Доклады Академии наук
1992. Том 326, № 4

УДК 519.95 МАТЕМАТИКА

© О.Ю. ВОРОБЬЕВ

ИСЧИСЛЕНИЕ СЕТ-РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

(Представлено академиком М.М. Лаврентьевым 23 IV 1992)

Теория сет-суммирования [5–9] возникла в связи с потребностями теории случайных конечных множеств [1–4] и ее приложений как технический аппарат для конструирования вероятностных распределений [7]. Сет-суммирование изучает методы исчисления сет-сумм вида $\sum_{E \in \mathscr{P}} \Phi(E)$, где $\mathscr{P}$ – конечная совокупность конечных множеств, а Φ – ограниченная числовая функция на $\mathscr{P}$ (аддитивная или мультипликативная).

Эквивалентные суммы по числовому индексу давно и основательно изучаются в комбинаторном анализе (М. Айгнер, Г.П. Егорычев, Г.Дж. Райзер, Дж. Риордан, Дж.-К. Рота, К.А. Рыбников, В.Н. Сачков, Р. Стенли, Б.С. Стечкин, В.Е. Тараканов, М. Холл, Г. Эндрюс, С.В. Яблонский). Связанные с исчислением сет-сумм проблемы постоянно и естественно возникают в комбинаторных вероятностных задачах (А.Д. Коршунов, В.К. Леонтьев, М.И. Нечепуренко, Л.Я. Савельев, П. Эрдеш и Дж. Спенсер). Постоянная потребность в практическом исчислении подобных сумм имеется также в статистической физике и механике (Р.А. Минлос, К. Престон, Я.Г. Синай).

Существует глубокая связь между распределениями случайных конечных множеств, конструируемых при помощи сет-сумм, и распределениями, которые конструируются емкостями Шоке (К. Деллашери, Ж. Матерон, Д.Дж. Кендалл, П.-А. Мейер, Дж. Серра, Г. Шоке, Д. Штойян). Эта связь будет рассмотрена автором в последующих работах. Кроме того, сет-суммирование может оказаться полезным в теории product-интегрирования (Р.Д. Гилл).

Цель работы – конструирование распределений случайных конечных множеств, основанных на теории сет-суммирования, для которых могут быть практически вычислены вероятности всех обычно интересующих исследователя событий, т.е. сет-распределений, которые обладают так называемым свойством "вычислимости". Понятие "вычислимости" в этом контексте понимается в смысле существования точных, конечных и достаточно простых формул или алгоритмов вычисления в духе конструктивной математики (Н. Катленд, В.Н. Тростников, Э. Энгелер).

Пусть $\mathscr{X}$ – конечное множество, $\mathscr{M} = 2^{\mathscr{X}}$ – множество всех подмножеств $\mathscr{X}$, $\overline{\mathscr{E}}_n$ – множество вершин единичного гиперкуба размерности $n > 0$, $\overline{E} = (E_1, \ldots, E_n) \in \mathscr{M}^n = \mathscr{M} \times \ldots \times \mathscr{M}$ – сет-вектор произвольных подмножеств $\mathscr{X}$, $E_\epsilon = \bigcap_1^n E_i^{\{\epsilon_i\}}$ есть терраска (определяемая для произвольного сет-вектора $\overline{E} \in \mathscr{M}^n$ и вершины $\epsilon \in \overline{\mathscr{E}}_n$ как пересечение компонент ($\epsilon_i = 1$) и дополнений компонент ($\epsilon_i = 0$) сет-вектора $\overline{E} \in \mathscr{M}^n$), $a_e(\overline{E}) = \sum_{\epsilon \in e} E_\epsilon$ есть интенсиональная теоретикомножественная операция a_e: $\mathcal{M}^n \hookrightarrow\!\!\!\rightarrow \mathcal{M}$ (однозначно определяемая подмножеством вершин $e \subseteq \mathcal{E}_n$), $a_{\bar e}(\bar E) = (a_{e_1}(\bar E), \ldots, a_{e_m}(\bar E))$ есть сет-интенсиональная операция $a_{\bar e}$: $\mathcal{M}^n \hookrightarrow\!\!\!\rightarrow \mathcal{M}^m$ (однозначно определяемая "вершинным" сет-вектором $\bar e = (e_1, \ldots, e_m) \in \{2^{\mathcal{E}_n}\}^m$).

Главный результат теории сет-суммирования – это теорема о суммировании основной сет-суммы $\sum_{\bar E \in \mathcal{P}(\bar A')} \bar\mu(a_{\bar f}(\bar E))\bar\nu(a_{\bar e}(\bar E))$, где $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\bar A')$ – это сет-совокупность сет-векторов $\bar E \in \mathcal{M}^n$ (основная область сет-суммирования) одного из трех видов: сет-отрезок

$$\mathcal{S}_n(\bar A') = \{\bar E \in \mathcal{M}^n:\ \bar\phi \subseteq \bar E \subseteq \bar A'\},$$

ϕ-сет-отрезок

$$\mathcal{S}_n^{[\phi]}(\bar A') = \{\bar E \in \mathcal{S}_n(\bar A'):\ E_i \cap E_j = \phi,\ i \neq j\}$$

и сет-разбиение

$$\mathcal{S}_n^{[\phi]}\left(= \bigcup_1^n A_i',\ \bar A'\right) = \left\{\bar E \in \mathcal{S}_n^{[\phi]}(\bar A'):\ \sum_1^n E_i = \bigcup_1^n A_i'\right\},$$

$$\bar\mu(a_{\bar f}(\bar E)) = \sum_{i=1}^{l} \mu_i(a_{f_i}(\bar E)), \quad \bar\nu(a_{\bar e}(\bar E)) = \prod_{j=1}^{m} \nu_j(a_{e_j}(\bar E)),$$

$\mu_1, \ldots, \mu_l$ – меры, $\nu_1, \ldots, \nu_m$ – мульт-меры на $\mathcal{M}$.

Обозначим: $\mathcal{P}(\bar A' | \bar A'') = \{\bar E \in \mathcal{P}(\bar A') : a_{\bar r}(\bar E) = \bar A''\}$ – одна из трех условных областей сет-суммирования: $\mathcal{S}_n^{\bar r}(\bar A' | \bar A'') = \mathcal{S}_n(\bar A') \cap \mathcal{M}_{\bar r}^{n}(\bar A'')$ – условный сет-отрезок; $\mathcal{S}_n^{\bar r[\phi]}(\bar A' | \bar A'') = \mathcal{S}_n^{[\phi]}(\bar A') \cap \mathcal{M}_{\bar r}^{n}(\bar A'')$ – условный ϕ-сет-отрезок; $\mathcal{S}_n^{\bar r[\phi]}\left(= \bigcup_1^n \bar A_i',\ \bar A' | \bar A''\right) = \mathcal{S}_n^{[\phi]}\left(= \bigcup_1^n \bar A_i',\ \bar A'\right) \cap \mathcal{M}_{\bar r}^{n}(\bar A'')$ – условное сет-разбиение, где $\mathcal{M}_{\bar r}^{n}(\bar A'') = \{\bar E \in \mathcal{M}^n:\ a_{\bar r}(\bar E) = \bar A''\} \subseteq \mathcal{M}^n$ – условная сет-совокупность из $\mathcal{M}^n$. Указанные условные области сет-суммирования определяются основным сет-вектором $\bar A' \in \mathcal{M}^n$, ограничивающим сет-вектором $\bar A'' \in \mathcal{M}^k$ и сет-условием $a_{\bar r}(\bar E) = \bar A''$, где $a_{\bar r}: \mathcal{M}^n \hookrightarrow\!\!\!\rightarrow \mathcal{M}^m$ – ограничивающая сет-операция.

Под случайным конечным множеством $K = (\mathcal{M}, 2^{\mathcal{M}}, \mathbf{P})$ в настоящей работе понимается измеримое отображение некоторого вероятностного пространства в измеримое пространство $(\mathcal{M}, 2^{\mathcal{M}})$ с "вычислимой" вероятностью $\mathbf{P}$ на $2^{\mathcal{M}}$, определяемой $\forall\ \mathcal{B} \in 2^{\mathcal{M}}$ посредством сет-сумм:

$$\mathbf{P}(\mathcal{B}) = \sum_{E \in \mathcal{B}} \Phi(E) \left(\sum_{E \in \mathcal{M}} \Phi(E)\right)^{-1},$$

где Φ – некоторая ограниченная неотрицательная функция на $\mathcal{M}$.

Допустим, на $\mathcal{M}^n$ имеется совместное распределение φ случайных конечных множеств $K_1, \ldots, K_n \in \mathcal{M}$, которые образуют случайный конечный сет-вектор $\bar K = (K_1, \ldots, K_n) \in \mathcal{M}^n$. Таким образом, $\forall \bar E \in \mathcal{M}^n$ $\mathbf{P}(\bar K = \bar E) = \mathbf{P}(K_1 = E_1, \ldots$ $\ldots, K_n = E_n) = \varphi(\bar E)$, причем

$$\sum_{\bar E \in \mathcal{M}^n} \varphi(\bar E) = 1.$$

Основная сет-сумма, которая исчисляется в теории сет-суммирования, позволяет немедленно не только сконструировать целый класс совместных распределений случайных конечных множеств:

$$\mathbf{P}(\overline{K}=\overline{E})=\frac{\overline{\mu}(a_{\overline{f}}(\overline{E}))\overline{\nu}(a_{\overline{e}}(\overline{E}))}{\sum\limits_{\overline{E}\in\mathcal{P}(\overline{A}')}\overline{\mu}(a_{\overline{f}}(\overline{E})\overline{\nu}(a_{\overline{e}}(\overline{E}))},$$

которые будем называть с е т - р а с п р е д е л е н и я м и, но – исчислять $\forall\overline{A}$, $\overline{B}\in\mathcal{M}^n$ вероятность наиболее употребительных событий: $\mathbf{P}(\overline{A}\subseteq\overline{K}\subseteq\overline{B})$, в том числе вероятность совместного ($n>1$) покрытия синглетонного сет-вектора: $\mathbf{P}(\{\overline{x}\}\subseteq\overline{K})$ (где $\{\overline{x}\}=(\{x_1\},\ldots,\{x_n\})\in\mathcal{M}^n$ – сет-вектор, составленный из синглетонов) и вероятность обычного ($n=1$) покрытия точки $x\in\mathcal{X}$: $\mathbf{P}(x\in K)$. Еще раз подчеркнем, что для исчисления каждой из указанных вероятностей требуется только основная сет-сумма [5–10].

З а м е ч а н и е 1. Если поставить задачу исчисления для любого сет-вектора $\overline{A}''\subseteq\bigcup\limits_1^n A_i'$ вероятности $\mathbf{P}(a_{\overline{r}}(\overline{K})=\overline{A}'')$, то по всем правилам вероятностного искусства:

$$\mathbf{P}(a_{\overline{r}}(\overline{K})=\overline{A}'')=\sum_{\overline{E}\in\mathcal{P}(\overline{A}'|\overline{A}'')}\mathbf{P}(\overline{K}=\overline{E})=$$

$$=\left(\sum_{\overline{E}\in\mathcal{P}(\overline{A}')}\overline{\mu}(a_{\overline{f}}(\overline{E}))\overline{\nu}(a_{\overline{e}}(\overline{E}))\right)^{-1}\sum_{\overline{E}\in\mathcal{P}(\overline{A}'|\overline{A}'')}\overline{\mu}(a_{\overline{f}}(\overline{E}))\overline{\nu}(a_{\overline{e}}(\overline{E})),$$

где сет-сумма в знаменателе вероятности исчисляется по основной теореме сет-суммирования, а условная сет-сумма может быть исчислена по теореме об исчислении условной основной сет-суммы, которая будет сформулирована ниже.

З а м е ч а н и е 2. Отметим еще, что класс условных сет-совокупностей, определяемых сет-условием $a_{\overline{r}}(\overline{E})=\overline{A}''$, настолько богат, что включает практически все мыслимые сет-совокупности. Действительно, в этот класс входят сет-совокупности, позволяющие исчислять вероятность диагонали:

$$\mathbf{P}(K_1=\ldots=K_n=A)\quad(k=2,\ r_1=\&_n^{(1)},\ r_2=\&_n^{(n)},\ A_1''=A,\ A_2''=A);$$

вероятность разбиения:

$$\mathbf{P}\left(\sum_1^n K_i=A\right)\quad(k=2,\ r_1=\&_n^{[1]},\ r_2=\&_n^{(2)},\ A_1''=A,\ A_2''=\phi);$$

вероятность пирамиды сет-покрытия:

$$\mathbf{P}((\mathrm{cover}_1(\overline{K}),\ldots,\mathrm{cover}_n(\overline{K}))=\overline{A}'')$$

$$(k=n,\ r_1=\&_n^{(1)},\ldots,r_n=\&_n^{(n)},\ A_1''\supseteq\ldots\supseteq A_n'');$$

маргинальные сет-распределения:

$$\mathbf{P}(K_i=A),\quad i=1,\ldots,n\quad(k=1,\ r_1=\&_n^i,\ A_1''=A);$$

совместное сет-распределение:

$$\mathbf{P}(\overline{K}=\overline{A}'')\quad(k=n,\ r_1=\&_n^1,\ldots,r_n=\&_n^n),$$

а также произвольный класс условных сет-распределений, определяемых данным сет-условием.

Обозначим:

$$u_{\alpha\rho}^{\gamma}=|g_\alpha\cap r_\rho\cap \mathfrak{E}_n^{\leqslant\gamma}|,\quad \gamma\rho\in\overline{\mathfrak{E}}_{n+k}=\overline{\mathfrak{E}}_n\times\overline{\mathfrak{E}}_k,$$

$$u_{\alpha\rho}^{\gamma,0,1}=|g_\alpha\cap r_\rho\cap \mathfrak{E}_n^{\leqslant\gamma}\cap(\mathfrak{E}_n^{[0]}+\mathfrak{E}_n^{[1]})|,\quad \gamma\rho\in\overline{\mathfrak{E}}_{n+k}=\overline{\mathfrak{E}}_n\times\overline{\mathfrak{E}}_k,$$

$$u_{\alpha\rho}^{\gamma,1}=|g_\alpha\cap r_\rho\cap \mathfrak{E}_n^{\leqslant\gamma}\cap \mathfrak{E}_n^{[1]}|,\quad \gamma\rho\in\mathfrak{E}_n^{>\overline{0}}\times\overline{\mathfrak{E}}_k,$$

– мощности подмножеств вершин единичного гиперкуба размерности $n>0$ для $\alpha\in\mathfrak{E}_{l+m}^{>\overline{0}}$.

Введем также обозначения для некоторых мер и мульт-мер на $\mathcal{M}$ с целью сокращения записей при выводе окончательных формул исчисления условной основной сет-суммы. Итак $\nu_1,\ldots,\nu_m$ – мульт-меры, а $\mu_1,\ldots,\mu_l$ – меры на $\mathcal{M}$. Обозначим:

$$\nu_\gamma^\rho=\left[\sum_{\alpha\in\overline{\mathfrak{E}}_{l+m}} u_{\alpha\rho}^{\gamma}\prod_{j=1}^{m}\nu_j^{\alpha_{j+l}}\right]_\Pi,\quad \gamma\rho\in\overline{\mathfrak{E}}_n\times\overline{\mathfrak{E}}_k,$$

$$\nu_{\gamma,0,1}^\rho=\left[\sum_{\alpha\in\overline{\mathfrak{E}}_{l+m}} u_{\alpha\rho}^{\gamma,0,1}\prod_{j=1}^{m}\nu_j^{\alpha_{j+l}}\right]_\Pi,\quad \gamma\rho\in\overline{\mathfrak{E}}_n\times\overline{\mathfrak{E}}_k,$$

$$\nu_{\gamma,1}^\rho=\left[\sum_{\alpha\in\overline{\mathfrak{E}}_{l+m}} u_{\alpha\rho}^{\gamma,1}\prod_{j=1}^{m}\nu_j^{\alpha_{j+l}}\right]_\Pi,\quad \gamma\rho\in\mathfrak{E}_n^{>\overline{0}}\times\overline{\mathfrak{E}}_k,$$

– мульт-меры на $\mathcal{M}$ и, используя эти сокращенные обозначения, обозначим еще

$$\mu_\gamma^\rho=\left[\sum_{\alpha\in\overline{\mathfrak{E}}_{l+m}^{>\overline{0}}} u_{\alpha\rho}^{\gamma}(\nu_\gamma^\rho)^{-1}\prod_{j=1}^{m}\nu_j^{\alpha_{j+i}}\prod_{i=1}^{l}\alpha_i\mu_i\right]_\Sigma,$$

$$\mu_{\gamma,0,1}^\rho=\left[\sum_{\alpha\in\overline{\mathfrak{E}}_{l+m}^{>\overline{0}}} u_{\alpha\rho}^{\gamma,0,1}(\nu_{\gamma,0,1}^\rho)^{-1}\prod_{j=1}^{m}\nu_j^{\alpha_{j+l}}\sum_{i=1}^{l}\alpha_i\mu_i\right]_\Sigma,$$

$$\mu_{\gamma,1}^\rho=\left[\sum_{\alpha\in\overline{\mathfrak{E}}_{l+m}^{>\overline{0}}} u_{\alpha\rho}^{\gamma,1}(\nu_{\gamma,1}^\rho)^{-1}\prod_{j=1}^{m}\nu_j^{\alpha_{j+l}}\sum_{i=1}^{l}\alpha_i\mu_i\right]_\Sigma,$$

меры на $\mathcal{M}$, где для первых двух мер $\gamma\rho\in\overline{\mathfrak{E}}_n\times\overline{\mathfrak{E}}_k$, а для последней $\gamma\rho\in\mathfrak{E}_n^{>\overline{0}}\times\overline{\mathfrak{E}}_k$.

Т е о р е м а (об исчислении условной основной сет-суммы). *Пусть $\overline{A}'\in\mathcal{M}^n$– основной сет-вектор, $\overline{A}''\in\mathcal{M}^k$ – ограничивающий сет-вектор, $\overline{r}\in\{2^{\overline{\mathfrak{E}}_n}\}^k$ – ограничивающий "вершинный" сет-вектор из основного сет-условия, соответствующий монотонной ограничивающей сет-операции: $a_{\overline{r}}(\overline{E})=\overline{A}''$, определяющей условную основную сет-область суммирования одного из трех видов: $\mathfrak{S}_n^{\overline{r}}(\overline{A}'\,|\,\overline{A}'')$ – условный сет-отрезок, $\mathfrak{S}_n^{\overline{r}[\phi]}(\overline{A}'\,|\,\overline{A}'')$ – условный ϕ-сет-отрезок, $\mathfrak{S}_n^{\overline{r}[\phi]}$ $\left(=\bigcup_1^n\overline{A}_i',\ \overline{A}'\,|\,\overline{A}''\right)$ – условное сет-разбиение. Пусть $\gamma\rho=(\gamma,\rho)\in\overline{\mathfrak{E}}_n\times\overline{\mathfrak{E}}_k$, $\epsilon\pi=(\epsilon,\pi)\in\overline{\mathfrak{E}}_n\times\overline{\mathfrak{E}}_k$ – вершины единичного гиперкуба размерности $n+k$, составленные из вершин $\gamma,\epsilon\in\overline{\mathfrak{E}}_n$, $\rho,\pi\in\overline{\mathfrak{E}}_k$.*

Тогда справедливы следующие формулы сет-суммирования по условному сет-отрезку:

$$\sum_{\overline{E}\in\mathfrak{S}_n^{\overline{r}}(\overline{A}'\,|\,\overline{A}'')}\overline{\mu}(a_{\overline{f}}(\overline{E}))\overline{\nu}(a_{\overline{e}}(\overline{E}))=\prod_{\gamma\rho\in\overline{\mathfrak{E}}_n\times\overline{\mathfrak{E}}_k}\nu_\gamma^\rho(A_\gamma'\cap A_\rho'')\sum_{\epsilon\pi\in\overline{\mathfrak{E}}_n\times\overline{\mathfrak{E}}_k}\mu_\epsilon^\pi(A_\epsilon'\cap A_\pi''),$$

по условному ϕ-сет-отрезку:

$$\sum_{\overline{E}\in \mathfrak{S}_n^{\overline{r}[\phi]}(\overline{A}'|\overline{A}'')} \overline{\mu}(a_{\overline{f}}(\overline{E}))\overline{\nu}(a_{\overline{e}}(\overline{E})) =$$

$$= \prod_{\gamma\rho\in\overline{\mathfrak{E}}_n\times\overline{\mathfrak{E}}_k} \nu^{\rho}_{\gamma,0,1}(A'_\gamma \cap A''_\rho) \sum_{\epsilon\pi\in\overline{\mathfrak{E}}_n\times\overline{\mathfrak{E}}_k} \mu^{\pi}_{\epsilon,0,1}(A'_\epsilon \cap A''_\pi),$$

по условному сет-разбиению:

$$\sum_{\overline{E}\in \mathfrak{S}_n^{\overline{r}[\phi]}(=\bigcup_1^n A'_i,\overline{A}'|\overline{A}'')} \overline{\mu}(a_{\overline{f}}(\overline{E}))\overline{\nu}(a_{\overline{e}}(\overline{E})) =$$

$$= \prod_{\gamma\rho\in\overline{\mathfrak{E}}_n^{>0}\times\overline{\mathfrak{E}}_k} \nu^{\rho}_{\gamma,1}(A'_\gamma \cap A''_\rho) \sum_{\epsilon\pi\in\overline{\mathfrak{E}}_n^{>0}\times\overline{\mathfrak{E}}_k} \mu^{\pi}_{\epsilon,1}(A'_\epsilon \cap A''_\pi).$$

Следствие 1 (о сет-распределениях). *Пусть сет-операции под знаком сет-сумм и ограничивающая сет-операция монотонны. Тогда $\forall \overline{A}'' \subseteq \bigcup_1^n \overline{A}'_i$ справедливы следующие формулы исчисления вероятностей для сет-распределения на сет-отрезке* $\mathfrak{S}_n^{\overline{r}}(\overline{A}')$:

$$\mathbf{P}(a_{\overline{r}}(\overline{K})=\overline{A}'') = \frac{\prod_{\gamma\rho\in\overline{\mathfrak{E}}_n\times\overline{\mathfrak{E}}_k} \nu^{\rho}_{\gamma}(A'_\gamma \cap A''_\rho) \sum_{\epsilon\pi\in\overline{\mathfrak{E}}_n\times\overline{\mathfrak{E}}_k} \mu^{\pi}_{\epsilon}(A'_\epsilon \cap A''_\pi)}{\prod_{\gamma\in\overline{\mathfrak{E}}_n} \nu^{\overline{e}}_{\gamma}(A'_\gamma) \sum_{\epsilon\in\overline{\mathfrak{E}}_n} \mu^{\overline{e},\overline{f}}_{\epsilon}(A'_\epsilon)},$$

для сет-распределения на ϕ-сет-отрезке $\mathfrak{S}_n^{\overline{r}[\phi]}(\overline{A}')$:

$$\mathbf{P}(a_{\overline{r}}(\overline{K})=\overline{A}'') = \frac{\prod_{\gamma\rho\in\overline{\mathfrak{E}}_n\times\overline{\mathfrak{E}}_k} \nu^{\rho}_{\gamma,0,1}(A'_\gamma \cap A''_\rho) \sum_{\epsilon\pi\in\overline{\mathfrak{E}}_n\times\overline{\mathfrak{E}}_k} \mu^{\pi}_{\epsilon,0,1}(A'_\epsilon \cap A''_\pi)}{\prod_{\gamma\in\overline{\mathfrak{E}}_n} \nu^{\overline{e}}_{\gamma,0,1}(A'_\gamma) \sum_{\epsilon\in\overline{\mathfrak{E}}_n} \mu^{\overline{e},\overline{f}}_{\epsilon,0,1}(A'_\epsilon)},$$

для сет-распределения на сет-разбиении $\mathfrak{S}_n^{\overline{r}[\phi]}\left(=\bigcup_1^n A'_i,\ \overline{A}'\right)$:

$$\mathbf{P}(a_{\overline{r}}(\overline{K})=\overline{A}'') = \frac{\prod_{\gamma\rho\in\overline{\mathfrak{E}}_n^{>0}\times\overline{\mathfrak{E}}_k} \nu^{\rho}_{\gamma,1}(A'_\gamma \cap A''_\rho) \sum_{\epsilon\pi\in\overline{\mathfrak{E}}_n^{>0}\times\overline{\mathfrak{E}}_k} \mu^{\pi}_{\epsilon,1}(A'_\epsilon \cap A''_\pi)}{\prod_{\gamma\in\overline{\mathfrak{E}}_n} \nu^{\overline{e}}_{\gamma,1}(A'_\gamma) \sum_{\epsilon\in\overline{\mathfrak{E}}_n} \mu^{\overline{e},\overline{f}}_{\epsilon,1}(A'_\epsilon)}.$$

Следствие 2 (о частных сет-распределениях). *Пусть в условиях теоремы $l = 1$, $m = 0$, $k = 1$ (т.е. функция под знаком сет-суммы равна $\mu(a_f(\overline{E}))$, а ограничивающая сет-операция определяет основное сет-условие, которое имеет вид $a_r(\overline{E}) = A'' \in \mathcal{M}$), сет-операции a_f, a_r монотонны (т.е. $\overline{0} \notin f$, $\overline{0} \notin r$), $\overline{A}' = (A', \ldots, A') \in \mathcal{M}^n$ – диагональный сет-вектор.*

Тогда $\forall A'' \subseteq A'$ справедливы следующие формулы исчисления вероятностей для сет-распределения на сет-отрезке $\mathfrak{S}_n^{\overline{r}}(\overline{A}')$:

$$\mathbf{P}(a_f(\overline{K})=A'') = 2^{-n(|A'|-1)}|r^C|^{|A'-A''|}|r|^{|A''|} \times$$

$$\times \left(\frac{|f\cap r^C|}{|f|\cdot|r^C|}\,\frac{\mu(A'-A'')}{\mu(A')} + \frac{|f\cap r|}{|f|\cdot|r|}\,\frac{\mu(A'')}{\mu(A')}\right),$$

для сет-распределения на ϕ-сет-отрезке $\mathcal{S}_n^{\bar{r}[\phi]}(\bar{A}')$:

$$P(a_f(\bar{K}) = A'') =$$
$$= (n+1)^{-(|A'|-1)}(|r^C \cap \mathcal{E}_n^{[1]}|+1)^{|A'-A''|}|r \cap \mathcal{E}_n^{[1]}|^{|A''|} \times$$
$$\times \left(\frac{|f \cap r^C \cap \mathcal{E}_n^{[1]}}{|f \cap \mathcal{E}_n^{[1]}|(|r^C \cap \mathcal{E}_n^{[1]}|+1)} \frac{\mu(A'-A'')}{\mu(A')} + \right.$$
$$\left. + \frac{|f \cap r^C \cap \mathcal{E}_n^{[1]}|}{|f \cap \mathcal{E}_n^{[1]}| \cdot |r \cap \mathcal{E}_n^{[1]}|} \frac{\mu(A'')}{\mu(A')} \right).$$

для сет-распределения на сет-разбиении $\mathcal{S}_n^{\bar{r}[\phi]} \left(= \bigcup_1^n A_i', \bar{A}' \right)$:

$$P(a_f(\bar{K}) = A'') = n^{-(|A'|-1)}|r^C \cap \mathcal{E}_n^{[1]}|^{|A'-A''|}|r \cap \mathcal{E}_n^{[1]}|^{|A''|} \times$$
$$\times \left(\frac{|f \cap r^C \cap \mathcal{E}_n^{[1]}|}{|f \cap \mathcal{E}_n^{[1]}| \cdot |r^C \cap \mathcal{E}_n^{[1]}|} \frac{\mu(A'-A'')}{\mu(A')} + \right.$$
$$\left. + \frac{|f \cap r \cap \mathcal{E}_n^{[1]}|}{|f \cap \mathcal{E}_n^{[1]}| \cdot |r \cap \mathcal{E}_n^{[1]}|} \frac{\mu(A'')}{\mu(A')} \right).$$

Вычислительный центр
Сибирского отделения Российской Академии наук
Красноярск

Поступило
12 V 1992

ЛИТЕРАТУРА

1. *Воробьев О.Ю.* Среднемерное моделирование. М.: Наука, 1984. 133 с. 2. *Воробьев О.Ю.* О понятиях средней формы случайных множеств. М.: ВИНИТИ, 1985. Деп. № 5258–85. 13 с. 3. *Vorob'ev O.Yu.* In: Proc. II Intern. Symp. System analysis and simulation. B., 1985, p. 369–372. 4. *Vorob'ev O.Yu.* In: Proc. I. World Cong. Bernoulli Soc. Tashkent, 1986, p. 359. 5. *Воробьев О.Ю.* Методы суммирования функций конечного множества. М.: ВИНИТИ, 1990. Деп. № 2452–В90. 164 с. 6. *Воробьев О.Ю.* Введение в сет-суммирование. М.: ВИНИТИ, 1991. Деп. № 1920–В91. 24 с. 7. *Воробьев О.Ю.* Меро-мульт-меровые случайные конечные множества. М.: ВИНИТИ, 1991. Деп. № 1911–В91. 25 с. 8. *Воробьев О.Ю.* – ДАН, 1991, т. 318, № 4, с. 785–788. 9. *Vorob'ev O.Yu.* – Adv. model and anal., A.,1992, vol. 12, № 1, p. 1–46.