

О ХАРАКТЕРИСТИКЕ УСТАНОВИВШЕГОСЯ РЕЖИМА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Б. БЁМЕ, Ю. Н. СОФИЕВА, А. М. ЦИРЛИН

(Лейпциг, Москва)

Рассматривается характеристика установившегося режима управляемых объектов — зависимость среднего значения критерия эффективности от среднего значения управления. Эта характеристика неоднозначна, так как фиксированному среднему значению управления соответствует множество средних значений критерия, лежащих в некотором диапазоне. Верхняя граница этой характеристики выпукла вверх, а нижняя выпукла вниз, причем в крайних точках множества допустимых управлений эти границы совпадают друг с другом и со статической характеристикой объекта. Выделен класс объектов, для которых расчет границ характеристики установившихся режимов может быть существенно упрощен.

1. Введение и постановка задачи

Под установившимся режимом будем понимать режим, в котором переменные состояния $x_i(t)$ и управления $u_v(t)$ удовлетворяют соотношениям

$$(1) \quad \bar{x}_i = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x_i(\tau) d\tau = C_i \quad (i = \overline{0, n-1}),$$

$$(2) \quad \bar{u}_v = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t u_v(\tau) d\tau = K_v \quad (v = \overline{1, m}),$$

где C_i и K_v — некоторые константы. Если равенства (1), (2) выполнены при любом T , т. е. $x_i(t) \equiv C_i$, $u_v(t) \equiv K_v$, то режим называют статическим.

Рассмотрим задачу изменения среднего значения вектора x при замене постоянного управления u периодическим с заданным средним значением $\bar{u} = u^0$. Если множество допустимых управлений выпукло, то u^0 равно одному из значений статического управления, если же это множество не выпукло, то u^0 — элемент его выпуклой оболочки. Зависимость $\bar{x}(\bar{u})$ назовем характеристикой установившегося режима. Ясно, что каждому закону изменения вектора управлений будут соответствовать свои средние значения фазовых координат, так что искомая характеристика в общем случае неоднозначна, и каждому значению \bar{u} соответствует множество значений \bar{x} . При этом каждая из составляющих вектора \bar{x} меняется в диапазоне от $\bar{x}_i^*(u)$ до $\bar{x}_i^*(u)$ (рис. 1). В число переменных состояний может быть включен и критерий эффективности процесса.

Наибольший интерес представляют границы характеристики установившихся режимов, позволяющие оценить диапазон возможных изменений вектора \bar{x} и максимальную эффективность установившихся режимов.

Знание такой «диапазонной модели» позволяет часто сделать важные выводы и о возможностях схемы, состоящей из нескольких объектов [1].

Характеристика установившихся режимов, лежащая между $\bar{x}_0^*(u)$ и $\bar{x}_{0*}(u)$, определена на множестве допустимых значений управления V_u и для любого динамического объекта обладает следующими очевидными свойствами:

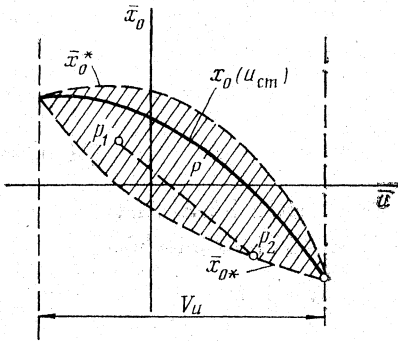


Рис. 1. Вид характеристики установившегося режима

1) в крайних точках * множества V_u характеристики $\bar{x}_0^*(u)$ и $\bar{x}_{0*}(u)$ равны друг другу и совпадают со статической характеристикой объекта,

2) характеристика установившихся режимов ограничивает выпуклое множество P (заштриховано на рис. 1).

Первое из них связано с тем, что для u^0 , соответствующего крайней точке множества V_u , любые периодические изменения управления приводят к нарушению условия (2). Второе же свойство гарантируется тем, что для любых двух режимов, соответствующих точкам $p_1 = (\bar{x}_{01}, \bar{u}_1)$ и $p_2 = (\bar{x}_{02}, \bar{u}_2)$, можно построить режим, соответствующий точкам отрезка, соединяющего p_1 и p_2 . Для этого нужно период T взять достаточно большим, в течение времени γT работать в режиме, соответствующем p_1 , а остальное время $(1-\gamma)T$ — в режиме, соответствующем p_2 .

Рассмотрим задачу о максимуме среднего значения составляющей $x_0(t)$ вектор-функции $x(t)$ при условиях

$$(3) \quad \dot{x}_i = f_i(x, u) \quad (i=0, n-1),$$

$$(4) \quad u(t) \in V_u \quad \forall t$$

и ограничениях на среднее значение управления $\bar{u} = u^0$.

Двумя в некотором смысле предельными случаями циклических установившихся режимов являются скользящий и квазистатический. В первом из них управление меняется столь часто, что значение x практически постоянно и равно некоторой величине \bar{x} , которая для объекта, характеризующегося уравнениями (3), может быть найдена как решение системы усредненных соотношений

$$(5) \quad \bar{f}_i(\bar{x}, u) = 0 \quad (i=0, n-1),$$

в которых \bar{f}_i^u — среднее по u на множестве V_u значение функции $f_i(\bar{x}, u)$. В квазистатическом режиме изменения управления происходят с такой малой скоростью, что им соответствуют изменения переменных состояния, определяющиеся для каждого t статическими характеристиками объекта.

О предельных значениях \bar{x}_0 часто можно судить, не решая вариационной задачи оптимизации, на основе функции Лагранжа статической задачи

$$(6) \quad R(u, x, \lambda, \xi) = x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f_i(x, u) + \sum_{v=1}^m \xi_v (u_v - u_v^0).$$

Введем наряду с множеством V_u множество допустимых значений вектора x , которое обозначим через V_x . Тогда (см. приложение) предельное

* Напомним, что элемент a^0 называют крайней точкой множества A , если нельзя найти двух таких элементов a^1 и a^2 , что $a^0 = \gamma a^1 + (1-\gamma)a^2$, причем в этом равенстве $0 < \gamma < 1$.

значение \bar{x}_0^* подчиняется неравенству

$$(7) \quad \bar{x}_0^* \leq R^* = \inf_{\lambda, \xi} \sup_{x \in V_x; u \in V_u} R(u, x, \lambda, \xi).$$

Правую часть неравенства (7) естественно назвать предельной эффективностью установившегося режима.

На множестве скользящих режимов максимум \bar{x}_0 равен

$$(8) \quad \bar{x}_{0 \text{ СК}}^* = \inf_{\lambda, \xi} \left[\sup_{u \in V_u} R(u, \bar{x}, \lambda, \xi) \left/ \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right)_{x=\bar{x}}^u = 0 \right. \right],$$

при этом дифференциальная мера $P(u)$, которая определяет усреднение на множестве V_u , сосредоточена в конечном числе базовых точек u^v , для которых функция R в (8) достигает своей верхней грани. Определение вектора \bar{x} и весовых множителей γ_v производят из условий [2]

$$(9) \quad \sum_{v=0}^m \gamma_v f_i(\bar{x}, u^v) = 0 \quad (i = \overline{0, n-1}),$$

$$(10) \quad \gamma_v \geq 0; \quad \sum_{v=0}^m \gamma_v = 1 \quad (v = \overline{0, m}).$$

На множестве квазистатических режимов максимум \bar{x}_0 равен

$$(11) \quad \bar{x}_{0 \text{ КС}}^* = \inf_{\xi} \left[\sup_{u \in V_u, x \in V_x} R(u, x, \lambda, \xi) \left/ \frac{\partial R}{\partial \lambda} = f(x, u) = 0 \right. \right].$$

2. О предельных отклонениях состояния объекта в установившемся режиме

Рассмотрим объект, характеризующийся уравнением n -го порядка

$$(12) \quad x_0^{(n)} + N_1(u) x_0^{(n-1)} + \dots + N_n(u) x_0 = M(u).$$

Вводя новые переменные, можем записать уравнение (12) в форме системы:

$$(12a) \quad \dot{x}_i = x_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n-2,$$

$$\dot{x}_{n-1} = - \sum_{k=0}^{n-1} N_{n-k}(u) x_k + M(u).$$

Для объекта, характеризующегося уравнением (12), отклонение среднего значения координаты x_0 в скользящем или квазистатическом режиме равно соответственно

$$(13) \quad \bar{x}_{0 \text{ СК}}^* = \max \left[\frac{\overline{M(u)}}{\overline{N(u)}} \right] \Big/_{\bar{u}=u^0}$$

или

$$(14) \quad \bar{x}_{0 \text{ КС}}^* = \max \left[\frac{\overline{M(u)}}{\overline{N(u)}} \right] \Big/_{\bar{u}=u^0},$$

причем черта над любым из выражений в (13), (14) имеет смысл

$$(15) \quad \overline{f(u)} = \sum_{v=0}^m \gamma_v f(u^{v*}).$$

Таким образом для любого порядка объекта n отклонения переменной \bar{x}_0 могут быть подсчитаны по формулам (13) или (14), в которых максимум ищется по γ и u^v при условиях

$$(16) \quad 0 \leq \gamma \leq 1, \quad u^{v*} \in V_u, \quad \sum_{v=1}^m \gamma_v = 1,$$

$$\sum_{v=0}^m \gamma_v u_j^{v*} = u_j^0 \quad (j=1, m).$$

Запишем условия, которым должно удовлетворять оптимальное решение в случае квазистатического и скользящего режимов. Для этого перепишем (13) и (14) в форме

$$(17) \quad \bar{x}_{0 \text{ ск}}^* = \max \left[\frac{\sum_v \gamma_v M(u^v)}{\sum_v \gamma_v N_n(u^v)} \right],$$

$$(18) \quad \bar{x}_{0 \text{ кс}}^* = \max \left[\sum_v \gamma_v \frac{M(u^v)}{N_n(u^v)} \right],$$

причем и в том и в другом случае максимум по γ_v и u^v ищется при условиях (16). Нетрудно показать, что при использовании условия (18) для базовых управлений u^{v*} функция

$$H_{\text{кс}}(u, \xi) = M(u)/N_n(u) + \xi u$$

достигает максимального значения на множестве V_u , причем

$$(19) \quad H_{\text{кс}}(u^*, \xi^*) = \inf_{\xi} \sup_{u \in V_u} H_{\text{кс}}(u, \xi).$$

Найдя u^{v*} из условий (19), можно определить их веса γ_v из условий (16). Что касается скользящего режима, то из требований оптимальности задачи (17) по γ_v следует, что для базовых управлений максимально по u выражение

$$(20) \quad H_{\text{ск}}(u, \xi, \gamma) = \frac{N_n(u) \overline{M(u)} - M(u) \overline{N_n(u)}}{[N_n(u)]^2} + \xi u,$$

в котором

$$\overline{N_n(u)} = \sum_{v=0}^m \gamma_v N_n(u^v); \quad \overline{M(u)} = \sum_{v=0}^m \gamma_v M(u^v).$$

Аналогично (19)

$$(21) \quad H_{\text{ск}}(u^*, \xi^*, \gamma^*) = \inf_{\xi} \sup_{u \in V_u} H_{\text{ск}}(u, \xi, \gamma^*).$$

Значение γ^* определяется при совместном использовании условий (21) и (16).

Выделим класс объектов, для которых в статическом или скользящем режимах достигается предельное значение координаты \bar{x}_0 .

Теорема 1. Если условие стационарности по x функции Лагранжа (6) статической задачи выделяет точку максимума R по x и не содержит u ,

то предельное отклонение \bar{x}_0^* достигается в статическом или скользящем режиме.

Условиям теоремы удовлетворяют, например, объекты, уравнения которых линейны по переменным состояниям

$$\dot{x}_i = \sum_{\mu=1}^n a_{i\mu} x_\mu + b_i(u).$$

Доказательство теоремы приведено в приложении.

3. Случай скалярного управления

Пусть $m=1$, $n=1$ и введены обозначения

$$(22) \quad T(u) = 1/N_1(u), \quad \varphi(u) = M(u)/N_1(u).$$

Для объекта с уравнением

$$(23) \quad T(u)\dot{x}_0 + x_0 = \varphi(u)$$

$\varphi(u)$ — статическая характеристика, а $T(u)$ — зависящая от управления постоянная времени. Примем значение u^0 и соответствующее ему в силу уравнений статики значение $x_0 = \varphi(u^0)$ нулевыми, т. е. перенесем начало координат на плоскости (x_0, u) в точку, соответствующую статическому режиму. Выражение (13) можно переписать как

$$\bar{x}_0 = \left[\frac{\varphi(u)}{T(u)} \right]_u : \left[\frac{1}{T(u)} \right]_u.$$

Обычно величина $T(u) > 0$, поэтому условие эффективности скользящего режима $\bar{x}_0 > 0$ сводится к тому, что для $u^0 = 0$ выпуклая оболочка функции $M(u) = \varphi(u)/T(u)$ на множестве V_u проходит выше графика этой функции

$$(24) \quad \left[\text{Co}_v \frac{\varphi(u)}{T(u)} \right]_{u=0} > \frac{\varphi(0)}{T(0)}.$$

Пусть статическая характеристика и зависимость $T(u)$ линейны

$$(25) \quad \varphi(u) = ku, \quad T(u) = T_0 + k_T u.$$

Запишем вторую производную для функции $M(u)$:

$$M''(u) = -2kk_T T_0 / (T_0 + k_T u)^3.$$

Параметр T_0 и знаменатель этого выражения положительны.

Для эффективности скользящего режима достаточно, чтобы величина $M''(u)$ была больше нуля, т. е. наклоны функций $\varphi(u)$ и $T(u)$ были противоположны. В том случае, когда зависимости $\varphi(u)$ и $T(u)$ нелинейны, но дифференцируемы в нуле, для эффективности скользящего режима достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$(26) \quad \varphi'(0) T'(0) < 0.$$

Для многих технологических объектов, в которых управляющим воздействием является изменение расхода материальных или энергетических потоков, характерно уменьшение постоянных времени с ростом u ; таким образом, $T'(u) < 0$. Из (26) в этом случае следует, что подобная нелинейность динамики способствует эффективности циклического режима при $\varphi'(u) > 0$ и препятствует при $\varphi'(u) < 0$.

4. Пример

Пусть статическая характеристика объекта имеет вид $\varphi(u) = 1 - e^{-\alpha u}$. Эта характеристика выпукла, и квазистатистический циклический режим заведомо нецелесообразен. Однако при $T(u_1) > T(u_2)$ среднее значение x в циклическом режиме может быть выше, чем в статическом. Пусть, например, функция $T(u)$ определяется только знаком управления и принимает значения T_1 при $u > 0$ и T_2 при $u < 0$.

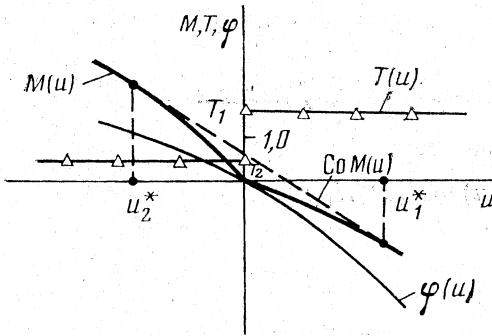


Рис. 2

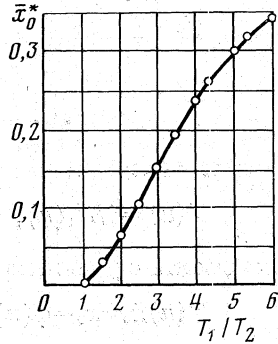


Рис. 3

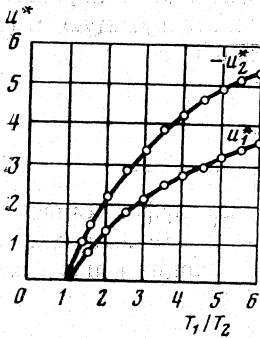


Рис. 4

Рис. 2. К определению эффективности циклического режима

Рис. 3. Зависимость максимального значения \bar{x}_0 от отношения постоянных времени

Рис. 4. Оптимальные базовые управления в зависимости от отношения постоянных времени

На рис. 2 показаны функция $M(u)$ и соответствующие фиксированным значениям T_1 и T_2 базовые управления u_1^* и u_2^* , а на рис. 3 и 4 — влияние отношения T_1/T_2 на эффективность циклического режима и значения u^* .

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим задачу об оптимальном циклическом режиме в постановке

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T x_0(t) dt \rightarrow \max / \dot{x}_i = f_i(x, u) \quad (i = \overline{0, n-1}),$$

(П.1)

$$x(0) = x(T), \quad u \in V_u, \quad \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = u^0.$$

В работе [3] введено понятие расширения экстремальной задачи и доказано, что оптимум критерия I^* задачи (П.1) не превосходит значения I_p^* следующей расширенной задачи:

$$(П.2) \quad I_p = \bar{x}_0 \rightarrow \max / \overline{f_i(x, u)} = 0 \quad (i = \overline{0, n-1}),$$

$$\bar{u} = u^0$$

в которой усреднение понимается или как усреднение по времени на интервале $(0, T)$, или как усреднение по множеству в пространстве векторов $y = (x, u)$, так что,

например,

$$\overline{f_i(x, u)} = \overline{f_i(y)} = \int_{V_y} f_i(y) P(y) dy.$$

Величина I_p^* может быть подсчитана [3] через функцию Лагранжа статической задачи, соответствующей усредненной постановке (П.2):

$$R = x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f_i(x, u) + \sum_{v=1}^m \xi_v (u_v - u_{v0}),$$

причем

$$(П.3) \quad I_p^* = R^* = \inf_{\lambda, \xi} \sup_{x, u} R(x, u, \lambda, \xi).$$

Если при значениях λ и ξ , удовлетворяющих требованиям (П.3), верхняя грань функции R по x достигается в единственной точке $x^*(\lambda, \xi)$, положение которой не зависит от u , то величина I_p^* достигается в условиях, когда мера $P(y)$ сосредоточена в точках, удовлетворяющих условиям $x = x^* = \text{const}$. Таким образом, соответствующий режим — статический или скользящий, что и утверждается в теореме 1.

Авторы выражают благодарность И. А. Буровому и В. С. Бойдеку за обсуждение статьи и полезные замечания.

Поступила в редакцию
1 февраля 1978 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Дудников Е. Е., Подиков Ю. М. Типовые задачи распределения материальных потоков непрерывного производства. Изд. ИАТ, М., 1973.
2. Цирлин А. М. Оптимизация в среднем и скользящие режимы в задачах оптимального управления. Техническая кибернетика, № 2, стр. 143—152, 1974.
3. Дукельский М. С., Цирлин А. М. Условия нестационарности оптимального установившегося режима управляемого объекта. Автоматика и телемеханика, № 9, стр. 5—11, 1977.

ON THE CHARACTERISTIC OF STEADY STATE FOR SOME TYPES OF DYNAMIC PLANTS

V. VOENME, Yu. N. SOFIEVA, A. M. TSIRLIN

The paper discusses the dependence of the mean performance criterion on the control mean. This is not an unambiguous characteristic because the fixed mean control is associated with a set of mean criterion values from a range. The upper bound of the characteristic is upward convex and the lower bound, downward convex; in the extreme points of the set of feasible controls these boundaries coincide with one another and with the plant static response. A class of plants is specified for which the computation of boundaries for the characteristic of steady state modes can be significantly simplified.