



Общероссийский математический портал

Д. Е. Тишковский, О свойстве Бета в расширениях логик Лукасевича, *Сиб. матем. журн.*, 2002, том 43, номер 1, 183–187

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.87

18 марта 2025 г., 01:14:24



О СВОЙСТВЕ БЕТА В РАСШИРЕНИЯХ  
ЛОГИК ЛУКАСЕВИЧА  
Д. Е. Тишковский

**Аннотация:** Доказано, что необходимым условием того, чтобы консервативные аксиоматические расширения бесконечнозначной (или  $n$ -значной) логики Лукасевича обладали свойством определимости Бета, является наличие в языке этих расширений счетного множества (соответственно множества мощности  $n$ ) неэквивалентных относительно данных расширений константных термов. Библиогр. 2.

В последнее время большое внимание уделяется так называемым нечетким логическим системам, характерными примерами которых являются бесконечнозначная и  $n$ -значные логики Лукасевича. Следующим простым примером легко опровергнуть интерполяционную теорему Крейга в бесконечнозначной логике Лукасевича. Рассмотрим формулу  $(p \wedge \neg p) \supset (q \vee \neg q)$ . Данная формула верна в логике Лукасевича. Но она не имеет интерполянта, так как интерполянт не должен содержать пропозициональных переменных, т. е. должен быть константным термом, а все константные термы эквивалентны в логике Лукасевича либо константе  $\perp$  («ложь»), либо константе  $\top$  («истина»). Исходя из данного примера, можно предположить, что для выполнимости в логике Лукасевича теоремы Крейга в языке логики не хватает пропозициональных констант.

В данной работе доказано, что необходимым условием того, чтобы консервативные аксиоматические расширения бесконечнозначной (или  $n$ -значной) логики Лукасевича обладали свойством определимости Бета, является наличие в языке этих расширений счетного множества (соответственно множества мощности  $n$ ) неэквивалентных относительно данных расширений константных термов.

### 1. Определения

Пусть алфавит пропозиционального языка  $\mathcal{L}_0$  включает в себя счетное множество пропозициональных переменных  $p, q, r, \dots$ , пропозициональные константы  $\top$  и  $\perp$ , логические связки  $\wedge, \vee, \neg, \supset$  и вспомогательные символы  $(, )$ . Через  $\text{Fog}$  обозначим множество формул языка  $\mathcal{L}_0$ . Для любых формул  $A$  и  $B$  выражение  $A \equiv B$  служит сокращением формулы  $(A \supset B) \wedge (B \supset A)$ .

Далее будем рассматривать только те пропозициональные языки, которые являются обогащением языка  $\mathcal{L}_0$  новыми пропозициональными константами и логическими связками. Пропозициональные константы и логические связки всякого рассматриваемого языка будем называть *логическими символами*.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Гуманитарного научного фонда (код проекта 00-03-00108).

Формулы без пропозициональных переменных будем называть *константными термами*.

*Логикой* будем называть всякое множество формул некоторого языка  $\mathcal{L}$ , замкнутое относительно *modus ponens* и пропозиционального правила подстановки. Через  $\vdash_L$  будем обозначать обычное отношение выводимости в логике  $L$ .

Пусть множество функциональных символов алгебры  $\mathcal{A}$  содержит множество логических символов языка  $\mathcal{L}$ . *Интерпретацией*  $v$  формул языка  $\mathcal{L}$  в алгебре  $\mathcal{A}$  называется произвольный гомоморфизм из алгебры всех формул языка  $\mathcal{L}$  в указанную алгебру. Формула  $A$  называется *истинной* в данной алгебре при данной интерпретации  $v$ , если ее значение  $vA$  совпадает с  $\top$ . Формула  $A$  *общезначима* в данной алгебре, если она истинна в этой алгебре при любой интерпретации.

Пусть  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  — произвольные алгебры,  $L$  — логика. Будем говорить, что  $\mathcal{B}$  является  *$L$ -расширением* алгебры  $\mathcal{A}$ , если выполнены следующие условия:

- 1) множество функциональных символов алгебры  $\mathcal{B}$  содержит множество логических символов языка логики  $L$ ;
- 2) множество логических символов языка логики  $L$  содержит множество функциональных символов алгебры  $\mathcal{A}$ ;
- 3) все формулы из  $L$  общезначимы в алгебре  $\mathcal{B}$ .

*Канонической алгеброй*  $\mathcal{A}_\omega$  бесконечнозначной логики Лукасевича называется алгебра

$$\mathcal{A}_\omega = \langle \mathbb{Q}[0, 1], \wedge, \vee, \neg, \supset, \perp, \top \rangle,$$

где  $\mathbb{Q}[0, 1]$  — множество всех рациональных чисел отрезка  $[0, 1]$  вещественной прямой, и для всех  $a, b \in \mathbb{Q}[0, 1]$

- 1)  $\perp \equiv 0$  и  $\top \equiv 1$ ;
- 2)  $a \wedge b \equiv \min(a, b)$ ;
- 3)  $a \vee b \equiv \max(a, b)$ ;
- 4)  $a \supset b \equiv \min(1, 1 - a + b)$ ;
- 5)  $\neg a \equiv 1 - a$ .

*Канонической алгеброй*  $n$ -значной логики Лукасевича ( $n < \omega$ ) называется подалгебра  $\mathcal{A}_n$  алгебры  $\mathcal{A}_\omega$ , порожденная множеством

$$\mathbb{Q}_n[0, 1] = \left\{ 0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1 \right\}.$$

Бесконечнозначной и  $n$ -значной *логиками Лукасевича* [1] называются множества формул языка  $\mathcal{L}_0$ , общезначимых в алгебре  $\mathcal{A}_\omega$  и соответственно в алгебре  $\mathcal{A}_n$ . Бесконечнозначную логику Лукасевича будем обозначать через  $L_\omega$ , а  $n$ -значную логику Лукасевича — через  $L_n$ .

Пусть  $A$  — формула,  $r_1, \dots, r_k$  — *различные* пропозициональные переменные. Будем писать  $A(r_1, \dots, r_k)$  вместо  $A$ , если все пропозициональные переменные из  $A$  содержатся среди  $r_1, \dots, r_k$ . Если  $q$  — пропозициональная переменная, то через  $A(q, r_1, \dots, r_k)$  будем обозначать формулу, полученную из  $A(p, r_1, \dots, r_k)$  заменой символа  $p$  на  $q$ . Пусть далее  $p, q, r_1, \dots, r_k$  — *различные* пропозициональные переменные.

Говорим, что формула  $A(p, r_1, \dots, r_k)$  *неявно определяет* переменную  $p$  в логике  $L$ , если выполнено  $A(p, r_1, \dots, r_k), A(q, r_1, \dots, r_k) \vdash_L p \equiv q$ . Формула  $A(p, r_1, \dots, r_k)$  *явно определяет* переменную  $p$  в логике  $L$ , если существует такая формула  $B(r_1, \dots, r_k)$ , что  $A(p, r_1, \dots, r_k) \vdash_L p \equiv B(r_1, \dots, r_k)$ . Логика  $L$  обладает *свойством Бета* (в [2] это свойство называется свойством Бета В2),

если любая формула  $A(p, r_1, \dots, r_k)$ , определяющая в логике  $L$  переменную  $p$  неявно, определяет в логике  $L$  эту же переменную  $p$  явно.

## 2. Вспомогательные леммы

Пусть  $A$  и  $B$  — формулы. Введем следующее обозначение:

$$A \supset_0 B \Leftrightarrow B, \quad A \supset_{m+1} B \Leftrightarrow A \supset (A \supset_m B).$$

Для каждого  $n \geq 0$  пусть  $A_n(p)$  — формула

$$A_n(p) \Leftrightarrow ((p \supset_n \perp) \supset p) \equiv (p \supset_{n+1} \perp).$$

**Лемма 2.1.** Для любой интерпретации переменных  $v : \text{For} \rightarrow A_\omega$  при  $n \geq 1$

$$v(p \supset_n \perp) = \begin{cases} n(1 - vp), & \text{если } vp \geq \frac{n-1}{n}, \\ 1 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Доказательство проводится индукцией по  $n \geq 1$ . При  $n = 1$  имеем  $v(p \supset_n \perp) = v(p \supset \perp) = vp \supset v\perp = vp \supset 0 = 1 - vp$ , что обеспечивает базис индукции.

Предположим, что утверждение леммы верно при  $n \leq m$ . Докажем, что утверждение леммы верно и при  $n = m + 1$ .

1. Пусть  $vp \geq \frac{m}{m+1}$  или, в другой записи,  $vp \geq m(1 - vp)$ . Тогда  $vp \geq \frac{m-1}{m}$ . По индукционной гипотезе  $v(p \supset_m \perp) = m(1 - vp)$ . Следовательно,

$$vp \geq v(p \supset_m \perp).$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} v(p \supset_{m+1} \perp) &= vp \supset v(p \supset_m \perp) \\ &= 1 - vp + v(p \supset_m \perp) = (1 - vp) + m(1 - vp) = (m + 1)(1 - vp), \end{aligned}$$

что и требовалось.

2. Пусть  $vp < \frac{m}{m+1}$ , т. е.  $vp < m(1 - vp)$ .

(а) Предположим, что  $vp < \frac{m-1}{m}$ . Тогда по индукционной гипотезе

$$v(p \supset_m \perp) = 1.$$

Отсюда

$$v(p \supset_{m+1} \perp) = vp \supset v(p \supset_m \perp) = vp \supset 1 = 1.$$

(б) Пусть  $vp \geq \frac{m-1}{m}$ . Тогда по индукционному предположению  $v(p \supset_m \perp) = m(1 - vp)$ . Так как  $vp < m(1 - vp)$ , имеем

$$v(p \supset_{m+1} \perp) = vp \supset v(p \supset_m \perp) = 1.$$

**Лемма 2.2.** Для всякой интерпретации  $v : \text{For} \rightarrow \mathcal{A}_\omega$  при  $n \geq 0$  верна эквивалентность

$$\mathcal{A}_\omega \models v(A_n(p)) = 1 \iff vp = \frac{n}{n+1}.$$

Доказательство. Пусть  $vp = \frac{n}{n+1}$ . Тогда по лемме 2.1 имеем

$$v(p \supset_n \perp) = n(1 - vp) = \frac{n}{n+1}.$$

Следовательно,

$$v(A_n(p)) = v(p \supset_n \perp) \supset vp \equiv vp \supset v(p \supset_n \perp) = 1.$$

Обратно, пусть  $v(A_n(p)) = 1$ .

1. Пусть  $vp \geq v(p \supset_n \perp)$ . Тогда  $v(A_n(p)) = 1 \equiv 1 - vp + v(p \supset_n \perp)$ . Если  $vp < \frac{n-1}{n}$ , то по лемме 2.1  $v(p \supset_n \perp) = 1$ . Отсюда

$$1 > \frac{n-1}{n} > vp \geq v(p \supset_n \perp) = 1,$$

что невозможно. Значит,  $vp \geq \frac{n-1}{n}$ . Тогда по лемме 2.1  $v(p \supset_n \perp) = n(1 - vp)$ . Отсюда

$$1 - vp + v(p \supset_n \perp) = (n+1)(1 - vp)$$

и, поскольку  $v(A_n(p)) = 1$ , получаем  $vp = \frac{n}{n+1}$ .

2. Пусть  $vp < v(p \supset_n \perp)$ . Тогда

$$v(A_n(p)) = 1 - v(p \supset_n \perp) + vp \equiv 1.$$

Если  $vp < \frac{n-1}{n}$ , то по лемме 2.1  $v(p \supset_n \perp) = 1$ . Но тогда, учитывая  $v(A_n(p)) = 1$ , получаем  $vp = 1$ , что несовместно с  $vp < \frac{n-1}{n}$ . Таким образом,  $vp \geq \frac{n-1}{n}$ . По лемме 2.1  $v(p \supset_n \perp) = n(1 - vp)$ . Значит,

$$1 = 1 - v(p \supset_n \perp) + vp = (n+1)(1 - vp),$$

и, следовательно,  $vp = \frac{n}{n+1}$ .

**Лемма 2.3.**  $A_n(p)$  неявно определяет  $p$  в  $L_\omega$ .

**Доказательство.** Пусть  $v(A_n(p)) = v(A_n(p')) = 1$  в  $\mathcal{A}_\omega$ . Тогда по лемме 2.2  $vp = vp' = \frac{n}{n+1}$  и, значит,  $v(p \equiv p') = 1$ . Поскольку  $v$  произвольно, имеем  $A_n(p), A_n(p') \models_{\mathcal{A}_\omega} p \equiv p'$ . Так как  $L_\omega$  полна относительно  $\mathcal{A}_\omega$ , получаем  $A_n(p), A_n(p') \vdash_{L_\omega} p \equiv p'$ , что и требовалось доказать.

Используя те же рассуждения, что и в доказательстве леммы 2.3, нетрудно получить следующее аналогичное утверждение для конечнозначных логик Лукасевича.

**Следствие 2.4.**  $A_n(p)$  неявно определяет  $p$  в  $L_{n+2}$ .

### 3. Основной результат

**Теорема 3.1.** Пусть  $L$  — аксиоматическое консервативное расширение логики  $L_\omega$  ( $L_n$ ,  $n < \omega$ ). Если  $L$  обладает свойством Бета, то для всякого рационального числа  $a$  из  $\mathbb{Q}[0, 1]$  (соответственно из  $\mathbb{Q}_n[0, 1]$ ) существует константный терм  $t_a$  в языке логики  $L$  такой, что в любом  $L$ -расширении канонической алгебры Лукасевича  $\mathcal{A}_\omega$  (соответственно  $\mathcal{A}_n$ ) терм  $t_a$  интерпретируется как  $a$ .

**Доказательство.** Докажем сначала утверждение теоремы для бесконечнозначной логики Лукасевича.

Пусть  $L$  — аксиоматическое консервативное расширение логики  $L_\omega$ . Тогда по лемме 2.3  $A_n(p)$  неявно определяет  $p$  в  $L$ . Так как  $L$  обладает свойством Бета, существует формула без пропозициональных переменных  $B_n$  такая, что  $A_n(p) \vdash_L p \equiv B_n$ .

Пусть  $\mathcal{A}$  —  $L$ -расширение  $\mathcal{A}_\omega$ . Тогда, поскольку  $L$  — аксиоматическое расширение  $L_\omega$ , верно  $A_n(p) \models_{\mathcal{A}} p \equiv B_n$ .

Пусть интерпретация переменных  $v$  такова, что  $vp = \frac{n}{n+1}$ . Тогда по лемме 2.2  $v(A_n(p)) = 1$ . Следовательно,  $v(p \equiv B_n) = 1$ , и, значит,  $v(B_n) = \frac{n}{n+1}$ . Поскольку  $B_n$  не содержит пропозициональных переменных,  $v(B_n) = \frac{n}{n+1}$  при любой интерпретации  $v$  (т. е.  $B_n$  — константный терм, значением которого всегда является  $\frac{n}{n+1}$  в  $\mathcal{A}$ ).

Из  $B_n$  получаем константный терм  $\neg B_n$ , значением которого в  $\mathcal{A}$  будет  $\frac{1}{n+1}$ . В силу того, что для любых  $a$  и  $b$  из  $\mathcal{A}_\omega$  выполнено  $\neg a \supset b = \min(1, a + b)$ , из  $\neg B_n$  легко получить константные термы, значением которых в  $\mathcal{A}$  будут все  $\frac{m}{n+1}$  ( $1 \leq m \leq n$ ).

Для логик  $L_1$  и  $L_2$  утверждение теоремы тривиально, ибо язык этих логик уже содержит необходимые пропозициональные константы  $\top$  и  $\perp$ .

Корректное применение следствия 2.4 вместо леммы 2.3 и замена в вышеприведенном доказательстве утверждения теоремы о бесконечнозначной логике Лукасевича алгебры  $\mathcal{A}_\omega$  алгеброй  $\mathcal{A}_n$  для  $n \geq 3$  дает доказательство утверждения теоремы о  $n$ -значных логиках Лукасевича.

**Следствие 3.2.** *Логик  $L_\omega$  и  $L_n$  ( $n \geq 3$ ) не обладают свойством Бета.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Утверждение немедленно следует из теоремы, поскольку все константные термы в любой логике Лукасевича эквивалентны либо константе  $\top$ , либо константе  $\perp$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.3.** Известно, что противоречивая логика  $L_1$  и классическая пропозициональная логика  $L_2$  обладают свойством Бета.

Таким образом, логики  $L_1$  и  $L_2$  являются единственными логиками в семействе логик Лукасевича, которые обладают свойством Бета.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Wojcicki R. On matrix representation of consequence operations of Łukasiewicz's sentential calculi // Selected Papers on Łukasiewicz Sentential Calculi. Ed. by R. Wojcicki. Warszawa: Wydawnictwo Polskiej Akademii Nauk, 1977. P. 101–112.
2. Максимова Л. Л. Модальные логики и многообразия модальных алгебр: свойства Бета, интерполяция и амальгамируемость // Алгебра и логика. 1992. Т. 31, № 2. С. 145–166.

*Статья поступила 4 декабря 2000 г.*

*Тишковский Дмитрий Евгеньевич*

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090*

*tishkov@math.nsc.ru*