Ю. А. Казьмин, К интерполяционной задаче Абеля,
Матем. заметки, 1972, том 11, выпуск 4, 353–364

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 11, № 4 (1972), 353—364

УДК 517.5

К ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ АБЕЛЯ

Ю. А. Казьмин

Исследован класс единственности решения задачи о восстановлении целой функции экспоненциального типа $F(z)$ по заданным значениям ее производных $F^{(n)}(\pm hn)$, $n = 0, 1, 2,\ldots$ $(h > 0)$. Библ. 7 назв.

Хорошо известна задача Абеля о восстановлении целой функции экспоненциального типа $F(z)$ по заданным значениям ее последовательных производных:

$$F^{(n)}(hn) = A_n, \qquad n = 0,1,2, \ldots \tag{1}$$

(см. [1]). В (1), не теряя общности, считаем, что $h > 0$.

Прежде чем говорить о результатах, относящихся к интерполяционной задаче Абеля (1), а также о вопросах, которым посвящена эта заметка, дадим ряд необходимых для дальнейшего определений. Известно, что для всякой целой функции экспоненциального типа $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{t^{n+1}}$ всегда сходится в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки $|t| > \sigma$, $0 \leqslant \sigma < +\infty$, и определяет функцию $\gamma(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{t^{n+1}}$, которую обычно называют ассоциированной по Борелю с $F(z)$. Функции $F(z)$ и $\gamma(t)$ связаны соотношением

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{zt} \gamma(t)\, dt, \tag{2}$$

которое носит название преобразования Бореля для $F(z)$. В качестве контура интегрирования Γ в (2) берется замкнутая жорданова кривая, содержащая «внутри себя» все особенности функции $\gamma(t)$. Кривая Γ разбивает комплексную плоскость C на внутреннюю и внешнюю области, которые соответственно обозначаются символами $\operatorname{int}\Gamma$ и $\operatorname{ext}\Gamma$. Ясно, что $\operatorname{int}\Gamma \cup \Gamma \cup \operatorname{ext}\Gamma = C$ и $\operatorname{int}\Gamma \cap \operatorname{ext}\Gamma = \phi$. Возвращаясь к (2), можем сказать, что выбор контура интегрирования Γ в борелевом представлении обусловлен единственным требованием: $\operatorname{supp}\gamma \subset \operatorname{int}\Gamma$. Преобразование (2) позволяет проделать следующую классификацию целых функций экспоненциального типа.

Определение. Пусть E — произвольное множество, $E \subset C$. Будем говорить, что целая функция экспоненциального типа $F(z)$ принадлежит классу $[1; E\}$, если множество всех особенностей S_γ функции $\gamma(t)$, ассоциированной по Борелю с $F(z)$, принадлежит E. (Коротко: $F(z) \in [1; E\} \Leftrightarrow S_\gamma \subset E$.).

Наличие единицы в символе $[1; E\}$ говорит о том, что порядок функции $F(z) \in [1; E\}$ всегда $\leqslant 1$.

В том случае, когда E — открытая область D, соответствующий класс будем обозначать символом $[1; D)$, а если $E=\overline{D}$ является замкнутой областью, то $[1; E\}=[1;\overline{D}]$. Класс целых функций роста не выше первого порядка и типа σ в наших терминах имеет следующее обозначение $[1; |z| \leqslant \sigma]$.

Однако, следуя установившейся традиции, мы сохраняем для этого класса прежний значок $[1; \sigma]$. Класс $[1; \sigma)$ определим соотношением $[1; \sigma) = \bigcup\limits_{\tau<\sigma} [1; \tau]$. Совершенно очевидно, что $[1, \sigma) = [1; |z| < \sigma)$.

Вернемся к задаче (1). В. Л. Гончаровым было показано, что задача (1) имеет единственное решение в классе $\left[1; \frac{0{,}278\ldots}{h}\right)$, и ряд Абеля $\sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}(hn)\frac{z(z-hn)^{n-1}}{n!}$ равномерно сходится к $F(z) \in \left[1; \frac{0{,}278\ldots}{h}\right)$ на $\forall$ компакте $K \subset C$ и тем самым восстанавливает $F(z)$ по числам A_n из (1) (см. [2], [3]). Затем было установлено, что задача Абеля (1) имеет единственное решение в классе $[1; 1/h)$, причем константа $1/h$, определяющая тип класса единственности, неулучшаема. В последнем нас убеждает пример функции $F(z) = ze^{-z/h} \in [1; 1/h]$, отличной от тождественного нуля, и удовлетворяющей равенствам

$$F^{(n)}(hn) = 0, \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{1°}$$

Более того, было обнаружено, что нерасширяемым классом единственности задачи (1) является класс $[1; U)$, где область $U = U(h)$ определяется следующим образом:

$$U = \left\{z = \rho e^{i\varphi}\colon\ 0 \leqslant \rho < \frac{\pi - |\varphi|}{h \sin|\varphi|},\ |\varphi| \leqslant \pi\right\}$$

(в связи со сказанным см., например, работы [3], [4]). Заметим, что кривая ∂U, являясь границей выпуклой области U, симметрична относительно действительной оси, пересекает вещественную ось в точке $x = -1/h$, а мнимую — в точках $\pm\pi i/2h$ и имеет две горизонтальные асимптоты $y = \pm\pi/h$ при $x \to +\infty$. Круг $|z| < 1/h$ является максимальным из всех кругов вида $|z| < r$, содержащихся в области U; его радиус и определяет тип $1/h$ класса единственности задачи (1) в терминах $[1; \sigma)$. Далее, различными авторами рассматривался вопрос о восстановлении $F(z) \in [1; U)$ по заданным производным (1). Задача Абеля может быть решена и в других классах единственности, отличных от $[1; U)$. (О методах, позволяющих решить задачу о восстановлении $F(z)$ по (1) см., например, [4] — [7].)

Обратим внимание на то, что область U является максимальной областью однолистности функции $w = ze^{hz}$, играющей важную роль при решении задачи Абеля. Отмеченное свойство области U используется в последующем и здесь при изучении вопроса, который мы сейчас сформулируем.

Целью этой статьи является исследование класса единственности следующей интерполяционной задачи:

$$F^{(n)}(\pm hn) = A_{\pm n},\quad n = 0,1,2,\ \ldots, \tag{3}$$

непосредственно примыкающей к задаче Абеля (1).

Строка (3) содержит несколько больше информации о поведении $F(z)$, чем строка (1). В связи с этим возникает вопрос, насколько обширнее класс единственности задачи (3) по сравнению с классом $[1; U)$ — максимально широким классом единственности задачи Абеля (1). Вопрос этот нетривиален еще и потому, что существуют задачи, по формулировке близкие к (1) и (3), в которых увеличение объема сведений о $F(z)$ не приводит к расширению класса единственности. Примером, иллюстрирующим сказанное, может служить следующий хорошо известный факт:

классы единственности интерполяционных задач $F(n)=A_n$ и $F(\pm n)=A_{\pm n}$, $n=0,1,2,\ldots$, совпадают.

Основной результат нашей заметки содержится в следующем утверждении.

ТЕОРЕМА 1. *Классом единственности интерполяционной задачи* (3) *является* $[1;\ U\cup -U)$, *где* $-U=\{z: -z\in U\}$.

Учитывая симметричность области U относительно вещественной оси, можно сказать, что $(-U)$ является зеркальным отражением области U относительно мнимой оси.

В терминах порядка и типа теорема 1 является окончательным результатом и может быть сформулирована следующим образом.

ТЕОРЕМА 2. *Класс* $[1;\ \pi/2h)$ *является классом единственности интерполяционной задачи* (3). *Класс* $[1;\ \pi/2h]$ *уже не обладает этим свойством.*

Другими словами, константа $\sigma=\pi/2h$ в формулировке теоремы 2, определяющая тип класса единственности $[1;\sigma)$ задачи (3), неулучшаема. В последнем нас убеждает пример функции $0\not\equiv F(z)=\sin\frac{\pi z}{2h}\in\left[1;\ \frac{\pi}{2h}\right]$, удовлетворяющей равенствам (3°) с $\{A_{\pm n}\}\equiv 0$.

В § 1 приводятся доказательства теорем 1 и 2; § 2 посвящен некоторым приложениям теорем 1 и 2.

§ 1. Доказательства теорем 1 и 2. Для доказательства теоремы 1 достаточно установить, что если $F(z)\in[1;\ U\cup -U)$ и

$$F^{(n)}(\pm hn)=0,\qquad n=0,1,2,\ \ldots,\tag{3°}$$

то $F(z)\equiv 0$. Последнее эквивалентно доказательству тождественного обращения в нуль функции $\gamma(t)$, ассоциированной по Борелю с функцией $F(z)\in[1;\ U\cup -U)$, удовлетворяющей соотношениям (3°). С помощью преобразования Бореля (2) запишем функционалы (3°) в следующем виде:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} z^n e^{\pm hnz}\gamma(z)\,dz=0,\qquad n=0,\ 1,\ 2,\ldots\tag{4}$$

В (4) контур Γ выбран симметричным относительно начала координат и обладает свойствами:

1. $\operatorname{supp}\gamma\subset\operatorname{int}\Gamma$,

2. $\Gamma \cup \operatorname{int} \Gamma \subset D_0$, где область D_0 определена соотношением

$$D_0 = \left\{ z = \rho e^{i\varphi}:\ 0 \leqslant \rho < \frac{2\pi - |\varphi|}{h \sin|\varphi|},\ 0 \leqslant |\varphi| \leqslant \pi \right\}.$$

Ясно, что контур Γ в (4) не представляет труда выбрать указанным образом, ибо по условию теоремы 1 компакт $S_\gamma \subset U \cup (-U) \subset D_0$. Система равенств (4) эквивалентна следующей:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma z^n e^{hnz} \gamma_j(z)\, dz = 0, \qquad n = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ j = 1,\ 2, \tag{5}$$

где $\gamma_1(z) = \dfrac{\gamma(z) - \gamma(-z)}{2}$ и $\gamma_2(z) = \dfrac{\gamma(z) + \gamma(-z)}{2}$. Заметим, что множества особенностей S_{γ_j}, $j = 1,2$, функций γ_j симметричны относительно начала координат, но тем не менее имеют место включения

$$S_{\gamma_j} \subset \operatorname{int}\Gamma \quad \text{и} \quad S_{\gamma_j} \subset U \cup (-U), \qquad j = 1, 2.$$

Рассмотрим сначала строку равенств (5), соответствующую значению индекса $j = 1$. Эта строка равносильна следующей бесконечной системе функциональных уравнений относительно $\gamma_1(z)$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma [W_0(z)]^{2n} \gamma_1(z)\, dz = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{6}$$

В (6) положено $W_0(z) = \sqrt{ze^{hz} + \dfrac{1}{he}}$, причем при определении функции $w = W_0(z)$ берется ветвь квадратного корня, принимающая положительные значения при вещественных, неотрицательных значениях z. Заметим, что функция $w = W_0(z)$ однолистно и конформно отображает область D_0 на комплексную плоскость W с разрезом вдоль отрицательной части вещественной оси от точки $-\dfrac{1}{\sqrt{he}}$ до $-\infty$. Пусть $G_0 = W_0(D_0) = \mathsf{W} \setminus [-\infty;\ -1/\sqrt{he})$. Обозначим через $Z_0(w)$ функцию, обратную к $W_0(z)$. Функция $Z_0(w)$ однолистно и конформно отображает область G_0 на D_0. Теперь соотношения (6) могут быть переписаны в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_w} w^{2n} Z_0'(w)\, \gamma_1(Z_0(w))\, dw = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

где $\Gamma_w = W_0(\Gamma) \subset G_0$. Представим функцию $\gamma_1(Z_0(w))$ в форме разности

$$\gamma_1(Z_0(w)) = \gamma_1^+(w) - \gamma_1^-(w). \tag{8}$$

В (8) функция $\gamma_1^+(w)$ регулярна в замкнутой области $\Gamma_w \cup \operatorname{int} \Gamma_w$, а $\gamma_1^-(w)$ регулярна в замкнутой области $\Gamma_w \cup \operatorname{ext} \Gamma_w$ ($\infty \in \operatorname{ext}\Gamma_w$) и обращается в нуль на бесконечности. Представление (8) позволяет переписать (7) таким образом:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_w} w^{2n} Z_0'(w)\,\gamma_1^-(w)\,dw = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{9}$$

Равенства (9) говорят о том, что главная часть функции $Z_0'(w)\,\gamma_1^-(w)$ является четной, а потому компакт S_{γ_1} — симметричен относительно точки $w = 0$. Итак, нами показано, что симметричное относительно начала координат $z = 0$ множество S_{γ_1} преобразованием $w = W_0(z)$ отображается на симметричное же относительно нового начала $w = 0$ множество $S_{\gamma_1^-} = W_0(S_{\gamma_1})$. Заметим, что $S_{\gamma_1^-} \cap [-1/\sqrt{he};\ -\infty) = \phi$. Однако, ввиду того, что компакт $S_{\gamma_1^-}$ симметричен относительно $w = 0$, одновременно также выполняется и такое соотношение: $S_{\gamma_1^-} \cap [1/\sqrt{he};\ +\infty) = \phi$. Но $Z_0([1/\sqrt{he};\ +\infty)) = [0;\ +\infty)$. Значит, $S_{\gamma_1^-} \cap [0;\ +\infty) = \phi$.

Свойство симметричности компакта S_{γ_1} относительно начала $z = 0$ позволяет сделать следующее заключение: $S_{\gamma_1} \cap (-\infty;\ 0] = \phi$. Это в свою очередь приводит к соотношениям

$$S_{\gamma_1} \cap (-\infty,\ +\infty) = \phi \quad \text{и} \quad S_{\gamma_1^-} \cap (-\infty;\ +\infty) = \phi.$$

Итак, доказано, что компакты S_{γ_1} и $S_{\gamma_1^-}$ не имеют общих точек с действительной осью. Поэтому каждый из компактов S_{γ_1} и $S_{\gamma_1^-}$ может быть представлен как объединение двух непересекающихся множеств, расположенных соответственно в верхней и нижней полуплоскостях. А именно,

$$S_{\gamma_1} = K_z^+ \cup K_z^- \quad \text{и} \quad S_{\gamma_1^-} = K_w^+ \cup K_w^-,$$

где

$$K_z^{\pm} = \{z;\ \operatorname{Im} z \gtrless 0, \quad z \in S_{\gamma_1}\},$$

$$K_w^{\pm} = \{w\colon \operatorname{Im} w \gtrless 0, \quad w \in S_{\gamma_1^-}\}.$$

Легко сообразить, что $W_0(K_z^+) = K_w^+$ и $W_0(K_z^-) = K_w^-$. При этом $K_z^+ = -K_z^-$, $K_w^+ = -K_w^-$ (лишний раз подчеркнем, что $K_z^+ \cap K_z^- = \phi$ и $K_w^+ \cap K_w^- = \phi$). Опираясь на перечисленные свойства компактов S_{γ_1} и $K_z^{\pm}$, $S_{\gamma_1^-}$ и $K_w^{\pm}$, а также свойства отображающей функции $w = W_0(z)$, мы вправе утверждать, что функция

$$w = W_0^*(z) = -W_0(-z) = -\sqrt{-ze^{-hz} + \frac{1}{he}},$$

осуществляющая однолистное и конформное отображение области $-D_0$, $-D_0 = \{z\colon -z \in D_0\}$ $(U \cup -U \subset -D_0!)$, на плоскость W с прямолинейным разрезом $\left[\frac{1}{\sqrt{he}};\ +\infty\right)$, обладает свойствами $W_0^*(S_{\gamma_1}) = S_{\gamma_1^-}$, причем $W_0^*(K_z^{\pm}) = K_w^{\pm}$. Обратим также внимание на то, что обе функции $W_0(z)$ и $W_0^*(z) = -W_0(-z)$ вещественны на действительной оси, и поэтому в комплексно сопряженных точках принимают комплексно сопряженные значения. Отмеченное качество функций $W_0(z)$ и $W_0^*(z)$ позволяет сделать вывод о том, что функции $W_0(z)$ и $W_0^*(z)$ отображают не только множества $K_z^{\pm}$ на соответственные $K_w^{\pm}$, но и они одновременно отображают компакты $C_z^{\pm} = K_z^{\pm} \cup \overline{K}_z^{\mp}$ соответственно на компакты $C_w^{\pm} = K_w^{\pm} \cup \overline{K}_w^{\mp}$ (черточка над знаком K здесь означает операцию комплексного сопряжения). Заметим, что каждый из компактов $C_z^{\pm}$ и $C_w^{\pm}$ симметричен относительно мнимой оси, и, более того, C_z^+ и C_z^-, C_w^+ и C_w^- попарно симметричны друг другу относительно действительной оси. Нетрудно сообразить, что $C_z^{\pm} \subset U \cup (-U)$ и $C_z^+ \cap C_z^- = \phi$.

Пусть теперь w_1 — произвольная точка компакта C_w^+. Тогда существует единственная пара точек z' и z'', z', $z'' \in C_z^+$, такая, что

$$W_0(z') = W_0^*(z'') = w_1.$$

Другими словами,

$$\sqrt{z' e^{hz'} + \frac{1}{he}} = -\sqrt{-z'' e^{-hz''} + \frac{1}{he}}. \tag{10}$$

Из (10) следует справедливость равенства

$$z' e^{hz'} = -z'' e^{-hz''}. \tag{11}$$

Заметим, что когда точка w_1 пробегает весь компакт C_w^+, то каждая из точек z' и z'', связанных соотношением (11), в свою очередь тоже пробегает весь компакт C_z^+. Теперь предположим, что компакт C_z^+ ($\sim K_z^+$) не пуст, и пусть

$$R = \max_{z \in C_z^+} \{|z|\}. \tag{12}$$

Очевидно, что $R > 0$. Выберем точку $z' = x' + iy' = Re^{i\varphi'} \in C_z^+$ с неотрицательной абсциссой $x' \geqslant 0$. Такой выбор точки z' возможен ввиду симметричности компакта C_z^+ относительно мнимой оси. Зафиксировав точку $z' = Re^{i\varphi'} \in C_z^+$, попытаемся найти точку $z'' = x'' + iy'' = \rho e^{i\varphi}, z'' \in C_z^+$, связанную с z' соотношением (11). Из (11) находим $Re^{hx'} = \rho e^{-hx''}$, откуда $\rho = Re^{h(x'+x'')}$. Помня о (12), отсюда приходим к выводу о необходимости выполнения неравенства $x'' \leqslant -x'$, т. е. точка $z'' \in C_z^+$ необходимо должна лежать во второй четверти или на мнимой оси. Это означает, что $z'' \in -U$. Но тогда точка $-z'' \in U$ (и $-z'' \in C_z^-$). А это невозможно, ибо функция ze^{hz} однолистна в U и поэтому равенство (11) не может выполняться ни при каком $-z'' \in U$, отличном от z'. Точки z' и $-z''$ в действительности различны, так как $z' \in C_z^+$, $-z'' \in C_z^-$ и при этом, как отмечалось выше, $C_z^+ \cap C_z^- = \phi$. Таким образом, предположение о непустоте множества C_z^+ ($\sim K_z^+$) привело к противоречию. Следовательно, $K_z^+ = \phi$. Но это означает, что функция $\gamma_1(z)$ не имеет особенностей во всей области $U \cup -U$, а значит, является аналитической в расширенной комплексной плоскости Z. По теореме Лиувилля $\gamma_1(z) \equiv \mathrm{const}$, а так как $\gamma_1(\infty) = 0$, то $\gamma_1(z) \equiv 0$.

Совершенно аналогичные рассуждения, проведенные для функции $\gamma_2(z)$, тоже приводят к тождеству $\gamma_2(z) \equiv 0$.

В итоге доказано, что $\gamma(z) = \gamma_1(z) + \gamma_2(z) \equiv 0$. Другими словами, установлено, что задача (3) в классе $[1; U \cup -U)$ имеет единственное решение, чем и завершено доказательство теоремы 1.

Теорема 2 является простым следствием из теоремы 1. Действительно, легко сообразить, что радиус r максимально большого круга $|z| < r$, содержащегося в области $U \cup -U$, как раз равен $\pi/(2h)$. Эта константа и определяет тип класса единственности $[1; \pi/(2h))$ задачи (3). Неулучшаемость константы $\pi/(2h)$ в формулировке теоремы 2 обсуждалась ранее (см. комментарии к теореме 2 во вводной части статьи).

§ 2. Следствия из теорем 1 и 2.

Обозначим через $A(D)$ пространство функций, аналитических в ограниченной, односвязной области D. Напомним, что топология в $A(D)$ определяется равномерной сходимостью на произвольном компакте $K \subset D$. Теоремы 1 и 2, а также известный принцип двойственности С. Банаха, устанавливающий связь между единственностью и полнотой, позволяют утверждать, что справедливы следующие предложения.

Следствие 1. *Система функций*

$$\{z^n e^{\pm hnz}\}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{13}$$

полна в $A(D)$, $D \subset U \cup -U$.

Следствие 2. *Система функций* (13) *полна в* $A(|z| < \pi/(2h))$ *и не полна в* $A(|z| < r)$, $r > \pi/(2h)$.

В следствии 2, таким образом, показано, что величина $\pi/(2h)$ является максимальным радиусом полноты системы (13).

Следствие 3. *Максимальный радиус полноты системы функций*

$$\{z^n \sin nhz;\ z^n \cos nhz\}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

равен $\pi/(2h)$.

Следствие 4. *Пусть* $F(z) \in [1; U \cup -U)$. *Для того чтобы система функций*

$$\{F^{(n)}(z \pm hn)\}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{14}$$

была полна в $A(D)$ при $\forall D$, необходимо и достаточно, чтобы ассоциированная по Борелю с $F(z)$ функция $\gamma(t)$ была отлична от рациональной.

Доказательство существенно использует упомянутый выше принцип двойственности С. Банаха, который для пространства $A(D)$ формулируется следующим образом: для того чтобы система функций $\{\varphi_j(z)\} \subset A(D)$, $j \in J$ была полна в $A(D)$, необходимо и достаточно, чтобы равенства

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi_j(z)\,\alpha(z)\,dz = 0, \qquad \forall j \in J, \tag{15}$$

для $\forall\, \alpha(t) \in A^*(D)$ были эквивалентны тождеству $\alpha(t) \equiv \equiv 0$. (В (15) L — замкнутая жорданова кривая, $L \cup \operatorname{int} L \subset D$, выбранная так, что функция $\alpha(t) \in A^*(D)$ регулярна в замкнутой области $L \cup \operatorname{ext} L$ (и обращается в нуль на бесконечности.). Преобразование Бореля (2) для $F(z) \in [1;\, U \cup -U)$ позволяет представить функции системы (14) в виде интегралов

$$F^{(n)}(z \pm hn) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma t^n e^{\pm hnt} e^{zt}\gamma(t)\,dt,$$

где $\operatorname{supp}\gamma \subset \operatorname{int}\Gamma \subset U \cup - U$, что в свою очередь дает возможность для нашего случая переписать (15) следующим образом:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \left\{\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma t^n e^{\pm hnt} e^{zt}\gamma(t)\,dt\right\}\alpha(z)\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma t^n e^{\pm hnt} A(t)\,\gamma(t)\,dt = 0,$$

где

$$A(t) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_L e^{zt}\alpha(z)\,dz \in [1;\ \operatorname{int} L).$$

По следствию 1 система (13) полна в $A(D')$, $\forall\, D' \subset U \cup (-U)$. Поэтому

$$A(t)\,\gamma(t) = \Phi^+(t), \qquad t \in \Gamma, \tag{16}$$

где $\Phi^+(t)$ — функция, аналитическая во всяком случае в замкнутой области $\Gamma \cup \operatorname{int}\Gamma$.

На этом мы заканчиваем всю работу подготовительного характера и переходим к непосредственному доказательству следствия 4.

Необходимость. Пусть $F(z) \in [1;\ U \cup -U)$ с ассоциированной по Борелю рациональной функцией $\gamma(t)$, порождает систему (14), полную в некотором $A(D)$. Покажем, что сделанное предположение приводит к абсурду. Для этого построим полином $P(t) \not\equiv 0$ такой, что функция $P(t)\gamma(t)$ является целой (т. е. $P(t)\gamma(t)$ — тоже полином и потому $\in [1;\ 0]$). Подберем комплексное число a так, чтобы функция $A(t) = e^{at}P(t)$ $(\not\equiv 0)$ принадлежала бы классу $[1;\ \mathrm{int} L)$, $L \cup \mathrm{int}\, L \subset D$. Это всегда можно сделать, так как хорошо известно, что результат умножения функции $\in [1;\ E\}$ на e^{at} принадлежит классу $[1;\ E + a\}$ ($E + a$ — множество, полученное из E сдвигом на вектор a). Тогда для $\gamma(t)$ и построенной функции $A(t) \not\equiv 0$ имеет место соотношение (16), отправляясь от которого в путь, обратный проделанному, т. е. от (16) к (15), мы приходим к выводу, что $\exists \alpha(t) \in A^*(D)$ и $\alpha(t) \not\equiv 0$, ортогональная ко всем функциям системы (14). Из принципа двойственности С. Банаха следует, что последовательность функций (14) не полна в $A(D)$, что противоречит сделанному выше предположению.

Достаточность. Пусть $F(z) \in [1;\ U \cup -U)$ и ассоциированная с ней по Борелю функция $\gamma(t)$ отлична от рациональной. Допустим, что тем не менее $\exists A(D)$, в котором система (14), порожденная упомянутой функцией $F(z)$, не является полной. По принципу С. Банаха тогда $\exists \alpha(t) \in A^*(D)$, $\alpha(t) \not\equiv 0$, ортогональная ко всем функциям системы (14), что немедленно приводит к равенству (16) с $A(t) \not\equiv 0$, если следовать по пути, проделанному в преддверии доказательства следствия 4. Из (16) вытекает справедливость соотношения $\gamma(t) = \dfrac{\Phi^+(t)}{A(t)}$. А это означает, что функция $\gamma(t)$ в области $\Gamma \cup \mathrm{int}\Gamma$ может иметь лишь конечное число полюсов, совпадающих с нулями функции $A(t)$. А так как к тому же функция $\gamma(t)$ регулярна в области $\Gamma \cup \mathrm{ext}\,\Gamma$, то отсюда делаем вывод о том, что функция $\gamma(t)$ является рациональной, что противоречит сделанному выше предположению об отличии от рациональной функции $\gamma(t)$. Этим завершено доказательство следствия 4.

Следствие 5. *Бесконечная система линейных уравнений*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pm hn)^k}{k!} x_{k+n} = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

имеет единственное решение в классе числовых последовательностей $(x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots)$, *обладающих свойством*

$$\limsup_{k\to\infty} |x_k|^{1/k} < \pi/(2h).$$

Имеются нетривиальные решения этой системы, удовлетворяющие соотношению

$$\limsup_{k\to\infty} |x_k|^{1/k} = \pi/(2h).$$

В заключение обратим внимание на одно небезынтересное явление (своеобразный «эффект раздвоения»).

Теорема 3. *Для любого комплексного* α *множество целых функций экспоненциального типа* $[1; U \cup -U)$ *является классом единственности следующей интерполяционной задачи*

$$\begin{cases} F^{(n)}(\alpha + hn) = A_n, \\ F^{(n)}(-\alpha - hn) = A_{-n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Доказательство справедливости этого утверждения почти дословно повторяет доказательство теоремы 1.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
30.IV.1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Abel N. H., Sur les fonctions génératrices et leurs déterminantes, Oeuvres, Christiania, 2, (1839), 77—88.

[2] Гончаров В. Л., Sur la convergence de la série d'Abel, Матем. сб., 43, № 1 (1935), 478—484.

[3] Гончаров В. Л., Интерполяционные процессы и целые функции, Успехи матем. наук, 3 (1937), 113—143.

[4] Гельфонд А. О., Исчисление конечных разностей, М., 1951.

[5] Boas R. P., Buck R. C., Polynomial expansions of analytical functions, Berlin — Götingen, 1958.

[6] Казьмин Ю. А., Проблема моментов в комплексной области, Вестник МГУ, матем. № 1 (1967), 3—11.

[7] Казьмин Ю. А., Об одной общей задаче из теории интерполяции, Докл. АН СССР, 194, № 6 (1970), 1251—1254.