Алгебра и логика, 50, № 4 (2011), 504—520

УДК 510.53+512.562

СИЛЬНО η-ПРЕДСТАВИМЫЕ СТЕПЕНИ И ПРЕДЕЛЬНО МОНОТОННЫЕ ФУНКЦИИ[*)]

М. В. ЗУБКОВ

§ 1. Предварительные сведения

Данная работа находится на стыке теории вычислимости и теории линейных порядков. В определениях и обозначениях теории вычислимости будем придерживаться книги [1]. Множество натуральных чисел $\{0, 1, 2, \ldots\}$ обозначается как ω. Теоретико-множественная разность множеств $X \subseteq \omega$ и $Y \subseteq \omega$ обозначается через $X - Y$; дополнение $\omega - X$ множества $X \subseteq \omega$ — через $\overline{X}$. Если f — некоторая функция, то $\mathrm{rang}(f) = \{y \mid (\exists x)[f(x) = y]\}$ — область её значений. Пусть $f : A \times \omega \longrightarrow \omega$, тогда $\lim\limits_{s\to\infty} f(x, s)$ определён и конечен, если существует такое число a_x, что $(\exists s_0)(\forall s > s_0)[f(x, s) = a_x]$. Запись $x \dot{-} y$ обозначает *ограниченную разность*, а именно, $x \dot{-} y = x - y$, если $x \geqslant y$, и $x \dot{-} y = 0$ в противном случае. Зафиксируем произвольную вычислимую биективную функцию $N : \omega \longrightarrow \mathbb{Q}$ и введём обозначение $q_i = N(i)$ для любого $i \in \omega$.

Линейный порядок $\mathcal{L} = \langle L, <_{\mathcal{L}}\rangle$ называется *вычислимым*, если основное множество L и отношение порядка $<_{\mathcal{L}}$ являются вычислимыми. Символ $<$ обозначает стандартное отношение порядка на ω. Порядковый

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 09-01-97010, АВЦП „Развитие научного потенциала высшей школы' проект № 2.1.1/5367 и ФЦП „Научные и научно-педагогические кадры инновационной России' госконтракт Рособразования ГК № П 269.

тип плотного линейного порядка без наибольшего и наименьшего элементов обозначается через η. Множество рациональных чисел обозначается как $\mathbb{Q}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть $\{a_0, a_1, a_2 \dots\}$ — перечисление, возможно с повторениями, множества $A \subseteq \omega$. Тогда порядок $\mathcal{L}$ типа

$$\eta + a_0 + \eta + a_1 + \eta + a_2 + \eta + \dots$$

называется *η-представлением* множества A. Если $a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \dots$, то $\mathcal{L}$ называется *η-представлением по неубыванию.* Если же $a_0 < a_1 < a_2 \dots$, то L называется *сильным η-представлением.*

Множество A называется *η-представимым* (*η-представимым по неубыванию*, *сильно η-представимым*), если существует вычислимое η-представление (η-представление по неубыванию, сильное η-представление соответственно) множества A.

Тьюринговая степень называется *η-представимой* (*η-представимой по неубыванию*, *сильно η-представимой*), если она содержит η-представимое (η-представимое по неубыванию, сильно η-представимое соответственно) множество.

Нетрудно доказать, что η-представимые множества (т. е. множества, имеющие вычислимые η-представления) принадлежат классу Σ^0_3, [2, теор. 2.5]. В [3, 4] соответственно показано, что каждое Σ^0_2- или Π^0_2-множество является сильно η-представимым. С другой стороны, в [5] построено Δ^0_3-множество, не имеющее вычислимого η-представления. Там же дано полное описание η-представимых степеней. А именно, доказано, что каждая Σ^0_3-степень η-представима. В [3] показано, что любое сильно η-представимое множество лежит в классе Δ^0_3, фактически, каждое η-представимое по неубыванию множество лежит в классе Δ^0_3.

В связи с этими результатами в [6] поставлен вопрос об описании сильно η-представимых степеней, и, в частности, о том, верно ли, что каждая Δ^0_3-степень содержит сильно η-представимые множества. В [7] построена тьюрингова Δ^0_3-степень, которая не содержит сильно η-представимых множеств, что дало отрицательный ответ на второй вопрос. Кроме того, там показано, что каждое η-представимое множество является множеством значений некоторой $\mathbf{0}'$-предельно монотонной функции, и, следовательно, тьюрингова степень η-представима тогда и только тогда, когда она содержит множество значений такой функции. Кроме того, там построен пример сильно η-представимого множества, которое не является областью значений ни для одной $\mathbf{0}'$-предельно монотонной функции, возрастающей на ω.

В данной работе доказывается, что каждая сильно η-представимая степень содержит множество, являющееся областью значений некоторой $\mathbf{0}'$-предельно монотонной псевдовозрастающей на $\mathbb{Q}$ функции. Тем самым получается описание сильно η-представимых степеней в терминах $\mathbf{0}'$-предельно монотонных функции.

§ 2. Сильно η-представимые степени и предельно монотонные функции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Функция F называется X-*предельно монотонной*, если существует X-вычислимая функция $f(x,s)$, такая что

1) $(\forall x)(\forall s)[f(x,s) \leqslant f(x,s+1)]$;

2) $(\forall x)[F(x) = \lim\limits_{s\to\infty} f(x,s)]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Пусть F функция, действующая в ω. Тогда множество $\operatorname{supp}(F) = \{x \in \operatorname{dom}(F) \mid F(x) > 1\}$ называется *носителем* функции F.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Пусть $\mathcal{L} = \langle L, <_{\mathcal{L}}\rangle$ — линейный порядок и $F : L \longrightarrow \omega$ — функция, такая что для любого $n > 1$ множество $F^{-1}(n) = \{y \mid F(y) = n\}$ конечно. Тогда функция F называется

1) *возрастающей* на $\mathcal{L}$, если $(\forall x, y \in L)[x <_{\mathcal{L}} y \Rightarrow F(x) < F(y)]$;

2) *неубывающей* на $\mathcal{L}$, если $(\forall x, y \in L)[x <_L y \Rightarrow F(x) \leqslant F(y)]$;

3) *псевдовозрастающей* на $\mathcal{L}$, если $(\forall x, y \in \operatorname{supp}(F))[x <_{\mathcal{L}} y \Rightarrow F(x) < F(y)]$;

4) *псевдонеубывающей* на $\mathcal{L}$, если $(\forall x, y \in \operatorname{supp}(F))[x <_{\mathcal{L}} y \Rightarrow F(x) \leqslant F(y)]$.

Пусть F, $G : \mathbb{Q} \longrightarrow \omega$ некоторые функции. Положим

$$(F \dotplus G)(p) = \begin{cases} F(p) + G(p), & \text{если } p \in \operatorname{supp}(F) \cap \operatorname{supp}(G), \\ \max\{F(p), G(p)\} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Аналогичным образом можно определить данную операцию для функций нескольких аргументов.

Следующие два предложения получаются непосредственной проверкой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. *Пусть F, $G : \mathbb{Q} \longrightarrow \omega$ — X-предельно монотонные функции, $w : \omega \longrightarrow \omega$ — неубывающая X-вычислимая функция, c — константа. Тогда X-предельно монотонны также и следующие функции:*

1) $F \dotplus G$,

2) $F + G$,

3) $F \cdot G$,

4) $w(F)$,

5) $F \dot{-} c$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. *Пусть F и G — псевдонеубывающая и псевдовозрастающая на $\mathbb{Q}$ функции, соответственно. Пусть функция $w : \omega \longrightarrow \omega$ возрастающая и $w(1) = 1$, c — константа, причём* $\operatorname{supp}(F) = \operatorname{supp}(G)$. *Тогда псевдовозрастающими на $\mathbb{Q}$ являются и следующие функции:*

1) $F \dotplus G$,

2) $F \cdot G$,

3) $w(G)$,

4) $G \dot{-} c$.

Кроме того, $\operatorname{supp}(G \dot{-} c) \subset \operatorname{supp}(F) = \operatorname{supp}(F \dotplus G) = \operatorname{supp}(F \cdot G) = \operatorname{supp}(w(G))$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение предложения 2.5 не выполняется для суммы двух псевдовозрастающих на $\mathbb{Q}$ функций. В самом деле, пусть F и G — псевдовозрастающие функции, такие что $F(x) = 1$ и $G(x) = 1$ для любого $x \in \mathbb{Q} - (\mathrm{supp}(F) \cup \mathrm{supp}(G))$. Тогда для всех таких x справедливо $F(x) + G(x) = 2$ и, следовательно, не выполняется условие о конечности множества $F^{-1}(2) = \{y \mid F(y) = 2\}$.

Пусть F — некоторая X-предельно монотонная, псевдонеубывающая на $\mathbb{Q}$ функция. Тогда конечно множество $\{q \leq_{\mathbb{Q}} p \mid q \in \mathrm{supp}(F)\}$, и корректно определена функция

$$S_F(p) = \begin{cases} |\{q \leq_{\mathbb{Q}} p \mid q \in \mathrm{supp}(F)\}| + 1, & \text{если } p \in \mathrm{supp}(F), \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Легко понять, что $\mathrm{supp}(S_F) = \mathrm{supp}(F)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. *Пусть F — некоторая X-предельно монотонная, псевдонеубывающая на $\mathbb{Q}$ функция. Тогда функция S_F является X-предельно монотонной псевдовозрастающей на $\mathbb{Q}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p, r \in \mathbb{Q}$ и $p <_{\mathbb{Q}} r$. Очевидно, что $S_F(p) \leqslant |\{q \leq_{\mathbb{Q}} p \mid q \in \mathrm{supp}(F)\}| + 1 < |\{q \leq_{\mathbb{Q}} r \mid q \in \mathrm{supp}(F)\}| + 1 = S_F(r)$ и, следовательно, S_F — псевдовозрастающая на $\mathbb{Q}$ функция.

Так как F — X-предельно монотонная функция, то существует X-вычислимая функция $f : \mathbb{Q} \times \omega \longrightarrow \omega$, такая что $F(q) = \lim\limits_{s\to\infty} f(q, s)$ и $f(q, s) \leqslant f(q, s+1)$ для любых $q \in \mathbb{Q}$ и $s \in \omega$. Напомним, что q_i обозначает i-й элемент в некоторой вычислимой биективной нумерации $\mathbb{Q}$. Определим X-вычислимую функцию

$$s_F(p, s) = \begin{cases} |\{q_i \leq_{\mathbb{Q}} p \mid i \leqslant s \,\&\, q_i \in \mathrm{supp}(f(\cdot, s))\}| + 1, & \text{если } p \in \mathrm{supp}(F), \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, что функция s_F удовлетворяет условиям определения X-предельно монотонных функций. $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. *Пусть A — сильно η-представимое множество. Тогда существует $\mathbf{0}'$-предельно монотонная псевдонеубывающая на $\mathbb{Q}$ функция F, такая что*

1) $\mathrm{rang}(F) - \{0, 1\} = A - \{0, 1\}$;

2) $|F^{-1}(n)| = n$ *для всех* $n \in \mathrm{rang}(F) - \{0, 1\}$;

3) $0 \notin \mathrm{rang}(F)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{L}$ — вычислимое сильное η-представление множества A. Так как $\mathcal{L}$ — вычислимый линейный порядок без наибольшего элемента, существует вычислимое вложение линейных порядков $\varphi : L \longrightarrow \mathbb{Q}$, такое что $(\forall q \in \mathbb{Q})(\exists l \in L)[q \leq_{\mathbb{Q}} \varphi(l)]$. Таким образом, $\varphi(L) \leq_T \mathbf{0}'$. Пусть $S_{\mathcal{L}}(x, y)$ — отношение соседства в порядке $\mathcal{L}$, а именно, $S_{\mathcal{L}}(x, y) \Leftrightarrow (x \neq y) \,\&\, \neg(\exists z)[x <_{\mathcal{L}} z <_{\mathcal{L}} y \vee y <_{\mathcal{L}} z <_{\mathcal{L}} x]$. Поскольку $\mathcal{L}$ — вычислимый порядок, то $S_{\mathcal{L}} \leqslant \mathbf{0}'$. Кроме того, существует равномерно вычислимая последовательность конечных множеств $L_0 \subset L_1 \subset \ldots$, такая что $\bigcup\limits_{s \in \omega} L_s = L$. Для построения требуемой функции F зададим её $\mathbf{0}'$-вычислимую аппроксимацию $f : \mathbb{Q} \times \omega \longrightarrow \omega$, удовлетворяющую условиям $(\forall x)(\forall s)[f(x, s) \leqslant f(x, s+1)]$ и $(\forall x)[F(x) = \lim\limits_{s \to \infty} f(x, s)]$.

Для всех $q \in \mathbb{Q} - \varphi(L)$ и $s \in \omega$ полагаем $f(q, s) = 1$. Пусть $q = \varphi(l)$ для некоторого $l \in L$. Положим $f(\varphi(l), s)$ равным количеству элементов из множества L_s, содержащихся в одном блоке с элементом l, а именно, $f(q, s) = 1$ если $\neg(\exists r \in L_s)[S_{\mathcal{L}}(l, r)] \& \neg(\exists r \in L_s)[S_{\mathcal{L}}(r, l)]$, и $f(q, s) = |\{m \in L \mid (\exists k \in \omega)(\exists l_0 \in L_s)(\exists l_1 \in L_s) \ldots (\exists l_{k+1} \in L_s)[(l_0 = l \,\&\, l_{k+1} = m) \,\&\, (S_{\mathcal{L}}(l_0, l_1) \,\&\, \ldots \,\&\, S_{\mathcal{L}}(l_k, l_{k+1}))]\}|$ в противном случае. Так как $L_s \subset L_{s+1}$, нетрудно заметить, что $f(q, s) \leqslant f(q, s+1)$. Кроме того, поскольку $\bigcup\limits_{s \in \omega} L_s = L$, для всякого $q \in \mathbb{Q}$, такого что найдётся $l \in L$ с условием $q = \varphi(l)$, предел $\lim\limits_{s \to \infty} f(q, s)$ существует, конечен и равен количеству элементов в блоке порядка $\mathcal{L}$, максимальном по включению и содержащем элемент l. Очевидно: если такого l для q нет, то $\lim\limits_{s \to \infty} f(q, s) = 1$. Учитывая расположение максимальных блоков в порядке $\mathcal{L}$ и количество элементов в них, получаем требуемое. $\square$

ТЕОРЕМА 2.8. *Если A — сильно η-представимое множество, то существует $\mathbf{0}'$-предельно монотонная псевдовозрастающая на $\mathbb{Q}$ функция H, такая что* $\mathrm{rang}(H) \equiv_T A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 2.7 существует $\mathbf{0}'$-предельно монотонная, псевдонеубывающая функция F, такая что $\mathrm{rang}(F) - \{0, 1\} = A - \{0, 1\}$ и $|F^{-1}(n)| = n$ для всех $n \in \mathrm{rang}(F) - \{0, 1\}$. По предложению 2.6 функция S_F X-предельно монотонная, псевдовозрастающая на $\mathbb{Q}$. Применяя соответствующие пп. предложения 2.4 получаем, что функции $S_F(q) \dot{-} 1$, $F(q) \dot{-} 1$, $5^{F(q) \dot{-} 1}$ $\mathbf{0}'$-предельно монотонны, следовательно, функция $H(q) = 3^{S_F(q) \dot{-} 1} \cdot 5^{F(q) \dot{-} 1}$ также $\mathbf{0}'$-предельно монотонна. Пусть $w_a(0) = 0$ и $w_a(t) = a^{t \dot{-} 1}$ при $t \geqslant 1$. Очевидно, что для любого $a > 1$ функция w_a возрастает на ω и $w_a(1) = 1$. По предложению 2.6, $\mathrm{supp}(S_F) = \mathrm{supp}(F)$. По предложению 2.5, $\mathrm{supp}(w_3(S_F)) = \mathrm{supp}(w_5(F))$, а функции $w_3(S_F)$ и $w_5(F)$ являются псевдовозрастающей и псевдонеубывающей на $\mathbb{Q}$ соответственно. Снова применяя предложение 2.5, получаем, что функция $H(q) = w_3(S_F(q)) \cdot w_5(F(q))$ (равенство выполнятся, поскольку $S_F(q) > 0$ и $F(q) > 0$ для любых q) является псевдовозрастающей на $\mathbb{Q}$.

Осталось показать, что $\mathrm{rang}(H) \equiv_T A$. Так как $A - \{0, 1\} = \mathrm{rang}(F) - \{0, 1\}$, будем доказывать, что $\mathrm{rang}(H) \equiv_T \mathrm{rang}(F)$. Отметим, что $0 \notin \mathrm{rang}(F)$, $1 \in \mathrm{rang}(F)$, и если $\mathrm{rang}(F)$ бесконечен, то $\mathrm{rang}(H)$ также бесконечен. Чтобы определить, принадлежит ли $x > 1$ множеству $\mathrm{rang}(F)$, находим наименьший элемент $h_0 \in \mathrm{rang}(H)$, такой что $h_0 = 3^a \cdot 5^b$ и $b > x$. Если найдётся элемент $h_1 \in \mathrm{rang}(H)$, такой что $h_1 < h_0$ и $h_1 = 3^c \cdot 5^{x \dot{-} 1}$ для некоторого $c \in \omega$, то $x \in \mathrm{rang}(F)$. Если такого h_1 нет, то $x \notin \mathrm{rang}(F)$, т. к. функция F является псевдовозрастающей на $\mathbb{Q}$. Таким образом, $\mathrm{rang}(F) \leq_T \mathrm{rang}(H)$.

Пусть $\mathrm{rang}(F) - \{0, 1\} = \{b_0 < b_1 < \ldots < b_n < \ldots\}$ и $\mathrm{supp}(F) = \{p_1 <_{\mathbb{Q}} p_2 <_{\mathbb{Q}} p_3 <_{\mathbb{Q}} \ldots\}$. В силу $|F^{-1}(b_i)| = b_i$ нетрудно заметить, что $x \in \mathrm{rang}(H)$ тогда и только тогда, когда $x = 3^{k \dot{-} 1} \cdot 5^{b_i \dot{-} 1}$, где $\sum\limits_{j=0}^{i-1} b_j < k \leqslant \sum\limits_{j=0}^{i} b_j$ $\Big($сумму $\sum\limits_{j=0}^{-1} b_j$ считаем равной $0\Big)$. Отсюда следует, что $\mathrm{rang}(H) \leq_T \mathrm{rang}(F)$. $\square$

Доказательство следующей теоремы или более общего результата можно найти в [8, 9] соответственно.

ТЕОРЕМА 2.9. *Множество, являющееся областью значений* $\mathbf{0}'$-*предельно монотонной, псевдовозрастающей на* $\mathbb{Q}$ *функции, будет сильно* η-*представимым.*

Из двух предыдущих теорем вытекает

ТЕОРЕМА 2.10. *Тьюринговая степень сильно η-представима тогда и только тогда, когда она содержит область значений некоторой $\mathbf{0}'$-предельно монотонной, псевдовозрастающей на $\mathbb{Q}$ функции.*

§ 3. Сильно η-представимые степени в разностной иерархии

В [10–12] была построена иерархия множеств, расположенных ниже $\mathbf{0}'$, известная в литературе как *иерархия Ершова* или *разностная иерархия.* Для изучения сильно η-представимых множеств выглядит полезной разностная иерархия, релятивизованная относительно $\mathbf{0}'$. Как известно, иерархия Ершова состоит из конечных и бесконечных уровней. Релятивизация на конечных уровнях даёт замену конечных булевых комбинаций вычислимо перечислимых множеств на аналогичные комбинации Σ^0_2-множеств. Многие результаты также релятивизуются. Ситуация с бесконечными уровнями несколько сложнее.

Рассмотрим одно из эквивалентных определений первого бесконечного уровня в иерархии Ершова.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Говорят, что множество A *принадлежит классу* Δ^{-1}_ω, если существуют вычислимые функции $f : \omega \times \omega \to \{0,1\}$ и $n : \omega \to \omega$, такие что $\chi_A(x) = \lim\limits_{s\to\infty} f(x,s)$ и $|\{s \mid f(x,s{+}1) \neq f(x,s)\}| \leqslant n(x)$ для любого x из ω.

Множества из класса Δ^{-1}_ω называются *ω-вычислимо перечислимыми* (*ω-в. п.*).

Полная релятивизация этого определения относительно оракула $\mathbf{0}'$ даёт определение $\Delta^{-1}_\omega(\mathbf{0}')$-множеств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Говорят, что множество A *принадлежит классу* $\Delta^{-1}_\omega(\mathbf{0}')$, если существуют $\mathbf{0}'$-вычислимые функции $f : \omega \times \omega \longrightarrow \{0,1\}$ и $n : \omega \longrightarrow \omega$, такие что $\chi_A(x) = \lim\limits_{s\to\infty} f(x,s)$ и $|\{s \mid f(x,s+1) \neq f(x,s)\}| \leqslant$ $\leqslant n(x)$ для любого x из ω.

Тьюринговая степень называется $\Delta^{-1}_\omega(\mathbf{0}')$-*степенью*, если она содержит хотя бы одно $\Delta^{-1}_\omega(\mathbf{0}')$-множество.

Естественно рассмотреть следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Говорят, что множество A *принадлежит классу* $\Delta_\omega^{-1}(X,Y)$, если существуют функции $f : \omega \times \omega \longrightarrow \{0,1\}$ и $n : \omega \longrightarrow \omega$, X- и Y-вычислимые соответственно, такие что $\chi_A(x) = \lim\limits_{s\to\infty} f(x,s)$ и $|\{s \mid f(x,s+1) \neq f(x,s)\}| \leqslant n(x)$ для любого x из ω.

Тьюринговая степень называется $\Delta_\omega^{-1}(X,Y)$-*степенью*, если она содержит хотя бы одно $\Delta_\omega^{-1}(X,Y)$-множество.

По определению, $\Delta_\omega^{-1}(\mathbf{0}') = \Delta_\omega^{-1}(\mathbf{0}',\mathbf{0}')$. Как известно [13], ω-в. п. множества тесно связаны с табличной сводимостью, а именно, множество ω-в. п. тогда и только тогда, когда оно таблично сводится к $\varnothing'$. Напомним определение. Пусть $\{\sigma_n\}_n \in \omega$ — эффективное перечисление всех пропозициональных формул, построенных из атомных высказываний вида $k \in X$ для различных $k \in \omega$. Формулы σ_n называются *табличными* или *tt-условиями.* Множество A *таблично сводится* или *tt-сводится* к множеству B, если для некоторой вычислимой функции f и всех x

$$x \in A \Longleftrightarrow B \vDash \sigma_f(x),$$

т. е. B удовлетворяет условию $\sigma_f(x)$.

В релятивизованной иерархии тоже существует подобная связь, а именно, справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. *Для любого множества A справедливо $A \leq_{tt} \mathbf{0}''$ тогда и только тогда, когда $A \in \Delta_\omega^{-1}(\mathbf{0}',\mathbf{0})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО практически полностью повторяет доказательство для Δ_ω^{-1} множеств [13].

($\Rightarrow$) По данному x эффективно находим число n, булеву функцию $\alpha : \{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}$ и конечное множество $\{t_1,\ldots,t_n\}$, такие что $x \in A$ тогда и только тогда, когда $\alpha(K'(t_1),\ldots,K'(t_n)) = 1$; и определяем $g(x,s) = \alpha(K'_s(t_1),\ldots,K'_s(t_n))$. Здесь K' — скачок креативного множества K, а $\{K'_s\}_{s\in\omega}$ — перечисление элементов K' с оракулом $\mathbf{0}'$. Ясно, что $\chi_A(x) = \lim\limits_{s\to\infty} g(x,s)$ и $|\{s \mid g(x,s) \neq g(x,s+1)\}| \leqslant n$.

($\Leftarrow$) Пусть $\chi_A(x) = \lim\limits_{s\to\infty} g(x,s)$ и $|\{s \mid g(x,s) \neq g(x,s+1)\}| \leqslant \alpha(n)$ для некоторой вычислимой функции α. Определим $I = \{\langle x,a,i\rangle \mid (\exists t)[|\{s \leqslant t \mid$

$g(x,s) \neq g(x,s+1)\}| = i \,\&\, g(x,t) = a)|]\}$. Ясно, что I в. п. относительно $\mathbf{0}'$ и $x \in A$ тогда и только тогда, когда $(\langle x,1,0\rangle \in I \,\&\, \langle x,1,1\rangle \notin I \,\&\, \langle x,0,1\rangle \notin I) \vee (\langle x,1,1\rangle \in I \,\&\, \langle x,1,2\rangle \notin I \,\&\, \langle x,0,2\rangle \notin I) \vee \ldots \vee (\langle x,1,\alpha(x)\rangle \in I)$ (последний дизъюнкт, в отличии от остальных, состоит из одного конъюнкта). Приведённое соотношение может быть записано в виде tt-условия. Поэтому $A \leq_{tt} I$. $\Box$

Для $\Delta^{-1}_{\omega}(\mathbf{0}',\mathbf{0}')$-множеств имеет место аналогичный результат, получающийся заменой tt-сводимости на следующую сводимость.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.5. Множество A *таблично сводится с оракулом* $\mathbf{0}'$ (или tt'-*сводится*) к множеству B, если для некоторой $\mathbf{0}'$-вычислимой функции f и всех x

$$x \in A \Longleftrightarrow B \vDash \sigma_f(x),$$

т. е. B удовлетворяет условию $\sigma_f(x)$.

Полностью релятивизуя доказательство результата об ω-в. п. множествах получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. *Для любого множества A справедливо $A \leq_{tt'} \mathbf{0}''$ тогда и только тогда, когда $A \in \Delta^{-1}_{\omega}(\mathbf{0}',\mathbf{0}')$.*

Далее потребуется

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.7 [14]. *Пусть $f : \mathbb{Q}\times\omega \longrightarrow \omega$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) *для любого $q \in \mathbb{Q}$ существует конечный предел $\lim\limits_{s\to\infty} f(q,s)$;*

2) *множество $\{\lim\limits_{s\to\infty} f(q,s) \mid q \in \mathbb{Q}\}$ бесконечно;*

3) $\langle\{q \in \mathbb{Q} \mid \lim\limits_{s\to\infty} f(q,s) > 1\}, <_{\mathbb{Q}}\rangle \cong \langle\omega,<\rangle$;

4) *для любого $s \in \omega$ функция $f(\cdot,s)$ псевдонеубывающая (псевдовозрастающая).*

Тогда функция F, определяемая равенством $F(q) = \lim\limits_{s\to\infty} f(q,s)$, также псевдонеубывающая (псевдовозрастающая) на $\mathbb{Q}$.

ТЕОРЕМА 3.8. *Пусть $h : \omega\times\omega \longrightarrow \{0,1\}$ и $n : \omega \longrightarrow \omega$ — $\mathbf{0}'$-вычислимые функции, такие что $|\{s \in \omega \mid h(x,s) \neq h(x,s+1)\}| \leqslant n(x)$ для любого x.*

Тогда существует $\mathbf{0}'$*-предельно монотонная, псевдовозрастающая на* $\mathbb{Q}$ *функция* F*, такая что* $\mathrm{rang}(F) \equiv_T \mathrm{graph}(H) \oplus \mathrm{graph}(n)$*, где* $H(x) = \lim\limits_{s\to\infty} h(x,s)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для определения функции F сначала построим её носитель. Не ограничивая общности, можно считать, что $|\{x \leqslant s \mid h(x,s) \neq h(x,s+1)\}| \leqslant 1$ и $h(x,0) = 0$ для любых x и s.

Построим носитель P функции F как объединение множеств P_s. Так как $P_s \subset \mathbb{Q}$, то на P_s естественным образом индуцируется порядок, этот порядок всегда будет типа ω. В процессе конструкции множество P_s будет разбито на конечные попарно непересекающиеся интервалы. Так как P_s упорядочено по типу ω, то интервалы можно пронумеровать в порядке возрастания. Нумерацию начнём с 2.

Пусть $N(p,s)$ — функция, равная номеру интервала, которому принадлежит элемент p на шаге s. Пусть $l(1) = 0$ и $l(k) = \sum\limits_{j=2}^{k}(n(j)+1)$ для $k > 1$. В интервале с номером k на шаге s будет либо $l(k)$ элементов, если $h(k,s) = 0$, либо $l(k)+1$ элементов, если $h(x,s) = 1$. В каждом интервале пронумеруем элементы в порядке возрастания, в зависимости от количества элементов начнём либо с 3, либо с 2 и закончим номером $l(k)+2$ в интервале с номером k. Пусть $m(p,s)$ — эта нумерующая функция. Таким образом, мы строим множества $P_s = \{p_1^s <_{\mathbb{Q}} p_2^s <_{\mathbb{Q}} \ldots <_{\mathbb{Q}} p_n^s <_{\mathbb{Q}} \ldots\}$ и функции N, m так, чтобы выполнялись следующие свойства:

1) $(\forall x > 1)(\forall i \in [3, l(x)+2])(\exists p \in P_s)[N(p,s) = x \,\&\, m(p,s) = i]$, $2 \leqslant m(p,s) \leqslant l(N(p,s)) + 2$;

2) для любого $x > 1$ справедливо $(\exists p \in P_s)[N(p,s) = x \,\&\, m(p,s) = 2]$ тогда и только тогда, когда $h(x,s) = 1$;

3) если $N(p_i^s, s) < N(p_j^s, s)$, то $p_i^s <_{\mathbb{Q}} p_j^s$;

4) если $N(p_i^s, s) = N(p_j^s, s) \,\&\, m(p_i^s, s) < m(p_j^s, s)$, то $p_i^s <_{\mathbb{Q}} p_j^s$;

5) для любого p из того, что $m(p,s)$ определена следует $m(p,s) > 1$.

Нетрудно понять, что существует $\mathbf{0}'$-вычислимая последовательность $\{p_i^0\}_{i=1}^{\omega}$, такая что

$p_1^0 <_{\mathbb{Q}} p_2^0 <_{\mathbb{Q}} \ldots <_{\mathbb{Q}} p_n^0 <_{\mathbb{Q}} \ldots$;

она не ограничена сверху в $\mathbb{Q}$, т. е. $(\forall q \in \mathbb{Q})(\exists i)[q <_{\mathbb{Q}} p_i^0]$.

В процессе конструкции примем следующее соглашение: если после шага s определён какой-либо объект $G(s)$ (функция, множество, элемент и т. п.), а на шаге $s+1$ он явно не определяется, то $G(s+1) = G(s)$.

Конструкция носителя функции.

Шаг 0. Для $k > 1$ обозначим $sl(k) = \sum_{j=1}^{k-1} l(j)$. Для всех $k > 1$ и $u \in [1, l(k)]$ положим $N(p^0_{sl(k)+u}, 0) = k$ и $m(p^0_{sl(k)+u}, 0) = u + 2$. Напомним, что $l(1) = 0$ и $l(k) = \sum_{j=2}^{k} (n(j) + 1)$ для $k > 1$.

Шаг $s+1$. Пусть к данному шагу уже построено множество $P_s = \{p^s_1 <_{\mathbb{Q}} p^s_2 <_{\mathbb{Q}} \ldots\}$ и определены функции $N(p, u)$ и $m(p, u)$ для $p \in P_s$ и $u \leqslant s$, при этом выполняются условия 1–5.

Если $|\{1 < x \leqslant s \mid h(x, s) \neq h(x, s+1)\}| = 0$, то переходим к следующему шагу. Пусть $|\{1 < x \leqslant s \mid h(x, s) \neq h(x, s+1)\}| = 1$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть $h(x, s+1) = 1$ и $h(x, s) = 0$. Тогда найдётся такой i_0, что $N(p^s_{i_0}, s) = x - 1$, $m(p^s_{i_0}, s) = l(x-1) + 2$ и $N(p^s_{i_0+1}) = x$, $m(p^s_{i_0+1}, s) = 3$. Находим наименьший индекс k, такой что $p^s_{i_0} <_{\mathbb{Q}} q_k <_{\mathbb{Q}} p^s_{i_0+1}$, и положим

$p^{s+1}_{i_0+1} = q_k$, $N(p^{s+1}_{i_0+1}, s+1) = x$ и $m(p^{s+1}_{i_0+1}, s+1) = 1$;

$p^{s+1}_i = p^s_{i-1}$, $N(p^{s+1}_i, s+1) = N(p^s_{i-1}, s)$ и $m(p^{s+1}_i, s+1) = m(p^s_{i-1}, s)$ для $i > i_0 + 1$.

Случай 2. Пусть $h(x, s+1) = 0$ и $h(x, s) = 1$. Тогда найдётся элемент $p^s_{i_0} \in P_s$, такой что $N(p^s_{i_0}, s) = x$ и $m(p^s_{i_0}, s) = 1$. Положим

$N(p^{s+1}_i, s+1) = N(p^s_{i+1}, s)$ и $m(p^{s+1}_i, s+1) = m(p^s_{i+1}, s)$ для $i \geqslant i_0$.

Описание конструкции завершено.

Выполнение свойств 1–5 после каждого шага s устанавливается непосредственной проверкой.

ЛЕММА 3.9. *Для любого $p \in P$ существует конечный предел $\lim\limits_{s\to\infty} N(p, s)$, причём $\lim\limits_{s\to\infty} N(p, s) \geqslant N(p, u)$ для любого u, для которого $p \in P_u$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого u справедливо $N(p, u+1) - N(p, u) \leqslant 1$, следовательно,

i) если $p \in P_s$, то $p \in P_{s+1}$ и либо $N(p, s+1) = N(p, s)$, либо $N(p, s+1) = N(p, s) + 1$.

Значит,

ii) если $p \in P_s$ и $s < s'$, то $N(p, s) \leqslant N(p, s')$.

Из п. „ii“ получаем, что предел $\lim\limits_{u\to\infty} N(p, u)$ существует (возможно, бесконечный) и $\lim\limits_{u\to\infty} N(p, u) \geqslant N(p, s)$ для любого s, такого что $p \in P_s$. Покажем теперь, что указанный предел конечен. Достаточно установить, что $|\{s \mid N(p, s+1) \neq N(p, s)\}| \leqslant 1$. Предположим, что $N(p, s_0) \neq N(p, s_0 + 1)$ для некоторого s_0. Тогда значение $m(p, s_0 + 1)$ равно либо 2, либо 3. По конструкции, если $m(p, s) \neq l(N(p, s)) + 2$ и $m(p, s+1) \neq m(p, s)$, то $m(p, s+1) = m(p, s) + 1$ и $N(p, s+1) = N(p, s)$. Кроме того, если $m(p, s+1) \neq m(p, s)$, то для некоторого $x \in [2, N(p, s)]$ изменяется функция h, т. е. $h(x, s+1) \neq h(x, s)$. Таким образом, чтобы существовал шаг $s_1 > s_0$, для которого $N(p, s_1) > N(p, s_0)$, необходимо, чтобы нашлась последовательность из $l(N(p, s_0))$ шагов, на которых функция h меняет значение в какой-либо точке, не превосходящей $N(p, s_0)$ (кроме 0 и 1). Но таких шагов не более чем $\sum\limits_{j=2}^{N(p,s_0)} n(j) < l(N(p, s_0))$. Следовательно, нет шага $s_1 > s_0$, такого что $N(p, s_1) > N(p, s_0)$. □

ЛЕММА 3.10. *Имеет место изоморфизм* $\langle P, <_{\mathbb{Q}}\rangle \cong \langle \omega, <\rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p \in P$, тогда существует шаг s_0, такой что $(\forall s \geqslant s_0)[p \in P_s]$. Согласно конструкции, на каждом шаге $s \geqslant s_0$ множеству P_s принадлежит не более чем $\sum\limits_{i\leqslant N(p,s)} (l(i) + 1)$ элементов, лежащих левее p (т. е. меньших относительно порядка $\mathbb{Q}$). Согласно лемме 3.9 существует предел $\lim\limits_{s\to\infty} N(p, s) = N(p)$. Поскольку $(\forall s \geqslant s_0)[N(p) \geqslant N(p, s)]$, то $\sum\limits_{i\leqslant N(p,s)} (l(i) + 1) \leqslant \sum\limits_{i\leqslant N(p)} (l(i) + 1)$. Таким образом, число элементов множества P_s (для $s \geqslant s_0$), расположенных левее p, ограничено константой, не зависящей от s, следовательно, количество элементов множества P, расположенных левее p, ограничено той же константой. Так как это выполняется для любого $p \in P$, получаем требуемое. □

Определим функцию

$$f(q,s)=\begin{cases}\sum\limits_{i<N(q,s)}(l(i)+2)+m(q,s), & \text{если } q\in P_s,\\ 1 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Очевидно, что функция f является $\mathbf{0}'$-вычислимой. По лемме 3.9 функция $F(q)=\lim\limits_{s\to\infty} f(q,s)$ всюду определена. В силу определений функций N и m для любого s выполняется $f(q,s)\geqslant f(q,s+1)$. Нетрудно заметить, что

$$(\forall s)(\forall p_1\in P_s)(\forall p_2\in P_s)[p_1<_{\mathbb{Q}} p_2\to f(p_1,s)<f(p_2,s)].$$

Таким образом, функция $f(\cdot,s)$ является псевдовозрастающей на $\mathbb{Q}$ для любого s. Так как $\mathrm{supp}(F)\cong\langle\omega,<\rangle$, то согласно предложению 3.7 функция F является $\mathbf{0}'$-предельно монотонной, псевдовозрастающей на $\mathbb{Q}$.

Доказательство теоремы завершает следующая

ЛЕММА 3.11. *Имеет место эквивалентность*

$$\mathrm{rang}(F)\equiv_T \mathrm{graph}(H)\oplus\mathrm{graph}(n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого x количество изменений функции h ограничено функцией n, поэтому существует предел $\lim\limits_{s\to\infty} h(x,s)=H(x)\leqslant 1$, т.е. H — всюду определенная функция. Тогда для каждого $x\in\omega$ существует единственный $y\in\{0,1\}$, такой что $\langle x,y\rangle\in\mathrm{graph}(H)$.

Сначала вычислим $\mathrm{graph}(n)$. Пусть $k(1)=0$ и $k(2)=\min\{x>k(1)+1\mid x\notin\mathrm{rang}(F)\}$. Тогда $l(2)=k(2)-k(1)-1$ и $n(2)=l(2)-1=k(2)-k(1)-1$. Пусть уже вычислены $l(i)$ и $n(i)$. Найдём $l(i+1)$ и $n(i+1)$. Полагаем $k(i+2)=\min\{x>k(i+1)+1\mid x\notin\mathrm{rang}(F)\}$. Тогда $l(i+1)=k(i+2)-k(i+1)-1$ и $n(i+1)=l(i+1)-l(i)-1=k(i+2)-k(i+1)-1-k(i+1)+k(i)+1-1=k(i+2)-2k(i+1)+k(i)-1$. Далее, $\langle x,1\rangle\in\mathrm{graph}(H)\Leftrightarrow k(x)+1\in\mathrm{rang}(F)$. Итак, $\mathrm{rang}(F)\geq_T\mathrm{graph}(H)\oplus\mathrm{graph}(n)$.

Отметим, что $(\forall i)(\forall j\in[3,l(i)+2])(\exists p\in P)[N(p)=i\,\&\,m(p)=j]$ и $(\forall i)[(\exists p\in P)[N(p)=i\,\&\,m(p)=2]\Leftrightarrow\langle i,1\rangle\in\mathrm{graph}(H)$. Таким образом, $\mathrm{rang}(F)=\{1\}\cup\Big\{\sum\limits_{1<k\leqslant i}(l(k)+2)+j\,\Big|\,(i>1)\,\&\,(j\in[3,l(i+1)+2])\Big\}\cup\cup\Big\{\sum\limits_{1<k\leqslant i}(l(k)+2)+2\,\Big|\,\langle i+1,1\rangle\in\mathrm{graph}(H)\Big\}$. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. i) Отметим, что требование о количестве элементов в интервалах не является необходимым. Достаточно в k-ом интервале взять $[n(k)/2]+2$ элементов, но это потребует более тонких рассуждений при доказательстве леммы 3.9.

ii) В условиях теоремы функцию F можно построить псевдовозрастающей на ω, а не на $\mathbb{Q}$. Для этого необходимо выбрать последовательность $\{p_i^0\}_{i=1}^{\omega}$ так, чтобы $p_1^0 > n(2)$ и $p_{i+1}^0 - p_i^0 > (n(i+1)+1)(n(i+2)+1)$ $(i > 0)$. При таком выборе можно так организовать построение P, что на шаге $s+1$ для построения P_{s+1} будет достаточно элементов, не лежащих в P_s.

СЛЕДСТВИЕ 3.12. *Любая* $\Delta_\omega^{-1}(\mathbf{0}', \mathbf{0})$ *тьюринговая степень содержит сильно* η*-представимое множество.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A — $\Delta_\omega^{-1}(\mathbf{0}', \mathbf{0})$-множество. Тогда существуют $\mathbf{0}'$-вычислимая функция $h : \omega \times \omega \longrightarrow \{0,1\}$, такая что $\chi_A(x) = \lim_{s\to\infty} h(x,s)$, и вычислимая функция $n(x)$, такая что $|\{s \in \omega \mid h(x,s) \neq h(x,s+1)\}| \leqslant n(x)$. Согласно теореме 3.8 существует $\mathbf{0}'$-предельно монотонная, псевдовозрастающая на $\mathbb{Q}$ функция F, для которой $\mathrm{rang}(F) \equiv_T \mathrm{graph}(\chi_A) \oplus \mathrm{graph}(n)$. Следовательно, $\mathrm{rang}(F) \equiv_T A$. По теореме 2.9, $\mathrm{rang}(F)$ — сильно η-представимое множество, отсюда вытекает требуемое. $\Box$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.13. *Пусть* $F : \omega \longrightarrow \omega$ — X*-предельно монотонная, псевдонеубывающая на* ω *функция. Тогда* $\mathrm{rang}(F) \in \Delta_\omega^{-1}(X, X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать, что область значения функции F бесконечна. Согласно определению X-предельно монотонной функции существует такая X-вычислимая функция $f : \omega \times \omega \to \omega$, что $(\forall x)(\forall s)[f(x,s) \leqslant f(x,s+1)]$ и $\lim_{s\to\infty} f(x,s) = F(x)$. Для произвольного x определим X-вычислимые функции $h(x,s)$ и $n(x)$. Так как $\mathrm{rang}(F)$ — бесконечное множество, существует наименьшая пара $\langle y_0, s_0\rangle$, такая что $f(y_0, s_0) > s$. Для $s \leqslant s_0$ полагаем $h(x,s) = 0$, а для $s > s_0$ полагаем $h(x,s) = 1$, если $(\exists y < y_0)[f(y,s) = x]$, и $h(x,s) = 0$ в противном случае.

Легко видеть, что количество изменений функции h в точке x не превосходит $2y_0$. $\Box$

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. I. Soare*, Recursively enumerable sets and degrees. A study of computable functions and computably generated sets (Perspect. Math. Log., Omega Series), Berlin etc., Springer-Verlag, 1987 (имеется русский перевод: *Р. И. Соар*, Вычислимо перечислимые множества и степени. Изучение вычислимых функций и вычислимо перечислимых множеств, Казань, Казанское матем. об-во, 2000).
2. *L. Feiner*, Hierarchies of Boolean algebras, J. Symb. Log., **35**, No. 3 (1970), 365—374.
3. *J. C. Rosenstein*, Linear Orderings, New York, Academic Press, 1982.
4. *S. Fellner*, Recursive and finite axiomatizability of linear orderings, Ph.D. Thesis, Rutgers Univ., New Brundswick, NJ, 1976.
5. *M. Lerman*, On recursive linear orderings, in: Logic year 1979-80, Univ. Conn./USA (Lect. Notes Math., **859**), Berlin a.o., Springer-Verlag, 1981, 132—142.
6. *R. G. Downey*, Computability theory and linear orderings, in: Y. L. Ershov, S. S. Goncharov, A. Nerode, J. B. Remmel (eds.), Handbook of recursive mathematics. Vol. 2: Recursive algebra, analysis and combinatorics (Stud. Logic Found. Math., **139**), Amsterdam, Elsevier Science B.V., 1998, 823—976.
7. *K. Harris*, η-Representation of sets and degrees, J. Symb. Log., **73**, No. 4 (2008), 1097—1121.
8. *A. M. Kach, D. Turetsky*, Limitwise monotonic functions, sets and degrees on computable domains, J. Symb. Log., **75**, No. 1 (2010), 131—154.
9. *A. N. Frolov, M. V. Zubkov*, Increasing η-representable degrees, Math. Log. Q., **55**, No. 6 (2009), 633—636.
10. *Ю. Л. Ершов*, Об одной иерархии множеств I, Алгебра и логика, **7**, № 1 (1968), 47—73.
11. *Ю. Л. Ершов*, Об одной иерархии множеств II, Алгебра и логика, **7**, № 4 (1968), 15—47.
12. *Ю. Л. Ершов*, Об одной иерархии множеств III, Алгебра и логика, **9**, № 1 (1970), 34—51.
13. *М. М. Арсланов*, Иерархия Ершова. Спецкурс для студентов мехмата, Казань, Казанский гос. ун-т, 2007.

14. *М. В. Зубков*, Одна теорема о сильно η-представимых множествах, Изв. вузов. Матем., 2009, № 7, 77—81.

Поступило 1 октября 2009 г.

Окончательный вариант 2 февраля 2011 г.

Адрес автора:

ЗУБКОВ Максим Витальевич, НИИ матем. мех. им. Н. Г. Чеботарёва, Казанский (Приволжский) федерал. ун-т, ул. Кремлёвская, 18, г. Казань, РОССИЯ. e-mail: Maxim.Zubkov@ksu.ru