

**КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОСТЫХ МУЛЬТИРОСТОКОВ КРИВЫХ**

П. А. Колгушкин, Р. Р. Салдыков

Мультиросток кривой в  $\mathbb{C}^n$  — это множество  $F = (f_1, \dots, f_k)$  ростков аналитических отображений  $f_i: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ , где  $\text{Im } f_i \cap \text{Im } f_j = \{0\}$  для  $i \neq j$  ( $f_1, \dots, f_k$  называются компонентами мультиростка). Мультиросток является локальной параметризацией ростка приводимой кривой в нуле. Мультиросток называется простым, если у него имеется окрестность, пересекающая лишь конечное число орбит действия группы  $A$  право-левых координатных замен.

Мы классифицируем стабильно простые особенности мультиростков в конечномерных комплексных пространствах произвольной размерности относительно стабильной эквивалентности. Определения и мотивировку задачи см. в [1].

Обозначим через  $G_n$  мультиросток, состоящий из первых  $n$  координатных осей в  $\mathbb{C}^N$ , через  $(t^m \times k)$  — неприводимую кривую вида  $(t^m, \dots, t^m)$  ( $k$  мономов).

**ТЕОРЕМА.** *Каждый стабильно простой мультиросток стабильно эквивалентен одному и только одному мультиростку из следующего списка ( $m, n, k$  и  $l$  — натуральные числа):*

**1. Пары кривых с неособой первой компонентой.** Здесь первая компонента равна  $(t, 0)$ . В списке мы указываем только вторую компоненту.

**1.1. Мультиростки с обеими неособыми компонентами:**

**1.**  $(0, t)$ ; **2.**  $(t, t^k)$ ,  $k > 1$ .

**1.2. Мультиростки со второй компонентой кратности два:**

**1.**  $(t^2, t^{2m+1})$ ; **2.**  $(t^2, t^{2m+1} + t^{2n})$ ,  $m < n < 2m$ ; **3.**  $(t^2, t^{2m+1}, t^{2n})$ ,  $m < n \leq 2m$ ; **4.**  $(t^2, t^{2m+1} + t^{2n}, t^{2s})$ ,  $m < n < s \leq 2m$ ; **5.**  $(t^2, t^{2n} + t^{2m+1})$ ,  $n \leq m$ ; **6.**  $(t^2, t^{2n}, t^{2m+1})$ ,  $n \leq m$ ; **7.**  $(t^2, t^{2n} + t^{2m+1}, t^{2s+1})$ ,  $n \leq m < s < m + n$ ; **8.**  $(t^{2r+1}, t^2)$ ; **9.**  $(0, t^2, t^{2r+1})$ ;

**1.3. Мультиростки с 3-струей  $((t, 0), (0, t^3))$ :**

**1.**  $(t^{3m+1}, t^3)$ ; **2.**  $(t^{3m+1}, t^3, t^{3n+2})$ ,  $m \leq n \leq 2m$ ; **3.**  $(t^{3m+1} + t^{3n+2}, t^3)$ ,  $m \leq n < 2m$ ; **4.**  $(t^{3m+1} + t^{3n+2}, t^3, t^{3l+2})$ ,  $m \leq n < l \leq 2m$ ; **5.**  $(t^{3m+2}, t^3)$ ; **6.**  $(t^{3m+2}, t^3, t^{3n+1})$ ,  $m < n \leq 2m + 1$ ; **7.**  $(t^{3m+2} + t^{3n+1}, t^3)$ ,  $m < n \leq 2m$ ; **8.**  $(t^{3m+2} + t^{3n+1}, t^3, t^{3l+2})$ ,  $m < n < l \leq 2m + 1$ ; **9.**  $(0, t^3, t^{3m+1})$ ; **10.**  $(t^{3n+2}, t^3, t^{3m+1})$ ,  $m \leq n < 2m$ ; **11.**  $(t^{3l+2}, t^3, t^{3m+1} + t^{3n+2})$ ,  $m \leq n \leq l < 2m$ , кроме  $n = l = 2m - 1$ ; **12.**  $(0, t^3, t^{3m+2})$ ; **13.**  $(t^{3l+1}, t^3, t^{3m+2} + t^{3n+1})$ ,  $m < n \leq l \leq 2m$ , кроме  $n = l = 2m$ ; **14.**  $(t^{3n+1}, t^3, t^{3m+2})$ ,  $m < n \leq 2m$ ; **15.**  $(0, t^3, t^{3m+1}, t^{3n+2})$ ,  $m \leq n < 2m$ ; **16.**  $(0, t^3, t^{3m+1} + t^{3n+2})$ ,  $m \leq n < 2m - 1$ ; **17.**  $(0, t^3, t^{3m+1} + t^{3n+2}, t^{3l+2})$ ,  $m \leq n < l < 2m$ ; **18.**  $(0, t^3, t^{3m+2}, t^{3n+1})$ ,  $m < n \leq 2m$ ; **19.**  $(0, t^3, t^{3m+2} + t^{3n+1})$ ,  $m < n < 2m$ ; **20.**  $(0, t^3, t^{3m+2} + t^{3n+1}, t^{3l+1})$ ,  $m < n < l \leq 2m$ .

**1.4. Мультиростки с 3-струей  $((t, 0), (t^3, 0))$ :**

**1.**  $(t^3, t^4)$ ; **2.**  $(t^3, t^4, t^5)$ ; **3.**  $(t^3, t^4, t^5, t^6)$ ; **4.**  $(t^3, t^4 + t^6)$ ; **5.**  $(t^3, t^4 + t^6, t^9)$ ; **6.**  $(t^3, t^4, t^6)$ ; **7.**  $(t^3, t^4, t^9)$ ; **8.**  $(t^3, t^5, t^6)$ ; **9.**  $(t^3, t^5, t^6 + t^7)$ ; **10.**  $(t^3, t^5, t^6, t^7)$ ; **11.**  $(t^3, t^5 + t^6, t^7)$ ; **12.**  $(t^3, t^5 + t^6, t^7, t^9)$ ; **13.**  $(t^3, t^5 + t^6, t^9)$ ; **14.**  $(t^3, t^5, t^7)$ ; **15.**  $(t^3, t^5, t^7, t^9)$ ; **16.**  $(t^3, t^5, t^9)$ ; **17.**  $(t^3, t^5 + t^6, t^{12})$ ; **18.**  $(t^3, t^5 + t^6)$ ; **19.**  $(t^3, t^5)$ ; **20.**  $(t^3, t^5, t^{12})$ ; **21.**  $(t^3, t^5 + t^9)$ ; **22.**  $(t^3, t^5 + t^9, t^{12})$ ; **23.**  $(t^3, t^6, t^7, t^8)$ .

**1.5 Мультиростки с 4-струями  $((t, 0), (0, t^4))$  и  $((t, 0), (t^4, 0))$ :**

**1.**  $(t^5, t^4, t^6, t^7)$ ; **2.**  $(t^6, t^4, t^5, t^7)$ ; **3.**  $(0, t^4, t^5, t^7)$ ; **4.**  $(0, t^4, t^5, t^6)$ ; **5.**  $(0, t^4, t^5, t^6, t^7)$ ; **6.**  $(t^7, t^4, t^5, t^6)$ ; **7.**  $(0, t^4, t^6, t^7, t^9)$ ; **8.**  $(0, t^4, t^6, t^7)$ ; **9.**  $(t^9, t^4, t^6, t^7)$ ; **10.**  $(t^4, t^5, t^6, t^7)$ ; **11.**  $(t^4, t^5, t^6, t^7, t^8)$ .

**1.6. Мультиростки с 5-струей  $((t, 0), (0, t^5))$ :**

---

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 01-01-00739) и NWD-RFBR 047.008.005.

1.  $(t^9, t^5, t^6, t^7, t^8)$ ; 2.  $(0, t^5, t^6, t^7, t^8)$ ; 3.  $(0, t^5, t^6, t^7, t^8, t^9)$ ; 4.  $(t^8, t^5, t^6, t^7, t^9)$ ; 5.  $(0, t^5, t^6, t^7, t^9)$ .

**2. Пары кривых с обеими особыми компонентами.**

**2.1. Бесконечные серии:** Здесь первая компонента равна  $(t^2, t^{2m+1})$ . Мы указываем только вторую компоненту (здесь  $m \leq n$ ).

1.  $(t^{2n+1}, t^2)$ ; 2.  $(t^{2n+1}, t^2, t^{2n+3})$ ; 3.  $(0, t^2, t^{2n+1})$ ; 4.  $(t^{2n+1}, 0, t^2)$ ; 5.  $(0, t^{2n+1}, t^2)$ ; 6.  $(0, 0, t^2, t^{2n+1})$ .

**2.2. Индивидуальные особенности:** Здесь первая компонента равна  $(t^2, t^3)$ .

1.  $(t^2, 0, t^3, t^4)$ ; 2.  $(t^2, 0, t^3)$ ; 3.  $(0, 0, t^3, t^4, t^5)$ ; 4.  $(0, t^5, t^3, t^4)$ ; 5.  $(t^5, 0, t^3, t^4)$ ; 6.  $(0, 0, t^3, t^4)$ ; 7.  $(0, t^4, t^3, t^5)$ ; 8.  $(t^4, 0, t^3, t^5)$ ; 9.  $(0, 0, t^3, t^5, t^7)$ ; 10.  $(0, t^7, t^3, t^5)$ ; 11.  $(t^7, 0, t^3, t^5)$ ; 12.  $(0, 0, t^3, t^5)$ .

**3. Мультиростки с неособыми компонентами:**

1.  $G_n$ ; 2.  $G_n, (t \times k, 0, \dots, 0), 1 < k \leq n$ ; 3.  $G_n, (t, t^m \times k, 0, \dots, 0), 1 \leq k < n, m > 1$ ; 4.  $G_n, (t, 0 \times (n-1), t^m), m > 1$ ; 5.  $(t_1, 0, 0), (t_2, t_2^2, 0), (t_3, 0, t_3^2)$ .

**4. Мультиростки с одной особой компонентой.**

**4.1 Серии, содержащие произвольное число неособых компонент:** Здесь неособая часть мультиростка равна  $G_n, n \geq 2$ . Мы указываем только особую компоненту.

1.  $(0 \times n, t^2, t^{2m+1})$ ; 2.  $(t^{2m+1} \times k, 0 \times (n-k), t^2), 1 \leq k \leq n$ ; 3.  $(t^2 \times k, 0 \times (n-k), t^3), 1 < k \leq n$ ; 4.  $(t^2, 0 \times (n-1), t^3, t^4)$ ; 5.  $(t^2, t^4 \times k, 0 \times (n-k-1), t^3), 0 \leq k < n$ ; 6.  $(0 \times n, t^3, t^4, t^5)$ ; 7.  $(t^5 \times k, 0 \times (n-k), t^3, t^4), 0 \leq k \leq n$ ; 8.  $(t^4 \times k, 0 \times (n-k), t^3, t^5), 0 \leq k \leq n$ ; 9.  $(0 \times n, t^3, t^5, t^7)$ ; 10.  $(t^7 \times k, 0 \times (n-k), t^3, t^5), 1 \leq k \leq n$ .

**4.2. Бесконечные серии, содержащие две неособые компоненты:** Здесь неособая часть мультиростка равна  $G_2$ . Мы указываем только особую компоненту.

1.  $(t^2, t^2, t^{2m+1}), m \geq 2$ ; 2.  $(t^2, t^2 + t^{2m+1}, t^{2m+3}), m \geq 1$ ; 3.  $(t^2, t^2 + t^{2m+1}), m \geq 1$ ; 4.  $(t^2, 0, t^{2m+1}, t^{2n}), m < n \leq 2m$ ; 5.  $(t^2, t^{2n}, t^{2m+1} + t^{2n}), m < n < 2m$ ; 6.  $(t^2, t^{2n}, t^{2m+1}), m < n \leq 2m$ ; 7.  $(t^2, 0, t^{2m+1} + t^{2n}, t^{2l}), m < n < l \leq 2m$ ; 8.  $(t^2, t^{2l}, t^{2m+1} + t^{2n}), m < n < l \leq 2m$ ; 9.  $(t^2, 0, t^{2m+1} + t^{2n}), m < n < 2m$ ; 10.  $(t^2, 0, t^{2m+1})$ ; 11.  $(t^2, t^{2m+1}, t^{2n}), m < n \leq 2m+1$ ; 12.  $(t^2, t^{2m+1} + t^{2n}, t^{2l}), n < l \leq 2m+1$ ; 13.  $(t^2, t^{2m+1} + t^{2n}), m < n \leq 2m$ ; 14.  $(t^2, t^{2m+1})$ ; 15.  $(t^2, 0, t^{2m}, t^{2n+1}), 1 < m \leq n$ ; 16.  $(t^2, t^{2n+1}, t^{2m}), m \leq n$ ; 17.  $(t^2, 0, t^{2m} + t^{2n+1}, t^{2l+1}), m \leq n < l < m+n$ ; 18.  $(t^2, t^{2l+1}, t^{2m} + t^{2n+1}), m \leq n \leq l < m+n$ ; 19.  $(t^2, 0, t^{2m} + t^{2n+1}), 1 < m \leq n$ ; 20.  $(t^2, t^{2m}, t^{2n+1}), 1 < m \leq n$ ; 21.  $(t^2, t^{2m} + t^{2n+1}, t^{2l+1}), m \leq n < l \leq m+n$ ; 22.  $(t^2, t^{2m} + t^{2n+1}), 1 < m \leq n$ .

**4.3. Индивидуальные особенности:** Здесь неособая часть мультиростка равна  $G_2$ .

1.  $(t^3, t^3, t^4, t^5)$ ; 2.  $(t^3, 0, t^4, t^5, t^6)$ ; 3.  $(t^3, t^6, t^4, t^5)$ ; 4.  $(t^3, 0, t^4, t^5)$ ; 5.  $(0, 0, t^4, t^5, t^6, t^7)$ ; 6.  $(t^7, t^7, t^4, t^5, t^6)$ ; 7.  $(t^7, 0, t^4, t^5, t^6)$ ; 8.  $(0, 0, t^4, t^5, t^6)$ ; 9.  $(t^6, t^6, t^4, t^5, t^7)$ ; 10.  $(t^6, 0, t^4, t^5, t^7)$ ; 11.  $(0, 0, t^4, t^5, t^7)$ .

**4.4. Серии с неособой частью  $((t_1, 0), (t_2, t_2^2))$ :**

1.  $(0, 0, t^2, t^{2m+1})$ ; 2.  $(0, t^{2m+1}, t^2)$ ; 3.  $(t^{2m+1}, 0, t^2)$ .

**5. Мультиростки с двумя особыми и одной неособой компонентами.** Первая и третья компоненты равны  $(t, 0, 0, 0)$  и  $(0, 0, t_2^2, t_2^3)$  соответственно. В следующем ниже списке  $m \geq 1$ .

1.  $(0, t_1^2, 0, 0, t_1^{2m+1})$ ; 2.  $(t_1^{2m+1}, t_1^2, 0, t_1^{2m+1})$ ; 3.  $(0, t_1^2, 0, t_1^{2m+1})$ ; 4.  $(t_1^{2m+1}, t_1^2, t_1^{2m+1}, 0)$ ; 5.  $(0, t_1^2, t_1^{2m+1}, 0)$ ; 6.  $(t_1^{2m+1}, t_1^2, 0, 0)$ .

Доказательство, в основном, основано на методе полных трансверселей, см. [2].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] В. И. Арнольд // Труды МИАН. 1999. Т. 226. С. 27–35. [2] J. W. Bruce, N. P. Kirk, A. A. du Plessis // Nonlinearity. 1997. V. 10. № 1. P. 253–275.