A. S. Starkov, Degeneration and resonance phenomena in the wave propagation problems, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1981, Volume 104, 217–227

А.С.Старков

ЯВЛЕНИЕ ВЫРОЖДЕНИЯ И РЕЗОНАНСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ЗАДАЧАХ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН.

Дифференциальные уравнения, возникающие при описании различных физических процессов, весьма часто содержат малый параметр ε, характеризующий масштаб изменения вдоль выделенного направления – кривой S. Асимптотику решений при $\varepsilon \to 0$ принято искать в виде

$$\vec{U}_q(x,s) = \exp\left[\frac{i}{\varepsilon}\int_0^s \lambda_q(s)ds\right]\sum_{p=0}^{\infty} \vec{u}_{pq}(x,s)\varepsilon^p, \quad q=1,2,\ldots \tag{0.I}$$

Здесь s – длина дуги S, а $x=(x_1,x_2,\ldots x_n)$-система координат на ортогональной к S гиперповерхности X. Подстановка ряда (0.I) в исходные уравнения приводит к рекуррентной системе задач, при решении которых последовательно определяются функции $\lambda_q(s)$ и $u_{pq}(x,s)$. Функции $\lambda_q(s)$ будем называть собственными значениями (с.з.), а вектор-функции $\vec{U}_q(x,s)$ – нормальными волнами (н.в.).

Построение асимптотики решения по указанной схеме возможно, если кратность собственного значения постоянна при всех s. Для с.з. переменной кратности вычисления должны проводиться по другой схеме. Эти схемы были разработаны для случая совпадения двух с.з. только в одной точке $s=s_0$. Жорданова кратность с.з. (см.,напр., [I]) приводит к явлению локального вырождения. Возникающее при этом существенное взаимодействие н.в. описано в [2] - [5]. Случай нежордановой кратности разобран в [6]. Здесь взаимодействие н.в. в главном приближении отсутствует. При этом к разложению (0.I) добавляются члены, содержащие дробные степени ε. Порядок этих дополнительных членов зависит от порядка касания с.з.

Использовать анзац (0.I) нельзя и когда дисперсионные кривые не пересекаются, но происходит сближение соответствующих с.з. При этом появляется новый малый параметр – минимальное расстояние между с.з. Этот новый параметр может конкурировать с ε.

Во всех этих случаях линейная комбинация н.в. в результате взаимодействия в окрестности точки $s=s_0$ превращается в комбинацию этих же н.в., но с другими коэффициентами. Связь новых и старых коэффициентов описывается матрицей, называемой матрицей трансформации (в квантовой механике – матрицей рассеяния). Построить эту матрицу проще, чем найти равномерную по расстоянию от точки пересечения или сближения с.з. асимптотику решения. Эта матрица в частной задаче была сосчитана Л.Д.Ландау [7], использовавшего адиабатическую теорию возмущений. Можно находить матрицу трансформации и методом фазовых интегралов. В рамках этого метода задача сводится к отысканию коэффициентов Стокса, обеспечивающих однозначность функций $u_{pq}(x,s)$ и $u_{pq+1}(x,s)$ вдали от точки $s=s_0$ при обходе на плоскости λ точки ветвления, в которой $\lambda_q(s_0)=\lambda_{q+1}(s_0)$.

В данной работе исследуется поведение решения при сближении или пересечении произвольного числа с.з. Матрица трансформации в этом случае, как показано в [I] , будет блочнодиагональной.

§ I. Постановка задачи и поведение собственных значений.

Рассмотрим систему уравнений.

$$L\vec{u} \equiv \left[\sum_{k=0}^{\varkappa} L_k\left(-i\varepsilon\frac{\partial}{\partial s}\right)^k\right]\vec{u}(x,s)=0 \qquad \begin{matrix} x\in\Omega\subseteq R^n \\ -\infty<s<\infty \end{matrix} \tag{I.I}$$

$\vec{u}(x,s)$ - состоящая из m компонент вектор-функция со значениями в некотором гильбертовом пространстве $H(X)$, L_k - линейные операторы в $H(X)$, достаточно гладким образом зависящие от параметра s . Будем считать, что спектр оператора L_0 дискретен, а операторы $L_0^{-1}, L_0^{-1}L_k, k=1,2,\ldots \varkappa$ - вполне непрерывные операторы. Предполагается также, что для всех $\vec{u}(x,s)$ из $H(X)$ и для рассматриваемых значений λ

$$\sum_{k=1}^{\varkappa} \lambda_k^k (L_k\vec{u},\vec{u}) \geq c(\vec{u},\vec{u})$$

Постоянная c от s не зависит. Будем интересоваться решениями, имеющими характер волн, бегущих вдоль оси s в направлении возрастания этой координаты.

Такие задачи возникают в различных разделах физики сплошных сред (уравнения магнитогидродинамики, кристаллоптики, теории упругости) в квантовой химии, в радиофизике, в механике и т.д.

Пусть вдали от точки $s=s_0$ решение (I.I) есть линейная комбинация н.в. вида (0.I).В точке $s=s_0$ совпадают ν собственных значений, образуя с.з. λ_0 кратности ν . Чтобы найти асимптотику решения в окрестности точки $s=s_0$, изучим характер сингулярностей, возникающих в отдельной н.в. при приближении к точке $s=s_0$ Для этого необходимо знать поведение с.з. при $s\to s_0$. Поэтому представим операторы L_k в окрестности $s=s_0$ в следующем виде

$$L_k = \overset{0}{L_k} + \delta \overset{1}{L_k} + \delta^2 \overset{2}{L_k} + \cdots \quad , \ \delta = s-s_0 \tag{I.2}$$

Допустим, что нам известна каноническая система (см. [8]) собственных и присоединенных функций (с. и п.ф.) операторов $\overset{0}{L} = \sum_{k=0}^{\varkappa}\lambda^k \overset{0}{L_k}$ и сопряженного к нему $\overset{0}{L}{}^* - \varphi_\alpha(x)$ и $\Psi_\alpha(x)$ соответственно, $\alpha=1,2,\ldots\nu$. Пусть у оператора $\overset{0}{L}$ есть $\mathcal{J}$ собственных функций $-\varphi_{10}, \varphi_{20}, \dots, \varphi_{\gamma 0}$, у j -ой с.ф. есть $\ell_j - 1$ п.ф. $-\varphi_{j1}, \varphi_{j2}, \varphi_{j\,\ell_j-1}$. Чем больше номер с.ф., тем меньше у нее присоединенных $\ell_1 \geq \ell_2 \geq \dots \geq \ell_\gamma$, $\ell_1 + \ell_2 + \dots \ell_\gamma = \nu$. Дополнительно объединим с.ф. с одинаковым числом п.ф. и будем считать, что у нас есть R совокупностей с.ф., в τ -ую совокупность входит a_τ с.ф., у каждой с.ф. в совокупности $\mu_\tau - 1$ присоединенная.

Согласно обычным методам теории возмущений будем отыскивать с.ф. оператора $L = L^0 + \delta L^1 + \delta^2 L^2 + \dots$ в окрестности точки $s = s_0$ в виде

$$f = \sum_{\alpha=1}^{\nu} C_\alpha(s)\varphi_\alpha(x) \tag{I.3}$$

Применим к (I.3) оператор L и составим ν скалярных произведений с $\Psi_\beta(x)$ в $H(X)$. Получим систему уравнений для определения $C_\alpha(s)$

$$\sum_{\alpha=1}^{\nu} (L\varphi_\alpha, \Psi_\beta) \cdot C_\alpha(s) = 0 \;, \qquad \beta = 1, 2, \dots, \nu \tag{I.4}$$

Скалярные произведения $(L\varphi_\alpha, \Psi_\beta)$ при всех α и β представляют собой полиномы от $\lambda(s)$ с коэффициентами, разложенными в соответствии с (I.2) в ряды по степеням δ . Определитель (I.4) должен равняться нулю. Это дает возможность найти поведение с.з. в окрестности $s = s_0$. Затем из (I.4) получим формулы для $C_\alpha(s)$ при $s \to s_0$ с точностью до сомножителя для всех $C_\alpha(s)$ одинакового.

В системе (I.4) совершим подстановку

$$\zeta = \delta^{1/\mu_\tau} \;, \quad \xi = (\lambda - \lambda_0)\zeta^{-1}$$

Тогда уравнение для определения с.з. приводится к виду

$$P(\zeta, \xi) = 0 \tag{I.5}$$

Левая часть (I.5) есть полином по степеням ξ и ряд по степеням ζ . Если уравнение $P(0,\xi) = 0$ имеет простой корень, то по известной теореме теории функций (I.5) определяет единственную функцию $\xi(\zeta)$. Если есть аналитичность разложения (I.2), то и функция $\xi(\zeta)$ - аналитическая. Тогда функция $\lambda(s)$ в окрестности точки $s = s_0$ разлагается в ряд по степеням δ^{1/μ_τ} .

Для формулировки результата введем матрицы

$$A_k = \|a_{ij}\|, \; a_{ij} = \left(\frac{\partial L_0}{\partial \lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_0} \varphi_{i0}, \Psi_{j0}\right), \; k = 1, 2, \dots \gamma .$$

$$B_k = \|b_{ij}\|, \; b_{ij} = (L^1 \varphi_{i0}, \Psi_{j0}) \quad i, j = 1, 2, \dots k$$

В скалярные произведения a_{ij} и b_{ij} входят с.ф. и не входят п.ф.

Вычисления, схема которых изложена выше, позволяют доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА I. Пусть: I) разложение (I.2) аналитическое 2) $\det\|B_k\| \neq 0,\ k=1,2,\dots \gamma$, 3) числа $\sigma_{\tau t},\ t=1,2,\dots a_\tau$, определяемые из уравнения

$$\det\left\| B_k - \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{a_\tau} \end{pmatrix} A_k \right\| = 0 \qquad (I.6)$$

различны (E_{a_τ} – единичная матрица порядка a_τ). Тогда:
I) при малых δ с.з. оператора L простые и разлагаются в ряды

$$\lambda_{\tau t} = \lambda_0 + (\delta\cdot\sigma_{\tau t})^{1/\mu_\tau} + \sum_{p=2}^{\infty} e_p^{\tau t}\cdot \delta^{p/\mu_\tau}, \qquad (I.7)$$

2) отвечающие им с.ф. представляются рядами

$$f\tau t(x,s) = f_0^{\tau t}(x) - \sum_{p=1}^{\infty} f_p^{\tau t}(x)\cdot\delta^{p/\mu_\tau} \qquad (I.8)$$

$f_0^{\tau t} = \sum_{j=0}^{k} d_j^{\tau t}\cdot \varphi_{j0}(x)$, а столбец неизвестных $\mathcal{D}^{\tau t}$ определяется из уравнения

$$\left[B_k - \sigma_{\tau t}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{a_\tau} \end{pmatrix} A_k\right]\mathcal{D}^{\tau t} = 0 \qquad (I.9)$$

В силу простоты корня $\sigma_{\tau t}$ решение (I.9) единственно.
3) функции $f_p^{\tau t}$ есть линейные комбинации с. и п.ф. оператора L^0. В эти линейные комбинации входят п.ф. при $j \leq k$ до порядка p включительно, а при $j > k$ до порядка $q = p + \ell_j - \ell_k$
4) если условия I) или 3) не выполнены, то вместо бесконечных рядов в формулы (I.7), (I.8) должна быть поставлена величина $O(\delta^{1/\mu_\tau})$.

Доказательство теоремы I почти совпадает с доказательством теорем I и 2 из работы [9] . В этой работе, в отличии от настоящей, изучается поведение с.з. и с.ф. оператора, имеющего вид $L = L^0 + \lambda I$, I – единичный оператор.

§ 2. Локальное вырождение.

Из физических соображений ясно, что сильно взаимодействовать могут лишь волны, структура полей которых совпадает. Поэтому рассмотрим поведение отдельной совокупности из μ с.з. – $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_\mu$ расщепляющихся одинаковым образом. Уравнение для определения этих с.з. выглядит так

$$(\Delta\lambda)^{\mu} - \delta\sigma = 0\ , \quad \Delta\lambda = \lambda_k - \lambda_0 \qquad (2.I)$$

В § I мы фактически заменили дифференцирование по S умножением на $i\lambda$. Теперь мы можем проделать обратную замену $\Delta\lambda$ на $-i\frac{\partial}{\partial s}$
С помощью этой замены может быть сформулирована

ТЕОРЕМА 2. Формальное асимптотическое решение (I.I) в окрестности $S=S_0$ имеет вид

$$\vec{u}(x,s,\varepsilon)=const\,exp\left[\frac{i}{\varepsilon}\int_{S_0}^{S}\Lambda(s)ds\right]\left[\sum_{i=0}^{\mu-1}v^{(i)}(y)\cdot f_i(x)\cdot\varepsilon^{i/\mu+1}+O(\varepsilon)\right], \quad (2.2)$$

где $\Lambda(s)=\frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{\mu}\lambda_k(s)$ – усредненное с.з., $y=(s-s_0)\varepsilon^{-\mu/\mu+1}$, $v(y)$ – решение уравнения

$$\left[\left(-i\frac{d}{dy}\right)^{\mu}-\sigma_y\right]v(y)=0\,, \quad (2.3)$$

$v^{(i)}(y)$ – i-ая производная $v(y)$, $f_0(x)$ – с.ф., $f_i(x)$, $i=1,2,\mu-1$ – п.ф. отвечающие исследуемой совокупности с.з.

Чтобы доказать это утверждение, нужно перейти к координате $y=(s-s_0)\cdot\varepsilon^{-\mu/\mu+1}$, а решение искать в виде

$$\vec{u}(x,s,\varepsilon)=const\,exp\left[\frac{i}{\varepsilon}\int_{S_0}^{S}\Lambda(s)ds\right]\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\mu-1}A_{ij}(x,y)f_i(x)\varepsilon^{(i+j)/\mu+1}\,. \quad (2.4)$$

Подставим (2.4) в (I.I) и приравняем выражения при одинаковых степенях $\varepsilon^{i/\mu+1}$. Получим рекуррентную систему задач для определения A_{ij}. Из этой системы с использованием свойств с и п.ф. также как и в [5] выводится, что A_{00} удовлетворяет некоторому обыкновенному дифференциальному уравнению порядка μ. Коэффициенты этого уравнения однозначно определяются из условия сшивания формул (0.I) и (2.4) в некоторой промежуточной области. Для нахождения функций A_{i0} можно использовать формулу разложения с.ф. по степеням $\lambda-\lambda_0$ в окрестности кратного с.з. λ :

$$f=f_0+(\lambda-\lambda_0)f_1+\cdots+(\lambda-\lambda_0)^{\mu-1}f_{\mu-1}+O\left((\lambda-\lambda_0)^{\mu}\right)$$

или находить их, решая μ первых задач рекуррентной системы.

Решение уравнения (2.3) можно представить и обобщенным интегралом $\int exp\left[\rho^{\mu+1/\mu+1}+\rho y\right]d\rho$ по контуру, обеспечивающему его сходимость.

С соответствующими изменениями теорема 2 (также как и теорема I) сохраняет силу и тогда, когда оператор L не разлагается в операторный ряд Тейлора, но его можно представить в виде $L=L^0+g(s-s_0)L^1$ где $g(\delta)\to 0$ при $\delta\to 0$. Введем показатель h функции $g(\delta)$ как нижнюю грань таких чисел γ, что $g(\varepsilon^{\delta})=O(\varepsilon^{\mu(1-\gamma)})$. Если $h<1$, то в уравнении (2.3) в качестве независимой переменной нужно взять $y=(s-s_0)\varepsilon^{-h}$, а коэффициент перед функцией $v(y)$ заменить на $\sigma\, g(y\varepsilon^{h})$.

Анзац (2.4), пригодный только в окрестности точки $S=S_0$ может быть заменен на равномерный. Для этого нужно знать поведение данной совокупности с.з, при всех S. Зная зависимость

$\lambda_k(S)$, находим их среднее значение $\Lambda(S)=\frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{\mu}\lambda_k(S)$ и полином

$$(\Delta\lambda)^{\mu}+\alpha_2(S)(\Delta\lambda)^{\mu-2}+\dots+\alpha_{\mu}(S)\equiv\prod_{k=1}^{\mu}(\Delta\lambda-\Lambda(S)+\lambda_k(S)). \tag{2.5}$$

Заменим в (2.5) на и получим уравнение

$$\left[\left(-i\varepsilon\frac{d}{dS}\right)^{\mu}+\alpha_2(S)\left(-i\varepsilon\frac{d}{dS}\right)^{\mu-2}+\dots+\alpha_{\mu}(S)\right]V(S)=0 \tag{2.6}$$

Равномерная асимптотика решений (2.6) легко может быть выписана через решения (2.3). Анзац, построенный на основе решения (2.6) и его производных, будет пригоден вплоть до расстояний, определяемых другими сингулярностями задачи.

Таким образом, асимптотика решения системы уравнений (I.I) при наличии точки пересечения произвольного числа с.з. выражается через решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Матрица трансформации в главном приближении будет блочнодиагональной. Размер блоков определяется количеством п.ф. у собственной функции, отвечающей блоку. Каждый блок описывает связь экспоненциальных решений уравнений вида (2.2) до и после точки поворота. Взаимодействие между н.в., отвечающими собственным значениям из разных совокупностей, в главном приближении отсутствует. Величина этого взаимодействия может быть найдена методом работы [6] .

Если $\mu=2$, то получаем результат работ [2] - [5] : решение в окрестности точки пересечения двух с.з. описывается через функции Эйри.

Точки вырождения кратности большей двух не являются устойчивыми по отношению к малому изменению коэффициентов уравнений. Эти точки будут устойчивы, если имеется достаточное количество дополнительных параметров. Такими параметрами могут быть комплексные импедансы границы Ω или дополнительные координаты. Поэтому будем считать, что пространство S многомерно, т.е. $S=(S_1,S_2,\dots,S_\rho)$. При этом в уравнениях (I.I) под $\left(\frac{\partial}{\partial S}\right)^k$ подразумеваем $\left(\frac{\partial}{\partial S_1}\right)^{k_1}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial S_2}\right)^{k_2}\dots\cdot\left(\frac{\partial}{\partial S_\rho}\right)^{k_\rho}$ и считаем, что операторы L_k при $k\geq 1$ зависят только от S , т.е. являются операторами умножения на матрицу. Асимптотика решения при $\varepsilon\to 0$ вдали от точки вырождения строится при помощи многомерного метода ВКБ (см. [10]), а в окрестности точки вырождения выражается при помощи известного класса эталонных интегралов и их производных. Доказательство этого утверждения не представляет большого труда. Достаточно заметить, что задача о построении асимптотики решения (I.I) может быть сведена к рассмотренной в работе [II] .

В указанную схему укладывается случай, когда операторы L^0 ,

L^1 есть операторы умножения на матрицу. Таким образом, решение системы дифференциальных уравнений с характеристиками переменной кратности выражается либо при помощи эталонного интеграла, либо так как в работе [6] .

§ 3, Локальное резонансное взаимодействие.

Существует широкий класс задач, в которых с.з. не пересекаются, но встречаются точки их сильного сближения. Встречаются и задачи, в которых близки точки пересечения с.з. В этих случаях асимптотические формулы § 2 перестают правильно описывать решение. Асимптотика решения в окрестности таких точек выражается через некоторые специальные функции. Наша задача – найти эти функции. Ее удается решить только в простейших случаях.

В общем случае сближения или пересечения произвольного числа с.з. асимптотика решения ищется также, как в случае вырождения, в виде (I.3). Получаем систему уравнений (I.4). Как следует из результатов работы [I2] , уравнение для определения с.з. распадается на несколько уравнений, каждое из которых можно рассматривать по отдельности.

Вначале рассмотрим случай сближения двух с.з. – $\hat\lambda_1$ и $\hat\lambda_2$ Асимптотика решения в этом случае может быть получена в рамках уже разработанной теории. Для этого достаточно взять $\delta=(S-S_0)^2+C^2$, C – некоторая постоянная, пропорциональная минимальному расстоянию между с.з. Здесь существуют две близкие мнимые точки пересечения с.з. Решениями (2.6) при $\mu=2$ и $\alpha_2(S)=\sigma[(S-S_0)^2+C^2]$ являются функции параболического цилиндра, а матрица трансформации есть матрица связи этих функций при $S\gtrless 0$.

Асимптотика решения может быть получена и иначе – исходя из результатов работы [II] . Будем считать, что точка S_0 – точка наибольшего сближения дисперсионных кривых. Уравнение для определения с.з. в окрестности точки $S=S_0$ приводится к виду

$$(i\Delta\lambda(S))^2+(\alpha_0^2+\alpha_1^2(S-S_0)^2)=0, \tag{3.I}$$

α_0 и α_1 – некоторые константы. В (3.I) сделаем замену $\rho=\Delta\lambda-$ $-\alpha_2(S-S_0)$ и выразим $(S-S_0)$ через ρ

$$2i\alpha_2(S-S_0)=\frac{\alpha_1^2}{\rho}-\rho. \tag{3.2}$$

Правая часть формулы (3.2) есть линейная функция от ρ и ρ^{-1}. Простотой разложения (3.2) по степеням ρ и объясняется переход к переменной ρ. Если бы мы выразили $S-S_0$ через $\Delta\lambda$ (или другую переменную, отличающуюся от $\Delta\lambda$ на линейное по $(S-S_0)$ слагаемое), то при разложении правых частей полученных выражений по степеням $\Delta\lambda$ (или другой переменной) по формуле бинома возникали бы бесконечные ряды, сходимость которых при $S=S_0$ нарушалась.

Согласно [II] теперь мы должны найти такую функцию $F(\rho)$, что $\frac{\partial F}{\partial \rho}=\frac{\lambda^2}{\rho}-\rho$. Необходимо еще учесть дополнительный предэкспоненциальный множитель $\rho^{-1/2}$, возникающий при нормировки с.ф. Окончательно получаем следующее интегральное представление для решения

$$\int_\Gamma e^{\tau\rho+\frac{\rho^2}{2}-\alpha_1^2 \ln\rho}\cdot\rho^{-1/2}d\rho, \quad \tau=2i\alpha_2(S-S_0)\varepsilon^{-1/2}. \tag{3.3}$$

Если в качестве контура Γ взять контур, проходящий в плоскости ρ параллельно мнимой оси при $\operatorname{Re}\rho<0$, то получим известное представление функции $const\, e^{-z^2/4}\cdot\mathcal{D}_{\alpha_1^2-1/2}(z)$, $z=e^{-i\frac{\pi}{4}}\tau$.

Если же сближение двух с.з. рассматривается в случае многомерного пространства S, то нахождение асимптотики также начинаем с исследования поведения с.з. Нетрудно показать, что уравнение для определения с.з. может быть приведено к виду

$$(\Delta\lambda)^2-(\alpha_0^2+\sum_{i=1}^{\rho}\alpha_i^2 s_i^2)=0. \tag{3.4}$$

Начало координат перенесено в точку максимального сближения с.з. Коэффициенты $\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_3$ предполагаются отличными от нуля.

В окрестности начала координат решение (I.I) ищем в виде

$$\vec{u}(x,S)=e^{\frac{i}{\varepsilon}(k_1 s_1+\dots k_\rho s_\rho)}\sum_{j=0}^{\infty}\left[A_j(x,S)f_1(x)+B_j(x,S)f_2(x)\right]\varepsilon^{j/2} \tag{3.5}$$

где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ – с.ф., отвечающие сближающимся с.з., $k_1,k_2,\dots,k_\rho$ – числа. С учетом формул коммутации быстроосциллирующей экспоненты с дифференциальным оператором ([IO]), уравнение для определения главного члена искомых рядов приводится к виду

$$\left[\Delta_{\rho\varepsilon}+(\alpha_0^2+\sum_{i=1}^{\rho}\alpha_i^2 s_i^2)\right]A_0(S)=0 \tag{3.6}$$

где $\Delta_{\rho\varepsilon}=\varepsilon^2\sum_{i=1}^{\rho}\frac{\partial^2}{\partial s_i^2}$.

Будем считать, что нам известна функция $\Delta(S)$ при всех S. Для получения равномерной асимптотики, также как и в одномерном случае, заменим уравнение (3.6) на следующее

$$\left[\Delta_{\rho\varepsilon}+(\Delta\lambda(S))^2\right]A_0(S)=0. \tag{3.7}$$

Если расстояние между с.з. вдали от начала координат постоянно, то решение (3.7) вне некоторой окрестности представляет собой плоскую волну. Эта волна рассеивается на потенциале $(\Delta\lambda)^2$, сосредоточенном в начале координат. В результате рассеяния дополнительно к прошедшей плоской волне возникает расходящаяся из начала координат волна. Вид расходящейся волны зависит от ρ – размерности S. При $\beta=2$ эта волна будет цилиндрической.

Можно рассматривать задачи о рассеянии на потенциале $(\Delta\lambda)^2$ не только плоской волны. Вид решения (3.7) вдали от начала координат определяется из условия сшивания решения вида (3.5) с ВКБ решением. В любом случае при первоначальном распространении одной н.в. в результате взаимодействия в окрестности точки сближения с.з. происходит возбуждение второй н.в. Амплитуда этой второй н.в. определяется при решении задачи рассеяния (3.7), а ее вид зависит от размерности пространства S. Такие явления могут наблюдаться в трехмерных системах, содержащих связанные волноводы (трехмерный аналог задачи, рассмотренной в [I3]). Так как задачи о нахождении решения в окрестности сближения каустик и в окрестности сближения с.з. в некотором смысле эквивалентны, то полученные результаты применимы и к теории каустических особенностей. Например, асимптотика решения в окрестности точки сближения двух каустических поверхностей в трехмерном пространстве описывается при помощи решений уравнений вида (3.7). Взаимодействие н.в. при сближении с.з. аналогично взаимодействию каустик, указанному в [I4] . Поэтому в следующем по сложности случае сближения одного с.з. с точкой возврата с.з. асимптотика решения выражается через специальную функцию ([I4])

$$G(\alpha,\beta,\gamma)=\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}}\, e^{-i\gamma\frac{t^2}{2}} \cos\left(\frac{t^3}{12}-\alpha t-\frac{\beta^2}{t}+\frac{\pi}{4}\right). \qquad (3.8)$$

В общем случае сближения произвольных особенностей асимптотика решения выражается через новые эталонные интегралы. Эти интегралы имеют вид

$$G(\alpha_k,\beta)=\int t^\beta e^{\sum_{k=-p}^{q}\alpha_k t^k}\, dt. \qquad (3.9)$$

Коэффициенты α_k являются полиномами от координат.

Известно (см. [II]), что в простейших случаях эталонным интегралам можно сопоставить некоторую группу, связанную с дифференцированием по различным координатам. Поэтому результат применения произвольного дифференциального оператора к эталонному интегралу представляется в виде линейной комбинации производных этого интеграла по параметрам α_k . Именно это позволяет находить анзац и успешно строить по этому анзацу дальнейшие члены асимптотического разложения. Для сложных особенностей такие группы пока неизвестны. Также неисследованными остаются вопросы классификации сложных краевых особенностей.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность И.А.Молоткову за плодотворные обсуждения и замечания.

Литература

1. Краснушкин П.Е., Федоров Е.Н. О кратности волновых чисел нормальных волн в слоистых средах. - Радиотехника и электроника, 1972, т.17, № 6, с.1129-1140.
2. Молотков И.А. Явление вырождения поля в зоне тени при дифракции на импедансной границе. - В кн.: IX Всесоюзная акустич.конф., М., 1977, секция А, с.7-9.
3. Молотков И.А., Старков А.С. Локальное вырождение волн в тонком волноводе. - Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1978, т. 78, с.138-148, 1979, т.89, с.286.
4. Бичуцкая Т.И., Новиков В.В. Взаимодействие нормальных волн в плоском нерегулярном волноводе при наличии точки вырождения. - Изв.ВУЗов, радиофизика, 1979, т.22, № 7, с. 860-870.
5. Старков А.С. Асимптотическое решение двухмасштабных задач распространения волн при наличии точки локального вырождения. - Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1979, т.89, с.275-285.
6. Кучеренко В.В. Асимптотика решений системы $A(x,-ih\frac{\partial}{\partial x})u=$ $=0$ при $h\to 0$ в случае характеристик переменной кратности. - Изв. АН СССР, сер.мат., 1974, № 3, с.625-650.
7. Landau L.D. - Zur Theorie der Eneryienbertraugung bei Stössen. Phys.Z. Sowjet Union 1932, I - Bd I, s. 88-98, II - Bd 2, s.46-51.
8. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. - М., 1969, 528.
9. Лидский В.Б. К теории возмущений несамосопряженных операторов. - Журн.вычислит.мат. и мат.физ., 1966, № 1, с.52-59.
10. Маслов В.П., Федорюк М.В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. - М., 1976, 292 с.
11. Арнольд В.И. Нормальные формы функций вблизи вырожденных критических точек, группы Вейля $A_k, \mathcal{D}_k, E_k$ и лагранжевы особенности. Функцион.анализ, 1972, вып.4, с.3-25.
12. Арнольд В.И. О матрицах, зависящих от параметров. - УМН, 1971, т.XXVI, вып.2, с.101-114.

13. М о л о т к о в И.А., С т а р к о в А.С. Локальное резонансное взаимодействие в системе, содержащей связанные волноводы. – Докл.АН СССР, 1980, т.254, № 2.

14. Г р и к у р о в В.Э., С а л и к о в С.П. – Численное исследование применимости равномерных формул лучевого метода при большом числе каустик. – В сб.: Рассеяние и дифракция радиолакационных сигналов и их информативность, вып.3, 1978, с.39-42.

Starkov A.S. Degeneration and resonance phenomena in the wave propagation problems.

The paper deals with waves interaction near the point of intersection of dispersive curves or the point where one dispersive curve is close to other ones. A new class of special functions which describes the behavior of normal waves is obtained. It is shown that these functions describe a solution in the neighbourhoods of points of intersections of caustics or points where a distance between caustics is small.