

КЛОКОВ В. В.

## ЗАЗОР ПРИ СТАЦИОНАРНОМ СИММЕТРИЧНОМ АНОДНОМ ФОРМООБРАЗОВАНИИ ДВУГРАННЫМ КАТОДОМ

В монографии [1] отмечается, что расчет стационарного межэлектродного зазора на основе одномерного приближения (по „методу  $\cos \theta$ “) неприменим в тех случаях, когда линии электрического тока не параллельны, как, например, в окрестностях острых кромок инструмента. Упомянутые в ([1], стр. 126) способы расчета базируются на громоздких расчетах квазистационарных приближений, выполняемых либо численно, либо аналоговым методом на токопроводной бумаге.

Предложенный и развитый в [2—5] метод исключает необходимость расчета таких приближений.

В настоящей работе приводится расчет геометрических параметров межэлектродного зазора при стационарном режиме электрохимического формообразования. Двугранный катод совершает поступательное движение с постоянной скоростью в направлении своей плоскости симметрии.

### Математическая постановка задачи

В силу симметрии рассматривается (рис. 1) только половина межэлектродного зазора  $D_{z_1}$ . Обработка детали (анода) осуществляется двугранным инструментом (катодом). Плоскости граней простираются до бесконечности, угол раствора между ними  $\pi - 2\beta\pi$ , подача осуществляется по оси симметрии. При  $0 < \beta\pi < \pi/2$  — инструмент — клин, при  $\beta\pi = \pi/2$  — пластинка. Зазор в стационарном режиме определяется величиной расстояния  $AB = h_1$  и очертанием границы анода  $AC$ .

На основании допущений, описанных в ([1], гл. 9, [6]), скалярный потенциал  $u$  электрического поля в зазоре, являясь решением уравнения Лапласа  $\Delta u(x_1, y_1) = 0$  в  $D_{z_1}$ , принимает постоянные значения на электродах  $u_{BC} = u_k = \text{const}$ ,  $u_{AC} = u_a = \text{const}$  и удовлетворяет условию стационарности [2]

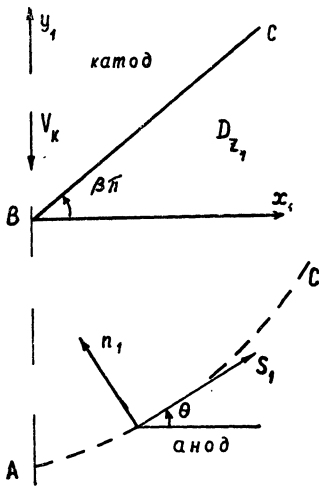


Рис. 1.

анодной обработки  $(\partial u / \partial n_1)|_{AC} = a_1 \cos \theta$ . Здесь  $\partial / \partial n_1$  — производная в направлении внутренней к зазору нормали,  $\theta$  — угол между осью  $x$  и касательной к  $AC$ ,  $a_1$  — постоянная,  $a_1 = (V_k d) / (\eta \mathcal{E} \kappa)$ ,  $V_k$  — скорость движения катода,  $d$  — удельный вес обрабатываемого металла,  $\eta$  — выход по току,  $\mathcal{E}$  — электрохимический эквивалент металла анода,  $\kappa$  — электропроводность электролита.

Введем гармонически сопряженную к  $u$  функцию  $v$  (силовую функцию электрического поля). В силу симметрии считаем, что  $v_{AB} = 0$ . Произведя замену переменных по формулам

$$\varphi = v / (u_k - u_a), \quad \psi = (u - u_a) / (u_k - u_a),$$

$$x = x_1 / a, \quad y = y_1 / a, \quad n = n_1 / a,$$

где  $a$  — характерная длина,  $a = (u_k - u_a) / a_1$ , устанавливаем: искомые геометрические размеры зазора должны быть таковы, чтобы гармонически сопряженные функции  $\varphi$  и  $\psi$  удовлетворяли следующим условиям

$$\psi_{BC} = 1, \quad \psi_{AC} = 0, \quad \varphi_{AB} = 0, \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_{AC} = \cos \theta. \quad (2)$$

Положение границы  $AC$  заранее неизвестно; однако на ней определены два граничных условия.

В силу известной гидродинамической аналогии рассматриваемая задача по определению границы анода интерпретируется так же, как задача по определению границы плоского симметричного безвихревого течения идеальной несжимаемой жидкости около угла по заданному годографу скорости на этой неизвестной границе [2].

### Решение задачи в случае $-\frac{1}{2} < \beta < \frac{1}{2}$

Отыскание границы  $AC$  осуществляется с использованием комплексных переменных и функций:  $z = x + iy$ ,  $W = \varphi + i\psi$ ,  $dW/dz = (\partial\varphi/\partial x) + i(\partial\psi/\partial x) = (\partial\psi/\partial y) - i(\partial\varphi/\partial y)$ . Вещественная и мнимая части  $dW/dz$  определяют компоненты вектора напряженности  $E_x$ ,  $E_y$  электрического поля или вектора плотности тока  $i_x$ ,  $i_y$  по формулам

$$E_x = -(\partial u / \partial x_1) = -((u_k - u_a) / a) (\partial \psi / \partial x) = -a_1 (\partial \psi / \partial x) = -\kappa i_x,$$

$$E_y = -a_1 (\partial\psi/\partial y) = -xi_y.$$

Введем обозначения  $V_x = \partial\varphi/\partial x = \partial\psi/\partial y$ ,  $V_y = \partial\varphi/\partial y = -(\partial\psi/\partial x)$ ,  $dW/dz = \bar{V} = V_x - iV_y$ ,  $|\bar{V}| = V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$ ; тогда условию (2) можно придать вид

$$V = \cos \theta. \quad (3)$$

Последнее равенство означает зависимость нормальной составляющей вектора напряженности (или плотности тока) на границе анода от угла  $\theta$ . Поскольку  $V_x = V \cos \theta$ ,  $V_y = -V \sin \theta$ , то на неизвестной границе  $AC$  имеем в силу (3) равенство

$$(V_x - (1/2))^2 + (-V_y)^2 = (1/2)^2. \quad (4)$$

Поэтому, если задать в качестве вспомогательных независимых переменных  $V_x$ ,  $-V_y$ , то в плоскости их изменения (годографа скорости при гидродинамической интерпретации) область  $D_{\bar{V}}$  определения функции  $W$  становится известной. Она ограничена (рис. 2) лучами  $AB$  и  $CB$  и дугой окружности, уравнение которой имеет вид (4). В области  $D_{\bar{V}}$  аналитическая функция  $W(\bar{V})$  определяется по условиям (1). Совершим конформное ([7], с. 44) отображение области  $D_{\bar{V}}$  на верхнюю полуплоскость  $D_{\zeta_1}$  переменной  $\zeta_1$  при следующем соответствии точек:  $A$  переходит в  $\zeta_1 = 0$ ,  $C$  — в  $\zeta_1 = 1$ ,  $B$  — в бесконечность. Отображение осуществляется следующей последовательностью:

$\zeta_1 = 1/\bar{V}$  — отображение на треугольник,

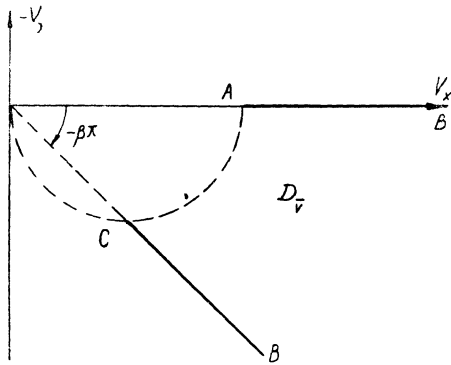


Рис. 2. Область вспомогательной переменной.

$$\zeta = -\frac{i \operatorname{tg} \beta \pi \Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\frac{3}{2}) \Gamma(\frac{1}{2}-\beta)} \zeta_1^2 F\left(\frac{1}{2} + \beta, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \zeta_1\right) + 1. \quad (5)$$

Здесь  $\Gamma$  — гамма-функция,  $F$  — гипергеометрическая функция. Функция  $W$  определяется в  $D_{\zeta_1}$  по условиям (1). Выражение  $\zeta_1$  через  $W$  имеет вид

$$\zeta_1 = \frac{\cos \pi i W - 1}{\cos \pi i W + 1}. \quad (6)$$

Отображение областей  $D_z$  физической плоскости и плоскости комплексного потенциала  $W$  устанавливается на основе равенств  $dW/dz = \bar{V} = 1/\zeta$ ,  $dz = \zeta dW$  и при соответствии точек  $W = i$ ,  $z = 0$  имеет вид

$$z = \int_i^W \zeta(\zeta_1(W)) dW. \quad (7)$$

Явный вид функций, входящих в (7), представлен равенствами (5), (6).

Определим  $h$  — расстояние  $AB$ , измеряемое в плоскости безразмерных переменных  $x$ ,  $y$ . На линии  $AB$

$$dz = idy, \quad \varphi = 0, \quad d\varphi = 0, \quad 0 \leq \psi \leq 1,$$

поэтому в силу (7), (6), (5) можно получить

$$h(\beta) = 1 - B^{-1}\left(\frac{1}{2}, \beta\right) \int_0^1 \operatorname{tg} \frac{\pi\psi}{2} F\left(\frac{1}{2} + \beta, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\operatorname{tg}^2 \frac{\pi\psi}{2}\right) d\psi, \quad (8)$$

где  $B$  — бета-функция ([8], с. 23). Выражению (8), учитывая (4) формулу Куммера ([8], с. 113), можно придать вид

$$h(\beta) = 1 - 2B^{-1}\left(\frac{1}{2}, \beta\right) \int_0^1 \sin \frac{\pi\psi}{2} F\left(1 - \beta, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \sin^2 \frac{\pi\psi}{2}\right) d\psi. \quad (9)$$

Используя представление коэффициентов гипергеометрического ряда через гамма-функции ([8], с. 109), меняя порядок интегрирования и суммирования, что справедливо в силу равномерной сходимости ряда, после вычисления интегралов и преобразований гамма-функций ([8], (1), с. 17, (6), с. 18) получаем равенство

$$h(\beta) = 1 - \frac{\sin \beta\pi \Gamma\left(\frac{1}{2} + \beta\right)}{\pi^2} \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(1 - \beta + k)}{\left(k + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2} + k\right)} + R_n(\beta) \right]. \quad (10)$$

Равенство (10) используется для расчета. Здесь  $R_n(\beta)$  — остаточный член ряда из положительно определенных слагаемых, который не превосходит интеграла ([9], с. 302)

$$I_n(\beta) = \int_n^{\infty} \frac{\Gamma(1 - \beta + x)}{\left(x + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2} + x\right)} dx.$$

Для больших значений  $n$  интеграл определяется следующим равенством

$$I_n(\beta) = \frac{n^{-\frac{1}{2}-\beta}}{\frac{1}{2} + \beta} - \frac{\frac{7}{8} + \frac{\beta}{2} - \frac{\beta^2}{2}}{\frac{3}{2} + \beta} n^{-\frac{3}{2}-\beta} +$$

$$+ \frac{\frac{1}{8}\beta^4 + \frac{7}{8}\beta^3 + \frac{29}{48}\beta^2 + \frac{25}{48}\beta + \frac{749}{1152}}{\frac{5}{2} + \beta} n^{-\frac{5}{2}-\beta} + O(n^{-\frac{7}{2}-\beta}). \quad (11)$$

При получении (11) использовано асимптотическое разложение гамма-функций по формуле Стирлинга ([10], с. 53).

В физической плоскости переменных  $x_1, y_1$  расстояние  $AB$  равно

$$h_1 = ah(\beta) = \frac{\eta \partial x (u_k - u_a)}{V_k d} h(\beta).$$

Отсюда, в частности, следует равенство

$$V_k = \frac{\eta \partial x (u_k - u_a)}{h_1 d} h(\beta).$$

При заданных величинах  $\eta, \partial, x, u_k - u_a, h_1, d$  скорость движения катода в стационарном режиме определяется величиной угла  $\beta\pi$ .

Определим уравнения границы анодной поверхности. На линии  $AC$ :  $\psi = 0, d\psi = 0, W = \varphi, dW = d\varphi, 0 \leq \varphi < \infty$ , в силу (7), (6), (5) и разделения вещественной и мнимых частей имеем равенства

$$x = \varphi, \quad (12')$$

$$y = -h(\beta) + 2B^{-1} \left( \frac{1}{2}, \beta \right) \int_0^{\varphi} \frac{e^{\pi s} - 1}{e^{\pi s} + 1} F \left( \frac{1}{2} + \beta, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \left( \frac{e^{\pi s} - 1}{e^{\pi s} + 1} \right)^2 \right) ds. \quad (12'')$$

Это параметрическое уравнение анодной поверхности; подставив  $\varphi$  из (12') в (12''), можно записать уравнение контура как функцию  $x$ .

Разложение функции  $y(\beta, x)$  в окрестности  $x = 0$  определяется рядом Тейлора;

$$y(\beta, x) = -h(\beta) + B^{-1} \left( \frac{1}{2}, \beta \right) \left[ \frac{\pi x^2}{2} - \frac{\pi^3 x^4}{48} \left( \frac{1}{2} - \beta \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\pi^5 x^6}{960} \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \left( \frac{5}{6} - \beta \right) - \frac{\pi^7 x^8}{1290240} \left( \frac{1}{2} - \beta \right) (60\beta^2 - 120\beta + 61) + \dots \right]. \quad (13)$$

При больших значениях  $x$ -ов граница определяется соотношением

$$y(\beta, x) = -h(\beta) + x \operatorname{tg} \beta (1 + r_0(\beta, x)), \quad (14)$$

где остаток

$$r_0(\beta, x) < \frac{4\Gamma\left(\beta - \frac{1}{2}\right)x^{-1}(1 - e^{-\pi x})^{-2}}{\pi\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\operatorname{tg} \beta\pi\Gamma(\beta)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}. \quad (15)$$

При выводе соотношений (14), (15) использованы разложения гипергеометрической функции в окрестности единицы, оценка этой функции сверху и теорема о среднем [9].

### Частные случаи решения

В случае  $\beta\pi = \pi/2$  формообразование осуществляется пластинкой, движущейся поступательно в направлении своей плоскости. В этом случае область  $D_{\nabla}$  лежит в четвертом квадранте и ограничена координатными линиями и полуокружностью (4). Выражение (7) в этом случае принимает вид  $z = (i/2)(W^2 + 1) + W - i$ , а граница  $AC$  представляет собой параболу  $y = (x^2 - 1)/2$ . Расстояние  $h$  в этом случае равно  $1/2$ . Эти же результаты можно получить из равенств (8), (12), используя преобразования гипергеометрической функции по формуле (13), ([8], с. 110).

В частных случаях  $\beta = 1/3$ ,  $\beta = 1/4$ ,  $\beta = 1/6$ , граница  $AC$  в окрестности точки  $A$ , согласно (13), определяется соответственно уравнениями

$$\begin{aligned} y(1/3, x) &= -0.5928 + 0.3733x^2 - 0.2559 \cdot 10^{-1}x^4 + \\ &\quad + 0.05809 \cdot 10^{-1}x^6 - 0.01483 \cdot 10^{-1}x^8 + \dots, \\ y(1/4, x) &= -0.6553 + 0.2995x^2 - 0.3079 \cdot 10^{-1}x^4 + \\ &\quad + 0.06555 \cdot 10^{-1}x^6 - 0.03876 \cdot 10^{-1}x^8 + \dots, \\ y(1/6, x) &= -0.7373 + 0.2155x^2 - 0.2954 \cdot 10^{-1}x^4 + \\ &\quad + 0.09717 \cdot 10^{-1}x^6 - 0.02782 \cdot 10^{-1}x^8 + \dots \end{aligned}$$

В другом частном случае при  $\beta = 0$ ,  $h = 1$ ,  $y(0, x) = -1$  — анодная поверхность параллельна катодной.

**Результаты расчета** геометрических параметров зазора представлены на рис. 3, 4 и в таблице. На рис. 3 дана зависимость минимального расстояния  $h$  от  $\beta$ , рассчитанная по формуле (10).

Установлено, что в зависимости от увеличения угла раствора минимальное расстояние от излома границы до детали при стационарном режиме увеличивается; это расстояние минимально в случае пластинки, граница анода при этом является параболой. На рис. 4 указаны границы анодных

поверхностей в плоскости безразмерных переменных  $x, y$  для различных углов  $\beta\pi$ . Сравнение результатов расчета дает качественное совпадение с результатами, полученными методами электро моделирования и представленными в [1] (с. 130, рис. 9, 17). Расчеты осуществлялись с использованием ЭВМ „Наири“. Число членов рядов, представляющих решение, определялось заданной точностью вычисления границ  $O(0,001)$ .

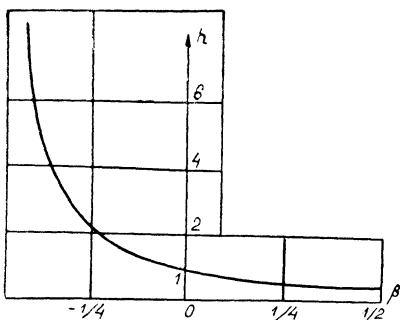


Рис. 3. Зависимость минимального расстояния от  $\beta$ .

Результаты расчета можно применять при проектировании катодных устройств в областях излома границы при подаче катода-инструмента в направлении оси симметрии.

Автор благодарен В. Н. Мишину за помощь в численных расчетах.

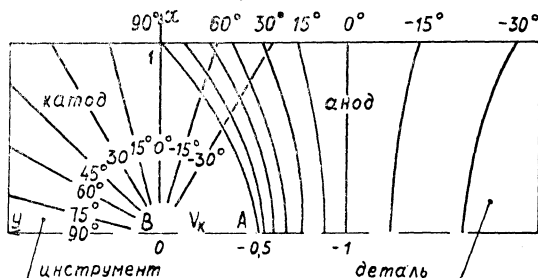


Рис. 4. Границы катода-инструмента и анода-детали в зависимости от угла раствора.

Таблица координат точек анодной поверхности (верх. — пригл. по (13), нижн. — точн. по (12)).

$\beta\pi^\circ \backslash x$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
90°	-0.5000	-0.4800 -0.4800	-0.4200 -0.4200	-0.3200 -0.3200	-0.1800 -0.1800	0.0000 0.0000	0.2199 0.2200	0.4799 0.4800
75°	-0.5433	-0.5257 -0.5258	-0.4733 -0.4735	-0.3868 -0.3872	-0.2674 -0.2684	-0.1168 -0.1188	0.0627 0.0598	— 0.2649
60°	-0.5928	-0.5779 -0.5779	-0.5337 -0.5337	-0.4615 -0.4616	-0.3632 -0.3635	-0.2415 -0.2419	-0.1007 -0.0996	0.0497 -0.0609
45°	-0.6553	-0.6433 -0.6434	-0.6081 -0.6082	-0.5511 -0.5514	-0.4745 -0.4751	-0.3815 -0.3817	-0.2780 -0.2740	-0.1770 -0.1545

$x \backslash \beta\pi^\circ$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
30°	-0.7373	-0.7287 -0.7287	-0.7035 -0.7036	-0.6631 -0.6633	-0.6096 -0.6099	-0.5461 -0.5455	-0.4788 -0.4722	-0.4226 -0.3921
15°	-0.8459	-0.8412 -0.8412	-0.8275 -0.8276	-0.8058 -0.8059	-0.7774 -0.7774	-0.7446 -0.7435	-0.7120 -0.7053	-0.6918 -0.6637
0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-15°	-1.2301	-1.2359 -1.2359	-1.2530 -1.2529	-1.2796 -1.2795	-1.3133 -1.3135	-1.3501 —	-1.3788 —	-1.3698 —
-30°	-1.5991	-1.6129 -1.6128	-1.6528 -1.6527	-1.7145 -1.7144	-1.7915 -1.7926	-1.8700 -1.8826	-1.9222 -1.9804	-1.8489 -2.0832
-45°	-2.2814	-2.3073 -2.3072	-2.3815 -2.3814	-2.4950 -2.4950	-2.6347 -2.6376	-2.7733 -2.8000	-2.8302 -2.9752	— -3.1584
-60°	-3.7768	-3.8245 -3.8246	-3.9608 -3.9611	-4.1674 -4.1685	-4.4174 -4.4268	-4.6499 -4.7186	-4.6776 -5.0313	-3.9665 -3.3566
-75°	-8.7335	-8.8428 -8.8468	-9.1531 -9.1569	-9.6193 -9.6247	-10.173 -10.200	-10.647 -10.846	-10.507 -11.534	— -12.244

## ЛИТЕРАТУРА

1. Де Барр А. Е., Оливер Д. А. Электрохимическая обработка. М., „Машиностроение“, 1973.
2. Клоков В. В., Костерин А. В., Нужин М. Т. О применении обратных краевых задач в теории электрохимической размерной обработки. — Труды семинара по краевым задачам, вып. 9. Казань, Изд-во КГУ, 1972, с. 132—140.
3. Костерин А. В., Клоков В. В. О решении задачи электрохимической размерной обработки сведением к задаче Гильберта. — Труды семинара по краевым задачам, вып. 10. Казань, Изд-во КГУ, 1973, с. 60—66.
4. Клоков В. В. Об одном методе расчета стационарного электрохимического формообразования. — Труды семинара по краевым задачам, вып. 12. Казань, Изд-во КГУ, 1975, с. 93—101.
5. Клоков В. В. Геометрия межэлектродного зазора при электрохимической резке. — В кн.: Размерная электрохимическая обработка деталей машин, ч. 1. Материалы IV Всесоюзной конференции. Тула, Изд-во ТПИ, 1975, с. 90—93.
6. Мороз И. И. и др. Электрохимическая обработка металлов. М., „Машиностроение“, 1969.
7. Коппфельс В., Штальман Ф. Практика конформных отображений. М., ИЛ, 1963.
8. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М., „Наука“, 1965.
9. Смирнов В. Н. Курс высшей математики, т. 1. М., ГИФМЛ, 1962.
10. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М., „Наука“, 1968.

Доложено на семинаре 29 января 1976 г.