x,y)$ доказывается как и в лемме 7.

Лемма 8 доказана.

Лемма 9. *Если $1 \leqslant p \leqslant 2$, $f \in C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d)$, то*

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)-f(y)|^p V_\sigma(x,y)\,d\mu_k(x)\,d\mu_k(y) = \int_0^\infty \Omega^p(t,f)_{p,d\mu_k} G_{0,\sigma}(t)\,d\nu_{\lambda_k}(t). \quad (5.7)$$

Доказательство. Пусть вначале $p=2$. Применяя (2.3), (2.7), (2.8), равенство Планшереля, для левой части (5.7) получим

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)-f(y)|^2 V_\sigma(x,y)\,d\mu_k(x)\,d\mu_k(y)\\
&\quad= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)-f(y)|^2 \tau^x G_\sigma(-y)\,d\mu_k(x)\,d\mu_k(y)\\
&\quad= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \{|f(x)|^2 + |f(y)|^2 - 2\operatorname{Re}(f(y)\overline{f(x)}\,)\}\tau^x G_\sigma(-y)\,d\mu_k(x)\,d\mu_k(y)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} G_\sigma(y)|f(x)|^2\,d\mu_k(x)\,d\mu_k(y)\\
&\qquad - 2\operatorname{Re}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(y)\overline{f(x)}e_k(-y,z)e_k(x,z)\mathscr{F}_k(G_\sigma)(z)\,d\mu_k(x)\,d\mu_k(y)\,d\mu_k(z)\\
&= 2\int_{\mathbb{R}^d}(\mathscr{F}_k(G_\sigma)(0)-\mathscr{F}_k(G_\sigma)(z))|\mathscr{F}_k(f)(z)|^2\,d\mu_k(z).
\end{aligned}
$$

Аналогично, используя (3.8), преобразуем правую часть (5.7)

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty \Omega^2(t,f)_{2,d\mu_k}G_{0,\sigma}(t)\,d\nu_{\lambda_k}(t)\\
&\qquad = 2\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^d}(1-j_{\lambda_k}(t|z|))|\mathscr{F}_k(f)(z)|^2\,d\mu_k(z)G_{0,\sigma}(t)\,d\nu_{\lambda_k}(t)\\
&\qquad = 2\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^\infty G_{0,\sigma}(t)(1-j_{\lambda_k}(t|z|)\,d\nu_{\lambda_k}(t)|\mathscr{F}_k(f)(z)|^2\,d\mu_k(z)\\
&\qquad = 2\int_{\mathbb{R}^d}(\mathscr{H}_{\lambda_k}(G_{0,\sigma})(0)-\mathscr{H}_{\lambda_k}(G_{0,\sigma})(|z|))|\mathscr{F}_k(f)(z)|^2\,d\mu_k(z).
\end{aligned}
$$

Согласно (2.4) левая и правая части равенства (5.7) совпадают, что доказывает лемму при $p=2$.

Пусть $1\leqslant p<2$. Если для $f\in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R}^d)$, $f_{\xi,\varphi}(x)=e^{i\xi\operatorname{Re}(f(x)e^{-i\varphi})}-1$, то $f_{\xi,\varphi}(x)\in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R}^d)$. Применяя представления (3.10), (3.11) и соотношение (3.12), получим

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)-f(y)|^pV_\sigma(x,y)\,d\mu_k(x)\,d\mu_k(y)\\
&\qquad=\alpha_p\beta_p\int_0^{2\pi}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}|f_{\xi,\varphi}(x)-f_{\xi,\varphi}(y)|^2V_\sigma(x,y)\,d\mu_k(x)\,d\mu_k(y)\,\frac{d\xi}{\xi^{p+1}}\,d\varphi,
\end{aligned}
$$

и

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty \Omega^p(t,f)_{p,d\mu_k}G_{0,\sigma}(t)\,d\nu_{\lambda_k}(t)\\
&\qquad=\alpha_p\beta_p\int_0^{2\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^d}T^t(|f_{\xi,\varphi}(\,\cdot\,)-f_{\xi,\varphi}(y)|^2)(x)\,d\mu_k(x)G_{0,\sigma}(t)\,d\nu_{\lambda_k}(t)\,\frac{d\xi}{\xi^{p+1}}\,d\varphi\\
&\qquad=\alpha_p\beta_p\int_0^{2\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty\Omega^2(t,f_{\xi,\varphi})_{2,d\mu_k}G_{0,\sigma}(t)\,d\nu_{\lambda_k}(t)\,\frac{d\xi}{\xi^{p+1}}\,d\varphi.
\end{aligned}
$$

Таким образом, случай $1\leqslant p<2$ сводится к случаю $p=2$.

Лемма 9 доказана.

Теперь несложно получить неравенство (1.1). Достаточно это сделать для функций из $C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R}^d)$. Если $f\in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R}^d)$, $1\leqslant p<2$, то в силу (5.3), (5.6), лемм 6, 8, 9 получаем цепочку неравенств

$$
\begin{aligned}
\|f-A_\sigma f\|_p&\leqslant 2^{-1/p'}\biggl(\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)-f(y)|^pK_\sigma(x,y)\,d\mu_k(x)\,d\mu_k(y)\biggr)^{1/p}\\
&\leqslant 2^{-1/p'}\biggl(\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)-f(y)|^pV_\sigma(x,y)\,d\mu_k(x)\,d\mu_k(y)\biggr)^{1/p}
\end{aligned}
$$

$$= 2^{-1/p'}\biggl(\int_0^\infty \Omega^p(t,f)_{p,d\mu_k} G_{0,\sigma}(t)\,d\nu_{\lambda_k}(t)\biggr)^{1/p} \leqslant 2^{-1/p'}\omega\biggl(\frac{2q_{\lambda_k}}{\sigma}, f\biggr)_{p,d\mu_k}.$$

Неравенство (1.1) доказано. Оценка снизу была получена ранее в лемме 3. Теорема 1 полностью доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] M. Rösler, "Dunkl operators: theory and applications", *Orthogonal Polynomials and Special Functions*, Lecture Notes in Math., **1817**, Springer, Berlin, 2002, 93–135.

[2] А. В. Иванов, В. И. Иванов, "Теория Данкля и теорема Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом", Тр. ИММ УрО РАН, **16**, № 4, 2010, 180–192.

[3] Д. В. Горбачев, "Точное неравенство Джексона в пространстве L_p на сфере", *Матем. заметки*, **66**:1 (1999), 50–62.

[4] Н. И. Черных, "Неравенство Джексона в $L_p(0,2\pi)$ $(1\leqslant p<2)$ с точной константой", *Труды Всесоюзной школы по теории функций*, Тр. МИАН, **198**, Наука, М., 1992, 232–241.

[5] В. И. Иванов, "О приближении функций в пространствах L_p", *Матем. заметки*, **56**:2 (1994), 15–40.

[6] А. В. Московский, "Теоремы Джексона в пространствах $L_p(\mathbb{R}^n)$ и $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}_+)$", *Изв. ТулГУ. Сер. Матем. Мех. Информ.*, **3**:1 (1997), 44–70.

[7] О. Л. Виноградов, "О константе в неравенстве Джексона для пространств $L_p(-\infty,\infty)$", *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Матем.*, 1994, № 3, 11–17.

[8] Д. В. Чертова, "Оценка сверху констант Джексона в пространствах L_p, $1\leqslant p<2$, на прямой со степенным весом", *Изв. ТулГУ. Естественные науки*, 2011, № 2, 94–109.

[9] В. И. Иванов, "О точности неравенства Джексона в пространствах L_p на полупрямой со степенным весом", *Матем. заметки*, **98**:5 (2015), 684–694.

[10] Д. В. Чертова, "Теоремы Джексона в пространствах L_p, $1\leqslant p<2$, с периодическим весом Якоби", *Изв. ТулГУ. Естественные науки*, 2009, № 1, 5–27.

[11] В. И. Иванов, Юнпин Лю, "Оценка снизу констант Джексона в пространствах L_p, $1\leqslant p<2$, с периодическим весом Якоби", *Изв. ТулГУ. Естественные науки*, 2011, № 2, 59–70.

[12] F. Dai, Y. Xu, *Approximation Theory and Harmonic Analysis on Spheres and Balls*, Springer, New York, 2013.

[13] Р. А. Вепринцев, "Неравенство Джексона в пространствах L_p на сфере с весом Данкля", *Изв. ТулГУ. Естественные науки*, 2013, № 3, 27–49.

[14] Р. А. Вепринцев, "Оценка снизу константы Джексона в пространствах L_p на сфере с весом Данкля, связанным с группой диэдра", *Чебышевский сб.*, **16**:3 (2015), 95–123.

[15] Р. А. Вепринцев, "Оценка снизу константы Джексона в пространствах L_p на сфере с весом Данкля, связанным с абелевой группой $\mathbb{Z}_2^d$", *Изв. ТулГУ. Естественные науки*, 2015, № 3, 5–27.

[16] D. V. Gorbachev, V. I. Ivanov, S. Yu. Tikhonov, "Positive L_p-bounded Dunkl-type generalized translation operator and its applications", *Constr. Approx.*, 2018.

[17] А. В. Иванов, В. И. Иванов, "Оптимальные аргументы в неравенстве Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом", *Матем. заметки*, **94**:3 (2013), 338–348.

[18] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Higher Transcendental Functions*, Vol. II, MacGraw-Hill, New York, 1953.

[19] С. С. Платонов, "Гармонический анализ Бесселя и приближение функций на полупрямой", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **71**:5 (2007), 149–196.

[20] M. Rösler, "Generalized Hermite polynomials and the heat equation for Dunkl operators", *Comm. Math. Phys.*, **192**:3 (1998), 519–542.

[21] M. Rösler, “A positive radial product formula for the Dunkl kernel”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **355**:6 (2003), 2413–2438.

[22] S. Thangavelu, Y. Xu, “Convolution operator and maximal function for Dunkl transform”, *J. Anal. Math.*, **97** (2005), 25–55.

[23] Д. В. Горбачев, “Экстремальные задачи для целых функций экспоненциального сферического типа”, *Матем. заметки*, **68**:2 (2000), 179–187.

[24] Д. В. Горбачев, В. И. Иванов, “Экстремальная задача Бомана для преобразования Данкля”, Тр. ИММ УрО РАН, **21**, № 4, 2015, 115–123.

Д. В. Горбачев
Тульский государственный университет
E-mail: dvgmail@mail.ru

В. И. Иванов
Тульский государственный университет
E-mail: ivaleryi@mail.ru

Поступило
19.10.2018
Принята к публикации
14.11.2018