Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. В. Дикусар, Обобщенная задача квадратичного программирования, *Докл. РАН*, 1996, том 349, номер 1, 29–31

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.168
25 марта 2025 г., 14:07:27

ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1996, том 349, № 1, с. 29–31

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 519.6; 62–50

ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

© 1996 г. В. В. Дикусар

Представлено академиком С.В. Емельяновым 16.09.94 г.

Поступило 12.10.94 г.

Известно, что решение задачи оптимального управления может быть сведено к двухточечной краевой задаче [1–3]. Эта задача включает две группы нелинейных дифференциальных уравнений (прямую и сопряженную).

Один из способов приближенного решения задачи оптимального управления и поиска первого приближения для краевой задачи заключается в дискретизации прямой системы дифференциальных уравнений. Далее для полученной системы решают задачу линейного (нелинейного) программирования большой размерности [4–6]. Однако такие методы эффективны при решении хорошо обусловленных задач.

При плохо обусловленных задачах методы дискретизации в ряде случаев не позволяют локализовать область хорошего начального приближения. Это связано с повышением размерности задачи, что, в свою очередь, приводит к некорректности.

Другие методы, например продолжение решений по параметру [3, 7], наталкиваются на трудности, связанные с единственностью, существованием решения и непрерывной зависимостью решений от параметра (корректность задачи).

Целью данной работы является разработка методов решения некорректных задач квадратичного программирования, включая невыпуклый случай.

Решению задач квадратичного программирования посвящено много работ [6, 8]. В настоящей работе задача квадратичного программирования решается с помощью метода введения параметра, который сводит исходную задачу к проблеме решения плохо обусловленной линейной алгебраической системы. Указанная система решается различными методами регуляризации [3, 9, 10] и в частности методами факторного анализа.

Методы параметризации, примененные к факторному анализу, позволяют решать задачи квадратичного программирования большой размерности. Подобные вопросы рассмотрены также в работе [8] и связаны с декомпозицией.

СТАНДАРТНАЯ ЗАДАЧА МИНИМИЗАЦИИ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ

Задачу минимизации квадратичной формы при линейных ограничениях

$$\begin{gathered}\min_X [(CX, X)/2 - (D, X)], \quad X \in Q, \\ Q = \{X\colon X \geq 0, \quad A_1 X = B_1\}\end{gathered} \tag{1}$$

будем называть задачей квадратичного программирования. Здесь $X \in \mathbb{R}^n$, C – симметричная матрица $n \times n$, $B \in \mathbb{R}^m$, A – матрица размерности $m \times n$, $D \in \mathbb{R}^n$.

Мы знаем, что квадратичная форма является выпуклой в том и только в том случае, когда $C \geq 0$ [6]. Отказ от этого условия приводит, вообще говоря, к многоэкстремальности задачи. С другой стороны, линейная система в (1) может быть плохообусловленной или не иметь решения. Перечисленные случаи определяют некорректность задачи КП.

КАНОНИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА МИНИМИЗАЦИИ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ

Рассмотрим задачу минимизации квадратичной формы при следующих ограничениях:

$$\begin{gathered}\min_X [(CX, X)/2 - (D, X)], \quad X \in Q, \\ Q = \{X\colon X \geq 0, \quad A_2 X = B_2, \quad A_2 > 0, \quad D > 0\},\end{gathered} \tag{2}$$

где A_2 – матрица с положительными элементами. Известно [4], что задача (1) сводится к задаче (2) с помощью параметризации вида

$$\alpha x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \mu, \quad \mu > 0, \quad \alpha > 0. \tag{3}$$

Здесь x_i – компоненты вектора X, μ – скалярный параметр, параметр α выбирается из условия линейной независимости линейных уравнений (2) и (3).

Вычислительный центр Российской Академии наук, Москва

ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Положим $(D, x) = t$, где t – скалярный параметр. Из линейной алгебраической системы задачи (2) получаем

$$A_3^* A_3 Y = A_3^* B_3, \quad A_3 = \begin{pmatrix} D \\ A_2 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} t \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad Y \geq 0, \tag{4}$$

где A_3^* – транспонированная матрица A_3.

Для задачи (4) методы регуляризации [9, 10] приводят к системе

$$A_\delta Z_\delta = B, \quad Z_\delta \geq 0, \quad A_\delta = A + \delta E,$$
$$A = A_3^* A_3, \quad B = A_3^* B_3, \quad \delta > 0, \tag{5}$$

где δ – параметр регуляризации, E – единичная матрица.

Обозначим разность двух решений (4), (5) через U_δ:

$$U_\delta = Y - Z_\delta. \tag{6}$$

Выпишем теперь приращение функционала (2) на решениях линейных систем (4) и (5):

$$R(U_\delta) = (CY, Y)/2 - (CZ_\delta, Z_\delta)/2 - (D, Y - Z_\delta). \tag{7}$$

Простые алгебраические преобразования в (6), (7) приводят к следующему выражению для $R(U_\delta)$:

$$R(U_\delta) = (CU_\delta, U_\delta)/2 + (CU_\delta, Z_\delta) - (D, U_\delta). \tag{8}$$

Оценим теперь максимальное значение $R(U_\delta)$ (8).

Теорема. *Пусть решение* (4) *для функционала* (2) *ограничено. Тогда имеет место оценка*

$$\max R(U_\delta) < \delta R,$$

где R – положительная константа.

Доказательство. Из соотношения (8) следует

$$(CU_\delta, U_\delta)/2 + (CU_\delta, Z_\delta) = (Y + Z_\delta, CU_\delta)/2,$$
$$Y \geq 0, \quad Z_\delta \geq 0.$$

В силу ограниченности множества значений Y и условия

$$Z_0 \subseteq Y, \quad Z_0 = \lim_{\delta \to 0} Z_\delta$$

имеем

$$0 \leq Y + Z_\delta \leq M, \quad M \geq 0, \tag{9}$$

где неравенство (9) понимается покомпонентно.

Представим матрицу C в виде разности двух матриц

$$C = C_1 - C_2, \quad C_1 \geq 0, \quad C_2 \geq 0. \tag{10}$$

В этом случае

$$(Y + Z_\delta, CU_\delta)/2 = (Y + Z_\delta, C_1 U_\delta)/2 -$$
$$- (Y + Z_\delta, C_2 U_\delta)/2.$$

Теперь мы можем вычислить максимум $R(U_\delta)$ (8):

$$\max R(U_\delta) \leq \max (Y + Z_\delta, C_1 U_\delta)/2 +$$
$$+ \min (Y + Z_\delta, C_2 U_\delta)/2 + \min (D, U_\delta).$$

С другой стороны, U_δ можно представить в виде

$$U_\delta = U_{\delta 1} - U_{\delta 2}, \quad U_{\delta 1} \geq 0, \quad U_{\delta 2} \geq 0. \tag{11}$$

С учетом указанного представления имеем

$$\max R(U_\delta) \leq \max (M, C_1 U_{\delta 1})/2 +$$
$$+ \max (M, C_1 U_{\delta 2})/2 + \max (M, C_2 U_\delta)/2 +$$
$$+ \max (M, C_2 U_{\delta 2})/2 + \min (D, U_\delta).$$

В результате мы приходим к следующей типовой задаче линейного программирования:

$$\max (M, C_1 U_{\delta 1}), \quad U_{\delta 1} \geq 0, \quad A U_{\delta 1} = \delta Z_{\delta 1},$$
$$Z_\delta = Z_{\delta 1} - Z_{\delta 2}. \tag{12}$$

Из решения типовой задачи линейного программирования (12) следует требуемый результат:

$$\max R(U_\delta) < \delta R, \quad R > 0, \quad R \in R^1.$$

Заметим, что этот результат не зависит от неединственности представлений (10), (11), а также от неединственности решения задачи линейного программирования.

ВЫЧИСЛЕНИЕ МИНИМУМА КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ

Из линейной системы (5) следует [4]

$$Z_\delta = C_1 + tC_2, \quad Z_\delta \geq 0, \tag{13}$$

где C_1 и C_2 – векторные константы. Конкретный вид C_1 и C_2 получается из решения задачи (5). Условие $Z_\delta \geq 0$, вообще говоря, выделяет два значения t [4]:

$$t_{11} = \min t, \quad t_{12} = \max t.$$

Квадратичную форму

$$R(Z_\delta) = (CZ_\delta, Z_\delta)/2 - (D, Y - Z_\delta) \tag{14}$$

можно вычислить для трех значений t:

$$R(Z_{\delta 1}) = R(t_{11}), \quad R(Z_{\delta 2}) = R(t_{12}),$$
$$R(Z_\delta) = R(t_0), \quad t_0 \in [t_{11}, t_{12}]. \tag{15}$$

Полученные три значения определяют минимум формы (14) при условии (13). Значение t_0 получаем из равенства нулю производной для формы (14)

$$R'(t) = 0, \quad t_0 = \arg R'(t).$$

Следствие. Теорема, доказанная для ограниченного решения Z_δ (5), справедлива и для неограниченного решения. Это следует из формы представления решения Z_δ (13) и условия (6). Тогда неограниченное решение можно идентифицировать по формулам (15).

При продолжении решений по параметру мы априори требуем ограниченности решений. Ограниченность решения эквивалентна заданию t_{11}, $t_{12} \leq T$, где T – ограниченная положительная константа.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93–012–450).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Афанасьев А.П., Дикусар В.В., Милютин А.А., Чуканов С.В.* Необходимые условия в оптимальном управлении. М.: Наука, 1990.
2. *Дикусар В.В., Милютин А.А.* Качественные и численные методы в принципе максимума. М.: Наука, 1989.
3. *Dikoussar V.V.* In: Int. Series Numerical Math. N.Y.; B.; Tokyo: Springer-Verlag, 1994. V. 115. P. 51–57.
4. *Дикусар В.В.* // ДАН. 1996. Т. 348. № 6.
5. *Evtushenko Yu.G., Zhadan V.G.* // Optimization Methods and Software. 1994. V. 3. P. 237–256.
6. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.
7. *Allgower E.L., Georg K.* Numerical Continuation Methods. In: Int. Series Numerical Math. N.Y.; B.; Tokyo: Springer-Verlag, 1990. V. 14.
8. *Rockafellar R.T.* // J. Math. Program. 1990. V. 48. P. 447–474.
9. *Васин В.В., Агеев А.Л.* Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург: Наука, 1993.
10. Некорректно поставленные задачи в естественных науках / Под ред. А.Н. Тихонова. М., 1992.